Chapitre 1

Ensembles et logique

Les mathématiques du supérieur ne diffèrent pas de celles du lycée par la difficulté des calculs, mais par l'exigence de **rigueur**. Un résultat n'y vaut que par sa démonstration, et une démonstration ne vaut que par la précision de son langage. Ce premier chapitre installe donc les outils qui serviront partout ensuite : de quoi énoncer sans ambiguïté, quantifier avec exactitude, et raisonner selon des schémas éprouvés.

1.1 Logique

1.1.1 Propositions et connecteurs

Définition : On appelle **proposition** une affirmation qui peut être qualifiée de **vraie** ou de **fausse**.

Exemple : Les affirmations suivantes sont des propositions : « $2 > 3$ » (fausse), « π est irrationnel » (vraie), « il pleut aujourd'hui » (dont la valeur dépend du jour).

En revanche, « $x + 1$ » n'est pas une proposition : c'est une expression, dont on ne peut dire ni qu'elle est vraie, ni qu'elle est fausse.

Définition : On appelle **connecteur logique** un mot ou un symbole permettant de construire une nouvelle proposition à partir d'une ou plusieurs propositions connues. Soient A et B deux propositions.

- **non** A est vraie si et seulement si A est fausse ;
- A **et** B est vraie si et seulement si A et B sont *simultanément* vraies ;
- A **ou** B est vraie si et seulement si l'une au moins des deux l'est ; une seule suffit, mais les deux peuvent l'être ;
- $A \Rightarrow B$ signifie que si A est vraie, alors B l'est aussi ;
- $A \Leftrightarrow B$ est vraie lorsque $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ le sont toutes les deux.

On résume l'action de ces connecteurs dans une **table de vérité**, qui énumère tous les cas possibles. La lettre V désigne le vrai, la lettre F le faux.

A	B	non A	A et B	A ou B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Remarque : Deux lignes de cette table surprennent souvent. Lorsque A est fausse, l'implication $A \Rightarrow B$ est *vraie*, quelle que soit B : une hypothèse fausse permet de conclure n'importe quoi, et l'énoncé « si $2 = 3$, alors je suis le pape » est logiquement irréprochable. L'implication ne dit rien du cas où A est fausse.

Notez également que le **ou** des mathématiques est *inclusif* : il n'exclut pas que les deux propositions soient vraies, contrairement au « fromage ou dessert » du langage courant.

Propriété 1 (lois de De Morgan) : Soient A, B et C trois propositions. Alors :

$$\text{non}(A \text{ et } B) \Leftrightarrow (\text{non } A \text{ ou non } B) \quad ; \quad \text{non}(A \text{ ou } B) \Leftrightarrow (\text{non } A \text{ et non } B)$$

De plus, chaque connecteur se distribue sur l'autre :

$$\big[(A \text{ et } B) \text{ ou } C\big] \Leftrightarrow \big[(A \text{ ou } C) \text{ et } (B \text{ ou } C)\big]$$

Remarque : La négation échange donc le **et** et le **ou**. C'est un réflexe à acquérir immédiatement : nier « x est positif *et* rationnel », c'est affirmer « x est strictement négatif *ou* irrationnel ».

1.1.2 Implication et équivalence

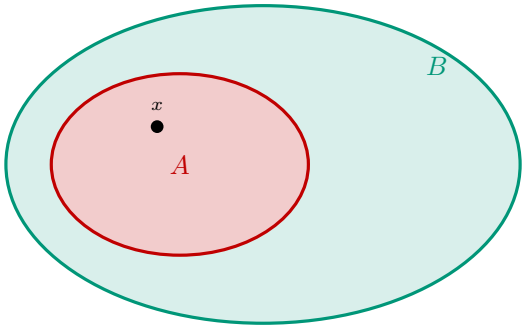
Méthode : Deux schémas de rédaction, à employer systématiquement :

1. Pour établir $A \Rightarrow B$: « Supposons A vraie. ... Donc B est vraie. »

2. Pour établir $A \Leftrightarrow B$, on procède en deux temps : « Montrons que $A \Rightarrow B$ ... Réciproquement, montrons que $B \Rightarrow A$ ... »

Définition : Lorsque l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, on dit que :

- A est une **condition suffisante** pour B ;
- B est une **condition nécessaire** pour A.



tout élément de A est dans B

$A \Rightarrow B$:
A **suffit** pour être dans B,
être dans B est **nécessaire**
pour être dans A

L'image ensembliste éclaire ces deux mots : si tout élément de A appartient à B, il suffit d'être dans A pour être dans B, et il faut nécessairement être dans B pour espérer être dans A.

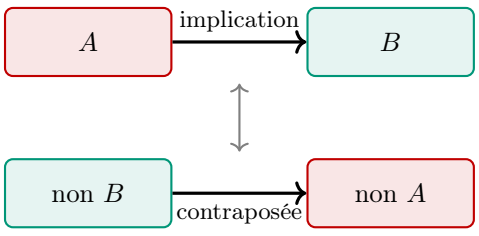
Exemple : Considérons l'implication « n est un multiple de 4 $\Rightarrow$ n est pair ». Être multiple de 4 est donc *suffisant* pour être pair, et être pair est *nécessaire* pour être multiple de 4. La réciproque est fausse, comme le montre $n = 6$.

1.1.3 Modes de raisonnement

Définition : On appelle **contraposée** de l'implication $A \Rightarrow B$ l'implication :

$$\text{non } B \Rightarrow \text{non } A$$

Une implication et sa contraposée sont **équivalentes** : démontrer l'une, c'est démontrer l'autre.



les deux flèches
disent exactement
la même chose

Exemple : Soit x un réel positif. Posons A : « pour tout $\varepsilon > 0$, on a $x \leqslant \varepsilon$ » et B : « $x = 0$ ». Montrons que $A \Rightarrow B$ par contraposée.

Supposons B fausse, c'est-à-dire $x \neq 0$. Comme $x \geqslant 0$, on a donc $x > 0$. Posons alors $\varepsilon = \dfrac{x}{2}$, qui est strictement positif. On a :

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} > \frac{x}{2} = \varepsilon$$

Il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que $x > \varepsilon$: la proposition A est fausse. La contraposée est établie, donc $A \Rightarrow B$.

Définition : Soient A une proposition vraie et B une proposition à démontrer. Si l'hypothèse « B est fausse » conduit à une contradiction avec A, alors B est nécessairement vraie. Ce mode de démonstration s'appelle le **raisonnement par l'absurde**.

Exemple : Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Nous utiliserons la proposition A : tout rationnel s'écrit comme quotient de deux entiers sans facteur commun.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel. On peut alors écrire :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad \text{avec } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \text{ sans facteur commun}$$

En élevant au carré, il vient $2q^2 = p^2$. Ainsi 2 divise p^2, donc p est pair et s'écrit $p = 2p'$ avec $p' \in \mathbb{Z}$. En reportant :

$$2q^2 = 4p'^2 \qquad \text{d'où} \qquad q^2 = 2p'^2$$

Donc q^2 est pair, et q également. Mais alors p et q admettent 2 comme facteur commun, ce qui contredit A. L'hypothèse de départ est donc fausse : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Définition : Pour démontrer qu'une proposition portant sur tous les éléments d'un ensemble est **fausse**, il suffit d'exhiber un seul élément qui la met en défaut. Un tel élément s'appelle un **contre-exemple**.

Exemple : Montrons que la proposition « la fonction $f : x \mapsto 2x + 1$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ » est fausse.

Prenons $x = -3$. Alors :

$$f(-3) = 2 \times (-3) + 1 = -5 < 0$$

Ce seul contre-exemple suffit à conclure.

Remarque : L'asymétrie est totale, et il faut en prendre conscience dès maintenant : un exemple ne démontre *jamais* qu'une proposition universelle est vraie, alors qu'un contre-exemple suffit à établir qu'elle est fausse.

1.2 Ensembles

1.2.1 Ensembles et quantificateurs

Définition : On appelle **ensemble** toute collection d'objets, appelés ses **éléments**. On note $x \in E$ pour « x est un élément de E », et $x \notin E$ dans le cas contraire.

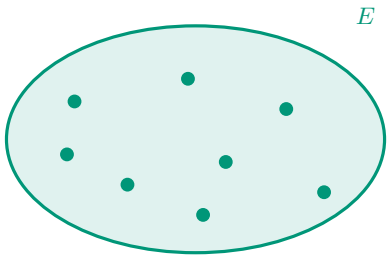
Exemple : Un ensemble peut se décrire *en extension*, en donnant la liste de ses éléments, comme $\{-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\}$, ou *en compréhension*, par une propriété caractéristique :

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leqslant 2\}$$

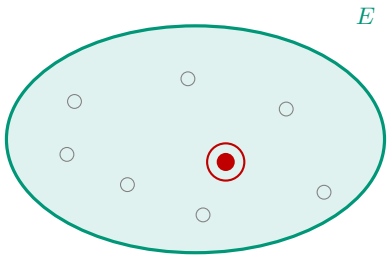
Les deux écritures désignent ici le même ensemble. On rencontre également les ensembles usuels $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, et les intervalles tels que $[-2\,;2]$.

Définition : Soit E un ensemble et $P(x)$ une proposition dépendant d'un élément x de E. On introduit deux **quantificateurs** :

- le **quantificateur universel** : $\forall x \in E,\ P(x)$ est vraie si et seulement si $P(x)$ est vraie **pour tout** x de E ;
- le **quantificateur existentiel** : $\exists x \in E,\ P(x)$ est vraie si et seulement si $P(x)$ est vraie **pour au moins un** x de E.



$\forall x \in E,\ P(x)$
tous les éléments conviennent



$\exists x \in E,\ P(x)$
au moins un élément convient

Remarque : Le symbole $\forall$ ne s'emploie que dans une proposition, et précède toujours celle sur laquelle il porte. Écrire « $x \leqslant 3\ \forall x$ » est une faute de syntaxe autant que de sens : on écrit $\forall x \in E,\ x \leqslant 3$.

Exemple : Les propositions $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$ et $\exists x \in \mathbb{Z},\ x \geqslant 0$ sont vraies.

En revanche, $\forall x \in \mathbb{Z},\ x > 0$ et $\exists x \in [0\,;2],\ x < 0$ sont fausses.

Propriété 2 (négation des quantificateurs) : Soient E un ensemble et $A(x)$ une proposition dépendant de $x \in E$. Alors :

$$\text{non}\big[\forall x \in E,\ A(x)\big] \Leftrightarrow \big[\exists x \in E,\ \text{non } A(x)\big]$$

$$\text{non}\big[\exists x \in E,\ A(x)\big] \Leftrightarrow \big[\forall x \in E,\ \text{non } A(x)\big]$$

∘ *Démonstration :* Admise. □

Méthode : Trois rédactions types, selon ce que l'on veut établir :

1. Pour montrer que $\forall x \in E,\ P(x)$ est vraie :

> « Soit $x \in E$.
> ...
> Donc $P(x)$ est vraie. »

2. Pour montrer que $\exists x \in E,\ P(x)$ est vraie :

> « ...
> Posons $x = \ldots$
> Alors $P(x)$ est vraie.
> Ainsi $\exists x \in E,\ P(x)$. »

3. Pour montrer que $\forall x \in E,\ P(x)$ est fausse :

> « Posons $x = \ldots$
> Alors $P(x)$ est fausse pour ce x.
> Donc $\forall x \in E,\ P(x)$ est fausse. »

1.2.2 Inclusion et égalité

Définition : Soient A et B deux ensembles. On dit que A est un **sous-ensemble** de B, ou une **partie** de B, lorsque :

$$\forall x \in A,\ x \in B$$

On note alors $A \subset B$.

On admet l'existence d'un unique ensemble ne contenant aucun élément, appelé **ensemble vide** et noté $\varnothing$. Il est inclus dans tout ensemble.

Enfin, A et B sont **égaux** lorsque $A \subset B$ et $B \subset A$. On note $A = B$.

Méthode : Pour démontrer une égalité d'ensembles $A = B$, on procède par double inclusion :

> « Soit $x \in A$.
> … donc $x \in B$.
> Réciproquement, soit $x \in B$.
> … donc $x \in A$.
> Ainsi $A = B$. »

Remarque : Ne confondez pas les deux symboles $\in$ et $\subset$: le premier relie un *élément* à un ensemble, le second deux *ensembles*. Ainsi, si $E = \{a\,;b\}$, on écrit $a \in E$ et $\{a\} \subset E$, mais ni $a \subset E$ ni $\{a\} \in E$.

1.2.3 Opérations sur les ensembles

Définition : Soient E et F deux ensembles. On définit :

- l'**intersection** $E \cap F$, constituée des éléments appartenant à E *et* à F :

$$x \in E \cap F \Leftrightarrow \big(x \in E \text{ et } x \in F\big)$$

- la **réunion** $E \cup F$, constituée des éléments appartenant à E *ou* à F :

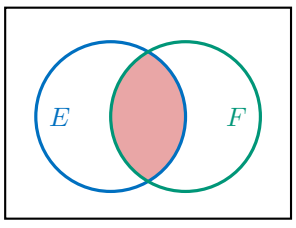
$$x \in E \cup F \Leftrightarrow \big(x \in E \text{ ou } x \in F\big)$$

- le **complémentaire** de F dans E, constitué des éléments de E n'appartenant pas à F :

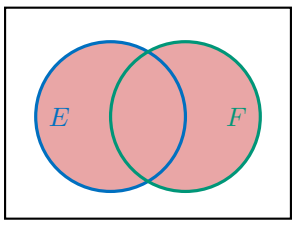
$$x \in E \setminus F \Leftrightarrow \big(x \in E \text{ et } x \notin F\big)$$

Lorsque $F \subset E$ et que E est clair d'après le contexte, le complémentaire se note aussi $\overline{F}$.

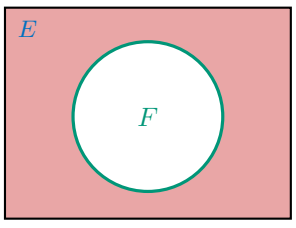
Ces trois ensembles se visualisent par des **diagrammes de Venn** :



$E \cap F$



$E \cup F$

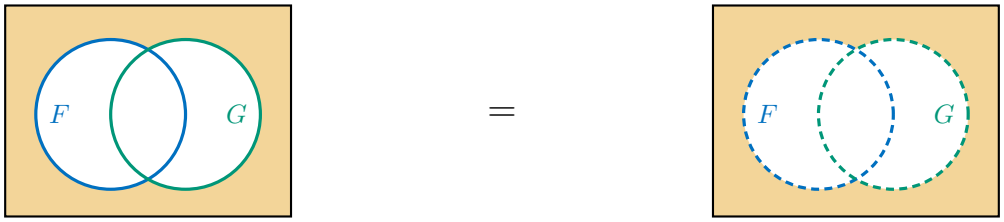


$\overline{F} = E \setminus F$

Propriété 3 : Soit E un ensemble, et F, G, H trois parties de E. En notant $\overline{H}$ le complémentaire dans E, on a :

$$\overline{F \cup G} = \overline{F} \cap \overline{G} \quad ; \quad \overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G}$$

$$(F \cap G) \cup H = (F \cup H) \cap (G \cup H) \quad ; \quad (F \cup G) \cap H = (F \cap H) \cup (G \cap H)$$



$\overline{F \cup G}$ $\overline{F} \cap \overline{G}$

Être hors de la réunion, c'est être à la fois hors de F et hors de G : les deux zones colorées coïncident, ce que la démonstration ci-dessous établit rigoureusement.

∘ *Démonstration :* Démontrons la première égalité par équivalences successives. Soit $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in \overline{F \cup G} &\Leftrightarrow x \notin F \cup G \\ &\Leftrightarrow \text{non}\big(x \in F \text{ ou } x \in G\big) \\ &\Leftrightarrow x \notin F \text{ et } x \notin G \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{F} \text{ et } x \in \overline{G} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{F} \cap \overline{G} \end{aligned}$$

la troisième équivalence provenant des lois de De Morgan de la proposition 1.

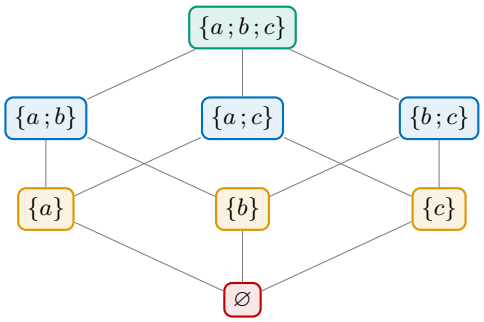
La seconde égalité se démontre de la même façon, ou par double inclusion. Soit $x \in \overline{F \cap G}$: alors « $x \in F$ et $x \in G$ » est fausse, donc $x \notin F$ ou $x \notin G$, c'est-à-dire $x \in \overline{F} \cup \overline{G}$. On a montré $\overline{F \cap G} \subset \overline{F} \cup \overline{G}$, et la réciproque s'obtient en remontant les implications. □

1.2.4 Parties d'un ensemble et produit cartésien

Définition : Soit E un ensemble. Les parties de E constituent elles-mêmes un ensemble, appelé **ensemble des parties** de E et noté $\mathcal{P}(E)$.

Exemple : Détaillons les premiers cas :

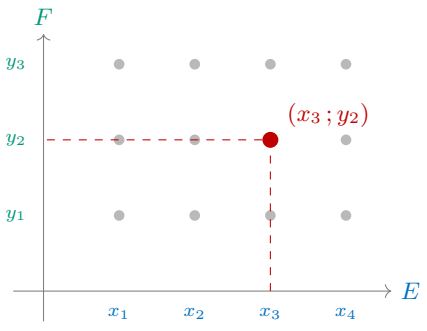
- si $E = \{a\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \big\{\varnothing ; \{a\}\big\}$, qui compte 2 éléments ;
- si $E = \{a ; b\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \big\{\varnothing ; \{a\} ; \{b\} ; E\big\}$, qui en compte 4 ;
- si $E = \{a ; b ; c\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \big\{\varnothing ; \{a\} ; \{b\} ; \{c\} ; \{a ; b\} ; \{a ; c\} ; \{b ; c\} ; E\big\}$, qui en compte 8.



les 8 parties de E, rangées par nombre d'éléments

Chaque trait relie une partie à celles qu'elle contient immédiatement. On observe que $\mathcal{P}(E)$ compte $2^3 = 8$ éléments, résultat qui se généralise : si E possède n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ en possède 2^n.

Définition : Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$, l'ensemble des **couples** $(x ; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$.



$E \times F$ rassemble *tous* les couples, soit ici $4 \times 3 = 12$

Remarque : L'ordre des quantificateurs est essentiel. Les deux propositions

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x\,;y) \qquad \text{et} \qquad \forall y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x\,;y)$$

sont équivalentes : on peut permuter deux quantificateurs de même nature. En revanche,

$$\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x\,;y) \qquad \text{et} \qquad \exists y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x\,;y)$$

ne le sont pas. Dans le premier cas, y peut dépendre de x ; dans le second, un *même* y doit convenir pour tous les x. C'est une distinction dont dépendra, en analyse, toute la différence entre continuité et continuité uniforme.