Chapitre 2

Applications

Le chapitre précédent a fourni le langage des ensembles ; celui-ci fournit le moyen de les relier entre eux. Une application transporte les éléments d'un ensemble vers un autre, et presque tout l'édifice mathématique repose sur ce transport : une suite, une fonction, une transformation géométrique, une permutation sont autant d'applications.

2.1 Généralités

2.1.1 Définition

Définition : Soient E et F deux ensembles. On appelle **application de E dans F** tout triplet (E, F, G) où G est une partie de $E \times F$ telle que :

$$\forall x \in E,\ \exists! y \in F,\ (x\,;y) \in G$$

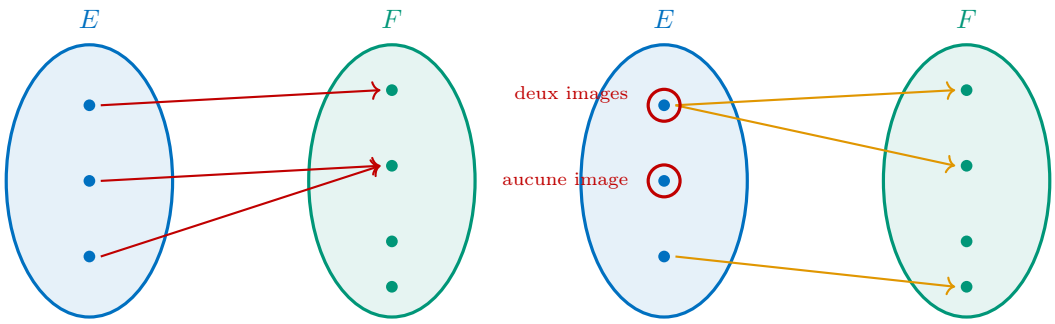
- E est l'**ensemble de départ**, ou ensemble de définition ;
- F est l'**ensemble d'arrivée** ;
- G est le **graphe** de l'application.

Remarque : Le symbole $\exists!$ se lit « il existe un unique ». C'est lui qui porte toute la définition : chaque élément de départ doit avoir une image, et une seule. Une application est donc entièrement déterminée par ces *trois* données, et non par la seule formule de calcul.

En notant f cette application, l'unique élément y associé à x se note $f(x)$, et l'on écrit :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Le réel x est alors un **antécédent** de y, et y est l'**image** de x par f. Le diagramme suivant, dit **sagittal**, représente cette situation par des flèches.



une application :
une flèche et une seule
part de chaque point

pas une application :
un point a deux images,
un autre n'en a aucune

Remarque : Deux précisions de vocabulaire et d'usage :

- lorsque l'ensemble d'arrivée est une partie de $\mathbb{R}$, on parle plus volontiers de **fonction** ;
- pour démontrer l'égalité de deux applications f et g, il faut établir l'égalité des *trois* composantes : mêmes ensembles de départ, mêmes ensembles d'arrivée, et

$$\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$$

Ainsi $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ sont deux applications *distinctes*, bien qu'elles se calculent de la même façon. Cette distinction, qui peut sembler tatillonne, sera essentielle en section 2.3.

Définition : Soient E et F deux ensembles. Les applications de E dans F constituent un ensemble, noté F^E.

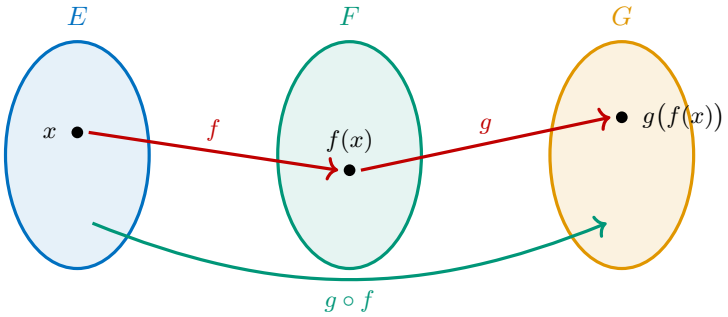
On appelle **application identité** de E l'application :

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_E : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

2.1.2 Composition

Définition : Soient trois ensembles E, F, G et deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On appelle **composée de g par f** l'application notée $g \circ f$ définie par :

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g\big(f(x)\big) \end{aligned}$$



L'ordre des symboles est trompeur : dans $g \circ f$, c'est f qui agit *en premier*. On lit donc de droite à gauche, comme le montre le diagramme.

Propriété 1 : Soient quatre ensembles et trois applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$. Alors :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \qquad \text{et} \qquad f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_F \circ f = f$$

∘ *Démonstration :* Les trois applications considérées vont toutes de E dans H : les ensembles de départ et d'arrivée coïncident. Il reste à comparer les images, ce que l'on fait pour $x \in E$ quelconque :

$$\big[h \circ (g \circ f)\big](x) = h\Big(\big(g \circ f\big)(x)\Big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = \big(h \circ g\big)\big(f(x)\big) = \big[(h \circ g) \circ f\big](x)$$

La seconde égalité se vérifie de même, puisque $f\big(\mathrm{Id}_E(x)\big) = f(x)$ et $\mathrm{Id}_F\big(f(x)\big) = f(x)$. □

Remarque : La composition est donc **associative**, ce qui autorise à écrire $h \circ g \circ f$ sans parenthèses, et Id s'y comporte comme un **élément neutre**, à la manière de 1 pour la multiplication.

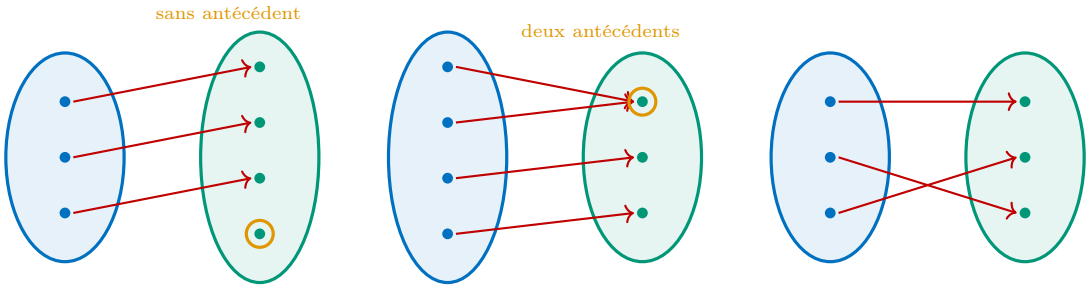
En revanche, elle n'est *pas commutative* : avec $f : x \mapsto x + 1$ et $g : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$, on obtient $g \circ f : x \mapsto (x+1)^2$ tandis que $f \circ g : x \mapsto x^2 + 1$.

2.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

2.2.1 Définitions

Définition : Une application $f : E \to F$ est dite :

- **injective** si tout $y \in F$ admet **au plus un** antécédent ;
- **surjective** si tout $y \in F$ admet **au moins un** antécédent ;
- **bijective** si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si tout $y \in F$ admet **exactement un** antécédent.



injective
non surjective

surjective
non injective

bijective :
appariement parfait

Les points entourés en orange signalent ce qui fait défaut : à gauche, un élément d'arrivée sans antécédent ; au centre, un élément qui en reçoit deux.

Méthode : Deux rédactions types, à connaître par cœur :

1. Pour démontrer que f est injective :

> « Soit $(x\,;x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$.
> ...
> Donc $x = x'$. »

2. Pour démontrer que f est surjective :

> « Soit $y \in F$.
> Posons $x = \ldots$
> Alors $x \in E$ et $f(x) = y$.
> Ainsi $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$. »

Remarque : Pour l'injectivité, on peut aussi raisonner par contraposée en montrant que $x \neq x'$ entraîne $f(x) \neq f(x')$, mais la rédaction ci-dessus est presque toujours plus commode : partir d'une *égalité* donne prise au calcul, ce que ne fait pas une inégalité.

2.2.2 Le rôle des ensembles de départ et d'arrivée

Exemple : Les trois applications suivantes ont la même expression, mais ne se comportent pas de la même façon.

(a)
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

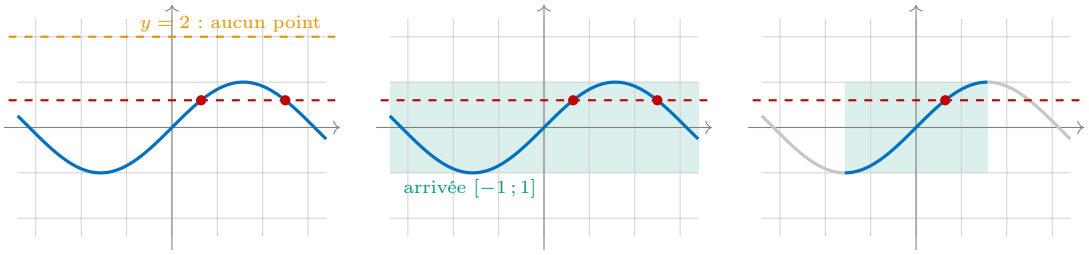
Elle n'est pas injective, car $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$: le réel 1 admet plusieurs antécédents. Elle n'est pas non plus surjective, car 2 n'en admet aucun.

(b)
$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1\,;1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

En restreignant l'ensemble d'arrivée, toute valeur de $[-1\,;1]$ admet désormais un antécédent : g est *surjective*. Elle n'est toujours pas injective.

(c) $\begin{array}{rccc} h : & \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1\,;1] \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$

En restreignant aussi l'ensemble de départ, l'équation $\sin(x) = a$ n'admet plus qu'une solution pour chaque $a \in [-1\,;1]$: h est injective et surjective, donc bijective.



(a) ni injective ni surjective

(b) surjective non injective

(c) bijective

La lecture graphique est commode pour une fonction réelle : on trace les droites horizontales d'équation $y = a$ et l'on compte les points d'intersection avec la courbe. L'application est injective si chaque droite en rencontre *au plus* un, surjective si chacune des droites correspondant à l'ensemble d'arrivée en rencontre *au moins* un.

Remarque : Ces trois exemples illustrent le point annoncé en section 2.1 : l'injectivité et la surjectivité ne dépendent pas seulement de la formule, mais bien des *trois* composantes de l'application. Restreindre l'ensemble d'arrivée peut créer la surjectivité, restreindre l'ensemble de départ peut créer l'injectivité.

2.2.3 Bijection réciproque

Définition : Soit $f : E \to F$ une application **bijective**. L'application qui à tout $y \in F$ associe son unique antécédent s'appelle la **bijection réciproque** de f, et se note :

$$f^{-1} : F \longrightarrow E$$

On a alors, pour tout couple $(x\,;y) \in E \times F$:

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

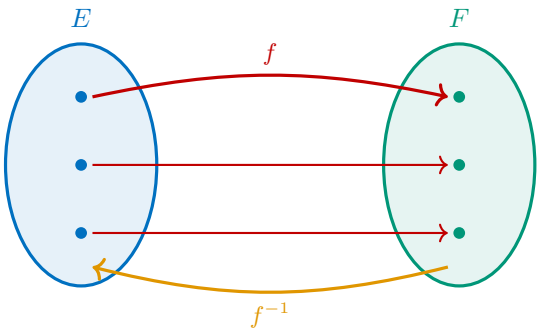
Propriété 2 : Soit $f : E \to F$ une bijection. Alors :

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$$

∘ *Démonstration :* Soit $x \in E$, et posons $y = f(x)$. Par définition de la bijection réciproque, x est l'unique antécédent de y, donc $f^{-1}(y) = x$. Ainsi :

$$\big(f^{-1} \circ f\big)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(y) = x = \mathrm{Id}_E(x)$$

Le raisonnement est symétrique pour la seconde égalité, en partant d'un $y \in F$. □



chaque flèche se parcourt dans les deux sens

Exemple : Reprenons l'application h de l'exemple précédent, bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1\,;1]$. Sa bijection réciproque est la fonction **arcsinus** :

$$\arcsin : [-1\,;1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$$

qui à un réel a associe l'unique x de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = a$.

2.2.4 Image directe et image réciproque

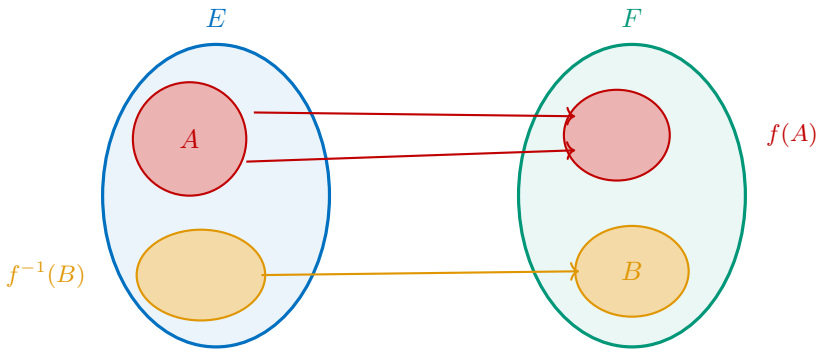
Définition : Soit $f : E \to F$ une application, A une partie de E et B une partie de F. On appelle :

- **image directe** de A par f l'ensemble des images des éléments de A :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ f(x) = y\}$$

- **image réciproque** de B par f l'ensemble des éléments dont l'image tombe dans B :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$



l'image directe se lit dans le sens des flèches,
l'image réciproque à contre-courant

Remarque : La notation $f^{-1}(B)$ ne présuppose *pas* que f soit bijective : c'est un abus commode, mais l'image réciproque d'une partie a toujours un sens, même lorsque l'application réciproque n'existe pas. Il faut donc bien distinguer $f^{-1}(B)$, qui est une *partie de* E, de $f^{-1}(y)$, qui n'a de sens que pour une bijection.

Remarque : Toute application $f : E \to F$ devient surjective si l'on remplace son ensemble d'arrivée par $f(E)$, appelé l'**image** de f : par construction, tout élément de $f(E)$ admet au moins un antécédent. C'est exactement l'opération effectuée au point **(b)** de l'exemple précédent, où l'on est passé de $\mathbb{R}$ à $[-1\,;1] = \sin(\mathbb{R})$.

Exemple : Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

- L'image directe de $A = [-1\,;2]$ est $f(A) = [0\,;4]$: attention, ce n'est pas $[1\,;4]$, car les carrés des éléments proches de 0 sont proches de 0 ;
- l'image réciproque de $B = [1\,;4]$ est $f^{-1}(B) = [-2\,;-1] \cup [1\,;2]$, réunion de deux intervalles ;
- l'image réciproque de $B' = [-4\,;-1]$ est $\varnothing$, aucun carré n'étant négatif.