Chapitre 6

Espaces vectoriels

Les structures précédentes ne faisaient intervenir que des éléments d'un même ensemble. Celle-ci en fait dialoguer deux : un corps de **scalaires**, qui sert à mesurer, et un ensemble de **vecteurs**, sur lesquels ces scalaires agissent. C'est la structure la plus féconde de tout le programme, car elle s'applique aussi bien aux vecteurs du plan qu'aux suites, aux fonctions ou aux polynômes — et tout ce que nous démontrerons vaudra simultanément pour tous.

6.1 Généralités

6.1.1 Définition

Définition : Soient K un corps et E un ensemble. On appelle **loi de composition externe** toute application :

$$K \times E \longrightarrow E$$

On appelle **K-espace vectoriel** tout ensemble E muni d'une L.C.I. notée $+$ et d'une loi externe notée $\cdot$ vérifiant :

A : $(E\,;+)$ est un groupe **abélien** ;

D : la loi externe est **distributive** des deux façons :

$$\forall(\lambda\,;\mu\,;x) \in K^2 \times E,\ (\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x + \mu\cdot x$$

$$\forall(\lambda\,;x\,;y) \in K \times E^2,\ \lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x + \lambda\cdot y$$

A : elle est **associative** avec la multiplication du corps :

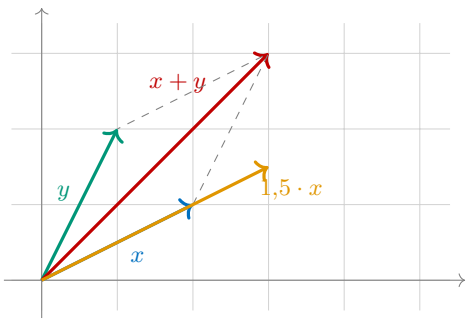
$$\forall(\lambda\,;\mu\,;x) \in K^2 \times E,\ (\lambda\mu)\cdot x = \lambda\cdot(\mu\cdot x)$$

N : le neutre du corps est **neutre** pour la loi externe :

$$\forall x \in E,\ 1_K \cdot x = x$$

Les éléments de K sont les **scalaires**, ceux de E les **vecteurs**. Dans tout ce chapitre, K désigne un corps quelconque.

Remarque : Deux additions cohabitent dans ces axiomes, celle du corps et celle de l'espace, ainsi que deux multiplications. L'usage est de les noter de la même façon, mais il faut savoir à chaque instant de laquelle il s'agit : dans $(\lambda+\mu)\cdot x$, le premier $+$ est celui de K, le second celui de E.



deux opérations :
additionner deux vecteurs,
multiplier un vecteur
par un scalaire

Dans $\mathbb{R}^2$, ces deux lois sont celles que vous connaissez : la règle du parallélogramme pour l'addition, et l'étirement pour la multiplication externe. Toute la force de la définition est de les avoir dégagées de ce cadre géométrique.

Exemple : Trois familles d'exemples, à connaître :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Les cas $n = 2$ et $n = 3$ redonnent les vecteurs du plan et de l'espace ;
- l'ensemble $\mathcal{S}(K)$ des suites à valeurs dans K est un K-espace vectoriel, de même que l'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire donnée ;
- l'ensemble $\mathcal{F}(I\,;E)$ des applications d'un ensemble I dans un K-espace vectoriel E, muni des opérations *point par point*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{et} \qquad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

est un K-espace vectoriel.

Remarque : Ce dernier exemple mérite qu'on s'y arrête : une fonction y est un *vecteur*. Le mot perd donc tout contenu géométrique, et c'est précisément ce qui fait la puissance de la théorie — les théorèmes démontrés sur les vecteurs du plan vaudront pour les fonctions.

6.1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition : Soient E un K-espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E lorsque la restriction des lois de E à F en fait un espace vectoriel.

Propriété 1 (caractérisation des sous-espaces vectoriels) : Soient E un K-espace vectoriel et F une partie de E. Alors :

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff \begin{cases} F \neq \varnothing \\ \forall \lambda \in K,\ \forall (x\,;y) \in F^2,\ \lambda \cdot x + y \in F \end{cases}$$

∘ *Démonstration :* Le sens direct est immédiat, un sous-espace étant stable par les deux lois.

Réciproquement, supposons les deux conditions vérifiées. En prenant $\lambda = -1_K$ et $x = y$, on obtient $0_E \in F$, qui n'est donc pas vide au sens fort. En prenant $\lambda = 1_K$, on obtient la stabilité par addition ; en prenant $y = 0_E$, celle par multiplication externe. Enfin $(F\,;+)$ est un sous-groupe de $(E\,;+)$, et tous les autres axiomes — associativité, distributivité, neutre — sont hérités de E. □

Méthode : Pour montrer qu'une partie F est un sous-espace vectoriel de E :

1. On vérifie que $F \subset E$, puis que $0_E \in F$ — c'est la façon la plus économique de prouver que F n'est pas vide, et elle échoue immédiatement dans les cas non triviaux.

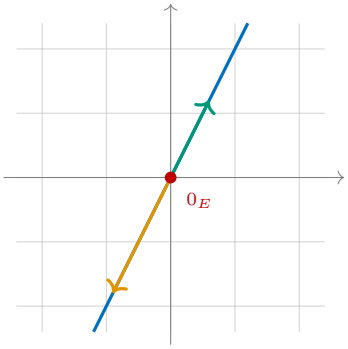
2. On prend $\lambda \in K$ et $(x\,;y) \in F^2$ quelconques, et l'on montre que $\lambda \cdot x + y \in F$.

Cette caractérisation économise la vérification des huit axiomes, tous hérités de E.

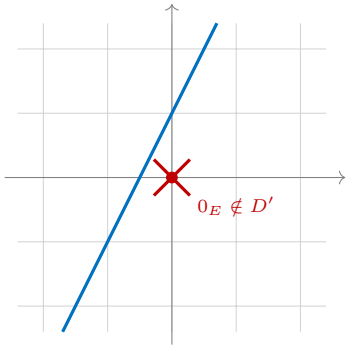
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $D = \left\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = 2x\right\}$ est un sous-espace vectoriel : il contient $(0\,;0)$, et si $u = (a\,;2a)$ et $v = (b\,;2b)$, alors

$$\lambda u + v = (\lambda a + b\,;\, 2\lambda a + 2b) = \big(\lambda a + b\,;\, 2(\lambda a + b)\big) \in D$$

En revanche, la droite $D' = \left\{(x\,;y) \;\middle|\; y = 2x + 1\right\}$ n'en est pas un : elle ne contient pas le vecteur nul, ce qui suffit à conclure.



D **est** un sous-espace : elle passe par l'origine



D' **n'est pas** un sous-espace : elle évite l'origine

Un sous-espace vectoriel contient toujours le vecteur nul : c'est le premier réflexe de vérification, et il élimine d'emblée tous les objets « décalés ».

6.2 Opérations sur les sous-espaces

Définition : Soient I et E deux ensembles. On appelle **famille** $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E indexée par I l'application qui à $i \in I$ associe $x_i \in E$. L'ensemble I est l'**ensemble des indices**.

Pour une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E, on note :

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\} \quad ; \quad \bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$$

Exemple : Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de réels indexée par $\mathbb{N}$: l'application sous-jacente est celle qui à n associe u_n. Une famille indexée par $[\![1\,;n]\!]$ est quant à elle un **n-uplet**.

Propriété 2 (opérations sur les sous-espaces) : Soit E un K-espace vectoriel.

- L'**intersection** d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel.
- Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels, alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel *si et seulement si* $F \subset G$ ou $G \subset F$.
- Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels, alors leur **somme**

$$F + G = \{x \in E \mid \exists (a\,;b) \in F \times G,\ x = a + b\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

∘ *Démonstration :* Intersection : notons A l'intersection de la famille $(F_i)_{i\in I}$. Chaque F_i contient 0_E, donc A aussi. Soient $\lambda \in K$ et $(x\,;y) \in A^2$: pour tout i, les vecteurs x et y appartiennent à F_i, donc $\lambda x + y \in F_i$. Ceci valant pour tout i, on a $\lambda x + y \in A$.

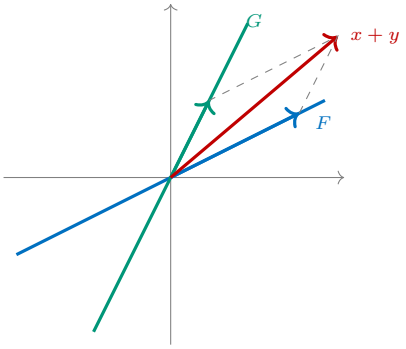
Réunion : si l'un des deux contient l'autre, la réunion est le plus grand des deux, donc un sous-espace. Réciproquement, supposons $F \cup G$ sous-espace et $F \not\subset G$: il existe $x \in F$ avec $x \notin G$. Soit alors $y \in G$; la somme $x + y$ appartient à $F \cup G$. Si elle était dans G, alors $x = (x + y) - y$ y serait aussi, ce qui est exclu : donc $x + y \in F$, puis $y = (x + y) - x \in F$. Ainsi $G \subset F$.

Somme : le vecteur $0_E = 0_E + 0_E$ appartient à $F + G$. Soient $\lambda \in K$ et deux éléments $x = a + b$ et $x' = a' + b'$ avec a, a' dans F et b, b' dans G. Alors :

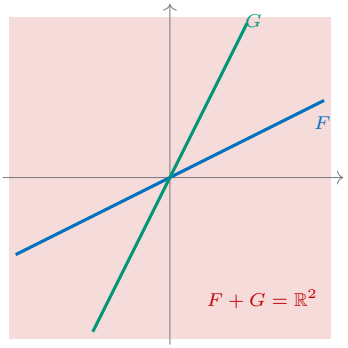
$$\lambda x + x' = \underbrace{(\lambda a + a')}_{\in F} + \underbrace{(\lambda b + b')}_{\in G} \in F + G$$

□

Remarque : Le deuxième point est le plus surprenant : la réunion de deux sous-espaces n'en est presque jamais un. La raison est visible sur un dessin — en additionnant un vecteur de chaque droite, on sort de la réunion.



$x + y \notin F \cup G$:
la réunion n'est pas stable



la somme, elle, remplit
tout le plan

Définition : Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

- Ils sont en **somme directe** lorsque tout élément x de $F_1 + F_2$ s'écrit de *façon unique* $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$. On note alors $F_1 \oplus F_2$.
- Ils sont **supplémentaires** dans E lorsque, de plus, $E = F_1 \oplus F_2$.

Propriété 3 (caractérisation des sommes directes) : Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :

$$F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2 \iff F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$$

∘ *Démonstration :* Sens direct : supposons la somme directe, et soit $x \in F_1 \cap F_2$. Ce vecteur admet deux décompositions :

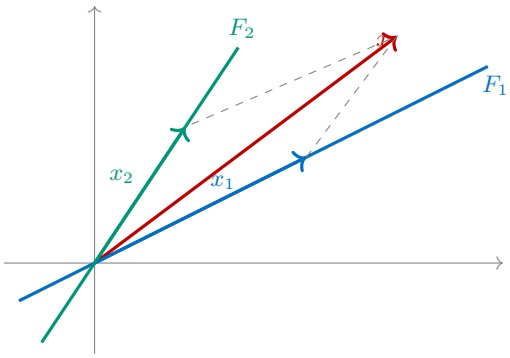
$$x = \underbrace{x}_{\in F_1} + \underbrace{0_E}_{\in F_2} = \underbrace{0_E}_{\in F_1} + \underbrace{x}_{\in F_2}$$

L'unicité impose $x = 0_E$, d'où $F_1 \cap F_2 \subset \{0_E\}$, l'autre inclusion étant acquise.

Réciproque : supposons $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et donnons-nous deux décompositions d'un même vecteur :

$$x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \qquad \text{avec } x_1, y_1 \in F_1 \text{ et } x_2, y_2 \in F_2$$

En regroupant, $x_1 - y_1 = y_2 - x_2$. Le membre de gauche est dans F_1, celui de droite dans F_2 : ce vecteur commun appartient donc à l'intersection, et vaut 0_E. D'où $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$: la décomposition est unique. □



$\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$:
tout vecteur se décompose
d'une *seule* façon

Deux droites distinctes du plan sont toujours supplémentaires : leur intersection est réduite au vecteur nul, et tout vecteur se décompose de façon unique en une composante sur chacune. C'est le mécanisme de la projection.

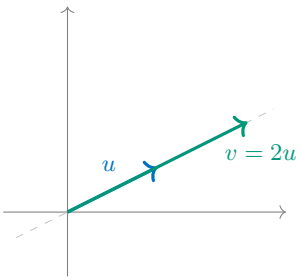
6.3 Systèmes et bases

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **système**, ou **famille finie**, de vecteurs de E toute famille $(x_1\,;\ldots\,;x_n) \in E^n$. Un tel système est dit :

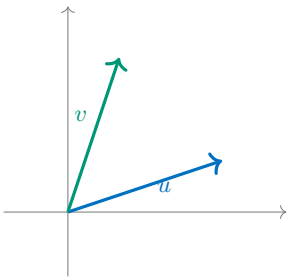
- **libre** lorsque la seule combinaison linéaire nulle est celle dont tous les coefficients sont nuls :
$$\forall (\lambda_k) \in K^n,\ \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E\right) \Longrightarrow (\forall k \in [\![1\,;n]\!],\ \lambda_k = 0_K)$$
- **lié** dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsqu'il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls ;
- **générateur** lorsque tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des x_k :
$$\forall x \in E,\ \exists (\lambda_k) \in K^n,\ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$
On note alors $E = \mathrm{Vect}(x_1\,;\ldots\,;x_n)$.

Un système à la fois **libre** et **générateur** est appelé une **base** de E.

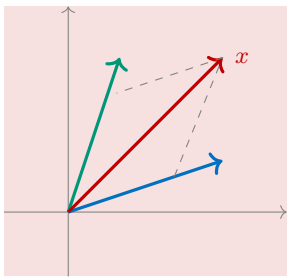
Remarque : Les deux propriétés se complètent exactement. Un système générateur est *assez gros* pour atteindre tout E ; un système libre est *assez petit* pour ne comporter aucune redondance. Une base réalise l'équilibre entre les deux, et c'est ce qui lui donne sa propriété caractéristique : tout vecteur s'y décompose de façon **unique**.



système **lié** : $2u - v = 0_E$



système **libre**



base : tout x se décompose, et d'une seule façon

À gauche, le second vecteur n'apporte rien : le système est lié, et il n'engendre qu'une droite. Au centre, les deux vecteurs sont indépendants. À droite, ils engendrent tout le plan : c'est une base, et les pointillés montrent la décomposition d'un vecteur quelconque.

Exemple : Montrons que le système $S = (e_1\,;e_2\,;e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, avec :
$$e_1 = (1\,;0\,;1) \qquad e_2 = (1\,;-1\,;1) \qquad e_3 = (0\,;1\,;1)$$

(a) Le système est libre. Soient $(\lambda\,;\mu\,;\nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0_E$, c'est-à-dire :
$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -\mu + \nu = 0 \\ \lambda + \mu + \nu = 0 \end{cases}$$
En soustrayant la première équation à la troisième, il vient immédiatement $\nu = 0$. La deuxième donne alors $\mu = 0$, et la première $\lambda = 0$. Le système est donc libre.

(b) Le système est générateur. Soit $X = (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$. Cherchons $(\lambda\,;\mu\,;\nu)$ tels que $X = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3$:
$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = -\mu + \nu \\ z = \lambda + \mu + \nu \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = -\mu + \nu \\ \nu = z - x \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2x + y - z \\ \mu = -x - y + z \\ \nu = z - x \end{cases}$$
la troisième ligne s'obtenant par $L_3 \to L_3 - L_1$, puis par report successif. Le triplet cherché existe donc toujours, et le système est générateur.

Libre et générateur, S est une base de $\mathbb{R}^3$.

Définition : On appelle **base canonique** du K-espace vectoriel K^n le système $(e_1\,;\ldots\,;e_n)$ défini par :

$$e_1 = (1\,;0\,;0\,;\ldots\,;0) \qquad e_2 = (0\,;1\,;0\,;\ldots\,;0) \qquad \ldots \qquad e_n = (0\,;0\,;0\,;\ldots\,;1)$$

Remarque : Dans cette base, les coordonnées d'un vecteur sont tout simplement ses composantes : le triplet $(3\,;-1\,;2)$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit $3e_1 - e_2 + 2e_3$. C'est cette coïncidence qui vaut à cette base le qualificatif de *canonique* — mais elle n'a rien de privilégié mathématiquement, et l'exemple précédent fournit une autre base tout aussi légitime de $\mathbb{R}^3$.