Chapitre 7

Endomorphismes

Le chapitre 4 étudiait les applications respectant une loi de groupe ; celui-ci étudie celles qui respectent la structure d'espace vectoriel. Elles portent le nom d'**applications linéaires**, et lorsqu'elles vont d'un espace dans lui-même, celui d'**endomorphismes**. Ce sont elles qui transportent toute l'algèbre linéaire : rotations, projections, dérivation, décalage des suites en sont autant d'exemples, et les mêmes théorèmes les gouvernent tous.

7.1 Applications linéaires

7.1.1 Définition

Définition : Soient E et F deux K-espaces vectoriels. On appelle **application linéaire** de E dans F toute application $f : E \to F$ vérifiant :

$$\forall (x\,;y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{et} \qquad \forall \lambda \in K,\ \forall x \in E,\ f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

On note $\mathcal{L}(E\,;F)$ leur ensemble, et l'on appelle :

- **endomorphisme** toute application linéaire de E dans lui-même, l'ensemble étant noté $\mathcal{L}(E)$;
- **isomorphisme** toute application linéaire bijective, et **automorphisme** tout endomorphisme bijectif ;
- **forme linéaire** toute application linéaire de E dans K.

Propriété 1 (caractérisation) : Une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si :

$$\forall \lambda \in K,\ \forall (x\,;y) \in E^2,\ f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y)$$

∘ *Démonstration :* Si f est linéaire, l'égalité s'obtient en appliquant successivement les deux propriétés de la définition.

Réciproquement, supposons la condition vérifiée. En prenant $\lambda = 1_K$, on retrouve l'additivité ; en prenant $y = 0_E$, on obtient $f(\lambda x) = \lambda f(x) + f(0_E)$. Or, en choisissant $\lambda = -1_K$ et $y = x$, on trouve $f(0_E) = -f(x) + f(x) = 0_F$, d'où l'homogénéité. □

Remarque : La démonstration précédente établit au passage un fait à retenir : une application linéaire envoie toujours le vecteur nul sur le vecteur nul,

$$f(0_E) = 0_F$$

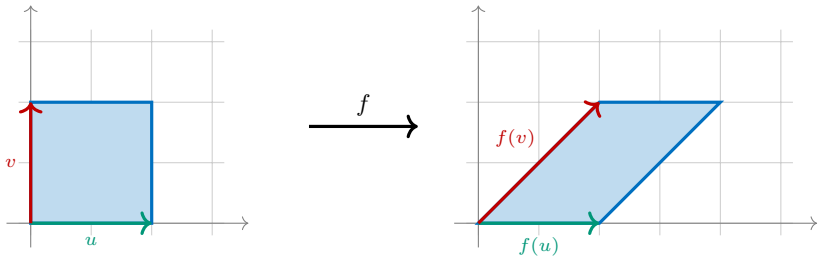
C'est le premier test à effectuer : une application qui ne vérifie pas cette égalité n'est pas linéaire, et il est inutile d'aller plus loin.

Exemple : Voici quelques applications linéaires, choisies dans des espaces très différents :

- l'**homothétie** $x \mapsto \lambda \cdot x$ de E dans E, pour $\lambda \in K$ fixé ;
- la **rotation** d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$, ainsi que toute projection ou symétrie vectorielle ;

- la **dérivation** $f \mapsto f'$, de l'espace des fonctions dérivables dans celui des fonctions ;
- le **décalage** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'espace des suites ;
- l'**évaluation** $f \mapsto f(a)$, qui est une forme linéaire sur $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

En revanche, $x \mapsto x+1$ sur $\mathbb{R}$ n'est pas linéaire, puisqu'elle n'envoie pas 0 sur 0 ; et $x \mapsto x^2$ ne l'est pas davantage, car $f(2x) = 4f(x)$.



avant après

Une application linéaire transforme un quadrillage en un autre quadrillage : les droites restent des droites, le parallélisme est conservé, et l'origine reste fixe. C'est la traduction géométrique des deux axiomes.

7.2 Noyau et image

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E;F)$. On appelle :

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ f(x) = y\}$$

Propriété 2 : Soit $f \in \mathcal{L}(E;F)$. Alors $\operatorname{Ker} f$ est un **sous-espace vectoriel de E**, et $\operatorname{Im} f$ est un **sous-espace vectoriel de F**.

∘ *Démonstration :* Nous utilisons la caractérisation du chapitre 6.

Le noyau : il contient 0_E puisque $f(0_E) = 0_F$. Soient $\lambda \in K$ et $(x;y) \in (\operatorname{Ker} f)^2$:

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda \cdot 0_F + 0_F = 0_F$$

donc $\lambda x + y \in \operatorname{Ker} f$.

L'image : elle contient $0_F = f(0_E)$. Soient $\lambda \in K$ et deux vecteurs $y = f(a)$ et $y' = f(b)$ de $\operatorname{Im} f$. Alors :

$$\lambda y + y' = \lambda f(a) + f(b) = f(\lambda a + b)$$

qui appartient donc à $\operatorname{Im} f$. □

Théorème 1 : Caractérisation de l'injectivité :
Soit $f \in \mathcal{L}(E;F)$. Alors :

$$f \text{ est injective} \iff \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$$

∘ *Démonstration :* Si f est injective et $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $f(x) = 0_F = f(0_E)$, d'où $x = 0_E$.

Réciproquement, supposons $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et soient x, y tels que $f(x) = f(y)$. Par linéarité, $f(x-y) = 0_F$, donc $x - y \in \operatorname{Ker} f$, c'est-à-dire $x = y$. □

Remarque : C'est le même énoncé qu'au chapitre 4, et pour cause : une application linéaire est en particulier un morphisme du groupe $(E;+)$ dans $(F;+)$. Toute la théorie des groupes s'applique donc ici, enrichie de la loi externe.

Exemple : Étudions l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x\,;y\,;z) = (x-y\,;\,y-z)$.

Linéarité : pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et deux vecteurs $u = (x\,;y\,;z)$ et $u' = (x'\,;y'\,;z')$:

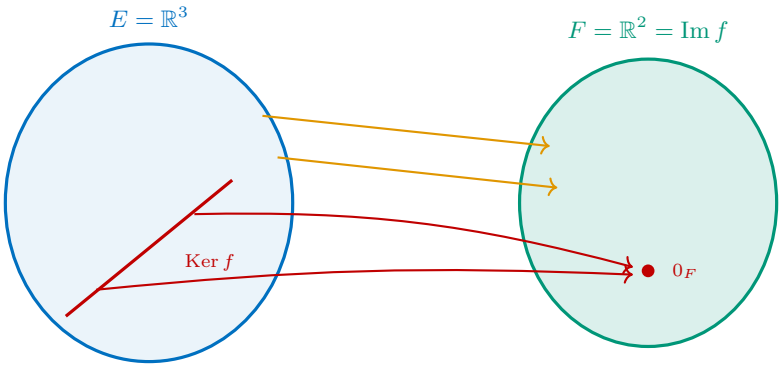
$$f(\lambda u + u') = \big(\lambda x + x' - \lambda y - y'\,;\,\lambda y + y' - \lambda z - z'\big) = \lambda f(u) + f(u')$$

Noyau : un vecteur y appartient si et seulement si $x-y=0$ et $y-z=0$, c'est-à-dire $x=y=z$. Donc :

$$\operatorname{Ker} f = \big\{(t\,;t\,;t) \;\big|\; t \in \mathbb{R}\big\} = \operatorname{Vect}\big((1\,;1\,;1)\big)$$

C'est une droite vectorielle : f n'est pas injective.

Image : on a $f(1\,;0\,;0) = (1\,;0)$ et $f(0\,;0\,;-1) = (0\,;1)$. L'image contient donc deux vecteurs engendrant $\mathbb{R}^2$, d'où $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$: f est surjective.



toute une droite s'écrase sur 0_F,
tandis que l'image remplit F tout entier

Remarque : Observez les dimensions : le noyau est une droite, l'image un plan, et $1+2=3$, la dimension de l'espace de départ. Cette coïncidence n'en est pas une — c'est le **théorème du rang**, que nous établirons au chapitre suivant, une fois la notion de dimension définie.

7.3 Structure de l'ensemble des endomorphismes

Propriété 3 : Soient E et F deux K-espaces vectoriels.

- $\mathcal{L}(E\,;F)$, muni de l'addition et de la multiplication externe définies point par point, est un **K-espace vectoriel**.
- La composée de deux applications linéaires est linéaire.
- $\big(\mathcal{L}(E)\,;+\,;\circ\big)$ est un **anneau**, de neutre multiplicatif Id_E, non commutatif en général.
- L'ensemble des automorphismes de E, noté $GL(E)$, est un **groupe** pour la composition, appelé **groupe linéaire**.

∘ *Démonstration :* Démontrons la stabilité par composition, les autres points s'obtenant par vérification directe des axiomes. Soient f et g linéaires, $\lambda \in K$ et $(x\,;y) \in E^2$:

$$(g\circ f)(\lambda x + y) = g\big(\lambda f(x) + f(y)\big) = \lambda\, g\big(f(x)\big) + g\big(f(y)\big) = \lambda\,(g\circ f)(x) + (g\circ f)(y)$$

la première égalité utilisant la linéarité de f, la seconde celle de g.

Pour $GL(E)$, il suffit de constater que Id_E en est élément, que la composée de deux bijections linéaires l'est encore, et que la réciproque d'un automorphisme est linéaire — ce qui se démontre comme au chapitre 4. □

Remarque : Ce résultat referme la boucle des chapitres précédents : $\mathcal{L}(E)$ est simultanément un espace vectoriel et un anneau, et son groupe des inversibles est $GL(E)$. Les structures étudiées séparément se superposent ici sur un même objet.

Exemple : La non-commutativité se constate sur un exemple simple. Sur l'espace des polynômes réels, considérons :

$$D : P \longmapsto P' \qquad \text{et} \qquad M : P \longmapsto XP$$

qui sont deux endomorphismes. Alors, pour tout polynôme P :

$$(D \circ M)(P) = (XP)' = P + XP' \qquad \text{tandis que} \qquad (M \circ D)(P) = XP'$$

Ces deux résultats diffèrent, et leur écart vaut exactement :

$$D \circ M - M \circ D = \mathrm{Id}$$

7.4 Projecteurs et symétries

Définition : Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un **projecteur** lorsque :

$$p \circ p = p$$

On dit que $s \in \mathcal{L}(E)$ est une **symétrie** lorsque $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Remarque : L'égalité $p \circ p = p$ traduit une idée très concrète : projeter une seconde fois ne change plus rien, puisque le résultat est déjà sur la cible. De même, appliquer deux fois une symétrie ramène au point de départ.

Théorème 2 : Décomposition associée à un projecteur :
Soit p un projecteur de E. Alors :

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$$

De plus, $\operatorname{Im} p$ est exactement l'ensemble des vecteurs invariants par p.

∘ *Démonstration :* La somme vaut E : soit $x \in E$. Écrivons l'identité :

$$x = \underbrace{\big(x - p(x)\big)}_{(1)} + \underbrace{p(x)}_{(2)}$$

Le terme (2) appartient évidemment à $\operatorname{Im} p$. Quant au terme (1), son image vaut :

$$p\big(x - p(x)\big) = p(x) - p\big(p(x)\big) = p(x) - p(x) = 0_E$$

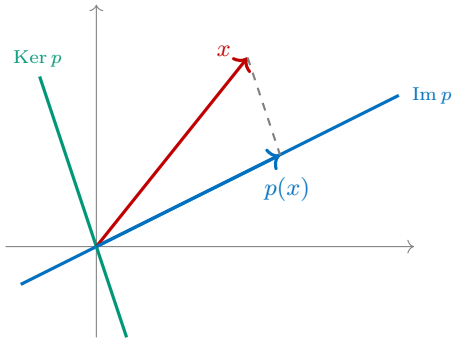
puisque $p \circ p = p$: il appartient donc à $\operatorname{Ker} p$.

La somme est directe : soit $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$. Comme $x \in \operatorname{Im} p$, il existe a tel que $x = p(a)$, d'où :

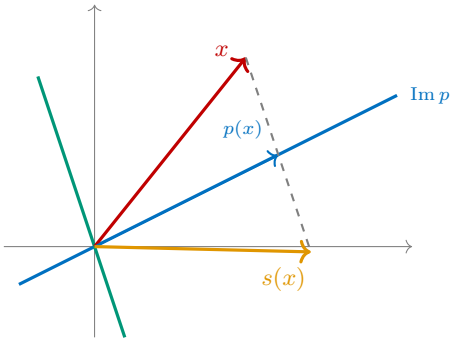
$$p(x) = p\big(p(a)\big) = p(a) = x$$

Mais $x \in \operatorname{Ker} p$ donne $p(x) = 0_E$, donc $x = 0_E$.

Le calcul précédent montre au passage que tout vecteur de $\operatorname{Im} p$ est invariant, et la réciproque est immédiate. □



le **projecteur** écrase sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$



la **symétrie** prolonge d'autant : $s(x) = 2p(x) - x$

Propriété 4 : Soit p un projecteur de E. Alors l'application $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ est une **symétrie**, et réciproquement, si s est une symétrie, alors $p = \dfrac{1}{2}\big(s + \mathrm{Id}_E\big)$ est un projecteur.

∘ *Démonstration :* Calculons $s \circ s$ en développant, ce qui est licite puisque $\mathcal{L}(E)$ est un anneau :

$$s \circ s = (2p - \mathrm{Id}) \circ (2p - \mathrm{Id}) = 4\,p \circ p - 2p - 2p + \mathrm{Id} = 4p - 4p + \mathrm{Id} = \mathrm{Id}$$

en utilisant $p \circ p = p$. La réciproque se démontre par le même calcul, mené à l'envers. □

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, considérons $p(x\,;y) = (x + y\,;\,0)$.

C'est un projecteur : $p\big(p(x\,;y)\big) = p(x+y\,;0) = (x+y\,;0) = p(x\,;y)$.

Ses éléments caractéristiques :

$$\mathrm{Ker}\,p = \big\{(x\,;y) \;\big|\; x + y = 0\big\} = \mathrm{Vect}\big((1\,;-1)\big) \qquad ; \qquad \mathrm{Im}\,p = \mathrm{Vect}\big((1\,;0)\big)$$

Ces deux droites sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$, conformément au théorème 2.

La symétrie associée est $s = 2p - \mathrm{Id}$, soit $s(x\,;y) = (x + 2y\,;\,-y)$. On vérifie :

$$s\big(s(x\,;y)\big) = s(x+2y\,;-y) = \big(x + 2y - 2y\,;\,y\big) = (x\,;y)$$

Remarque : Projecteurs et symétries sont donc deux facettes d'un même objet : la donnée de deux sous-espaces supplémentaires. Cette correspondance sera d'un usage constant, notamment en géométrie et dans l'étude des matrices, où ces endomorphismes admettent des écritures particulièrement simples.