Chapitre 8

Dimension finie

Une base permet de repérer tout vecteur par ses coordonnées. Encore faut-il savoir combien de vecteurs elle comporte — et il n'est pas évident que ce nombre soit toujours le même. C'est pourtant le cas, et cette invariance donne naissance à la notion de **dimension**, qui mesure le nombre de degrés de liberté d'un espace. Elle transforme radicalement la théorie : en dimension finie, des propriétés qui semblaient indépendantes deviennent équivalentes, et de simples comptages remplacent des démonstrations laborieuses.

8.1 Dimension d'un espace vectoriel

Définition : Un K-espace vectoriel E est dit **de dimension finie** lorsqu'il admet une **famille génératrice finie**. Dans le cas contraire, il est dit de dimension infinie.

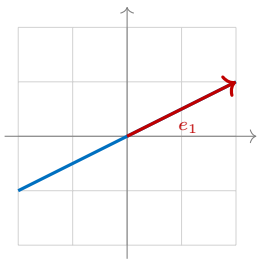
Théorème 1 : Existence et invariance de la dimension :
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0_E\}$.

- E admet au moins une **base** finie.
- Toutes les bases de E possèdent le **même nombre** de vecteurs.

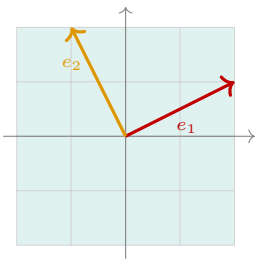
Ce nombre commun est appelé la **dimension** de E et noté $\dim E$. Par convention, $\dim\{0_E\} = 0$.

∘ *Démonstration :* Admise. Le premier point s'obtient en extrayant une base d'une famille génératrice finie, en retirant un à un les vecteurs superflus ; le second repose sur un lemme d'échange, qui montre qu'une famille libre ne peut jamais compter plus de vecteurs qu'une famille génératrice. □

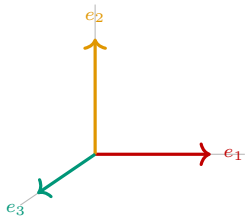
Remarque : C'est la seconde propriété qui donne son sens à la notion. Sans elle, parler de « la » dimension n'aurait aucun sens : un même espace pourrait avoir une base de trois vecteurs et une autre de cinq. L'invariance est donc le résultat fondateur de tout ce chapitre.



dimension 1
une droite



dimension 2
un plan



dimension 3
l'espace

La dimension compte le nombre de *directions indépendantes*, c'est-à-dire le nombre de coordonnées nécessaires pour repérer un vecteur.

Exemple : Quelques dimensions à connaître :

- $\dim K^n = n$, la base canonique comportant n vecteurs ;

- $\dim K_n[X] = n+1$, une base étant $(1\,;X\,;\ldots\,;X^n)$ — l'écart d'une unité surprend souvent, mais le polynôme constant compte ;
- $\dim \mathcal{M}_{n,p}(K) = np$, une base étant formée des matrices n'ayant qu'un seul coefficient non nul ;
- $\mathbb{C}$ est de dimension 2 en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, de base $(1\,;\mathrm{i})$, mais de dimension 1 en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

En revanche, $K[X]$ et l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ne sont *pas* de dimension finie.

Remarque : Le dernier point mérite attention : la dimension dépend du *corps de base* autant que de l'ensemble. Il faut donc toujours préciser sur quel corps on travaille avant d'annoncer une dimension.

Propriété 1 : Soit E un espace de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. Alors :
- si $\mathcal{F}$ est **libre**, elle compte au plus n vecteurs ;
- si $\mathcal{F}$ est **génératrice**, elle en compte au moins n ;
- si $\mathcal{F}$ compte **exactement** n vecteurs, alors elle est libre si et seulement si elle est génératrice, et dans ce cas c'est une base.

Remarque : Le troisième point est d'un usage constant : dès que l'on connaît la dimension, il suffit de vérifier *l'une* des deux propriétés au lieu des deux. Or la liberté se teste par un simple système linéaire, tandis que le caractère générateur demande de résoudre pour un vecteur quelconque — on vérifie donc presque toujours la liberté.

Exemple : Reprenons le système $S = (e_1\,;e_2\,;e_3)$ du chapitre 6, avec $e_1 = (1\,;0\,;1)$, $e_2 = (1\,;-1\,;1)$ et $e_3 = (0\,;1\,;1)$. Nous avions démontré séparément qu'il était libre, puis générateur.

La proposition 1 rend le second calcul superflu : S compte trois vecteurs dans un espace de dimension trois, et il est libre, donc c'est une base. Toute la seconde moitié de la démonstration devient inutile.

8.2 Sous-espaces et dimension

Propriété 2 : Soient E un espace de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et :

$$\dim F \leqslant \dim E \qquad \text{avec} \qquad \dim F = \dim E \iff F = E$$

∘ *Démonstration :* Toute famille libre de F est en particulier une famille libre de E, donc compte au plus $\dim E$ vecteurs d'après la proposition 1 : F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.

Supposons maintenant $\dim F = \dim E = n$, et soit $\mathcal{B}$ une base de F. C'est une famille libre de E comportant n vecteurs : d'après le troisième point de la proposition 1, c'est une base de E. Donc $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = F$. □

Remarque : L'équivalence de droite est un outil de démonstration remarquablement économique : pour établir une égalité entre deux espaces, il suffit de prouver une inclusion et l'égalité des dimensions, au lieu de la double inclusion. Attention toutefois, l'inclusion reste indispensable — deux espaces de même dimension ne sont pas égaux pour autant.

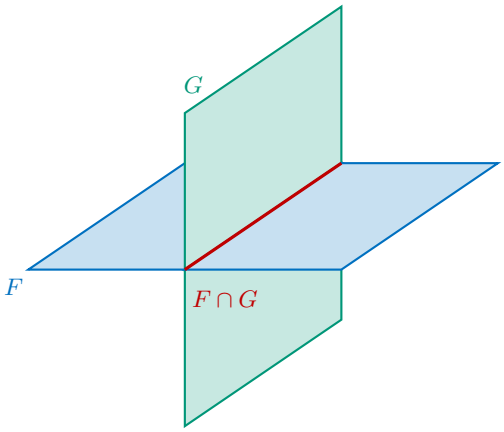
Théorème 2 : Formule de Grassmann :
Soient F et G deux sous-espaces de dimension finie d'un espace E. Alors :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

En particulier, F et G sont **supplémentaires** dans E si et seulement si :

$$F \cap G = \{0_E\} \qquad \text{et} \qquad \dim F + \dim G = \dim E$$

Remarque : La formule se lit comme celle du cardinal d'une réunion : on additionne, puis on retranche ce qui a été compté deux fois. C'est exactement le principe additif des dénombrements, transposé aux dimensions.



$\dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$
$= 2 + 2 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Deux plans distincts de $\mathbb{R}^3$ se coupent selon une droite. Leur somme est bien l'espace tout entier, mais ils ne sont pas supplémentaires : leur intersection n'est pas réduite au vecteur nul, et le compte des dimensions le confirme, puisque $2+2 \neq 3$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, considérons le plan P d'équation $x+y+z=0$ et la droite $D = \text{Vect}\big((1\,;1\,;1)\big)$.

Un vecteur de D s'écrit $(t\,;t\,;t)$, et appartient à P si et seulement si $3t=0$, c'est-à-dire $t=0$. Donc $P \cap D = \{0\}$. Comme de plus $\dim P + \dim D = 2+1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, le théorème 2 permet de conclure : P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Notez qu'il n'a pas été nécessaire de vérifier que $P + D = \mathbb{R}^3$: le comptage des dimensions l'a fourni gratuitement.

8.3 Rang et théorème du rang

Définition : Soit $u \in \mathcal{L}(E\,;F)$ avec E de dimension finie. On appelle **rang** de u la dimension de son image :

$$\text{rg}(u) = \dim\big(\text{Im}\, u\big)$$

De même, le **rang d'une famille de vecteurs** est la dimension de l'espace qu'elle engendre.

Théorème 3 : Théorème du rang :
Soient E un espace de dimension finie, F un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E\,;F)$. Alors :

$$\dim E = \dim\big(\text{Ker}\, u\big) + \text{rg}(u)$$

∘ *Démonstration :* Notons $N = \text{Ker}\, u$ et choisissons un supplémentaire S de N dans E, de sorte que $E = N \oplus S$. Montrons que la restriction de u à S réalise un *isomorphisme* de S sur $\text{Im}\, u$.

Injectivité : soit $x \in S$ tel que $u(x) = 0_F$. Alors $x \in N \cap S = \{0_E\}$, donc $x = 0_E$.

Surjectivité : soit $y \in \text{Im}\, u$, et $x \in E$ tel que $u(x) = y$. Décomposons $x = n + s$ avec $n \in N$ et $s \in S$:

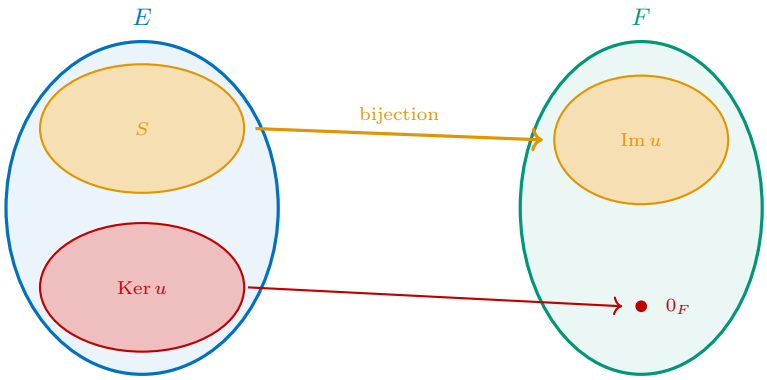
$$y = u(x) = \underbrace{u(n)}_{=0_F} + u(s) = u(s)$$

donc y est bien atteint depuis S.

Les espaces S et $\text{Im}\, u$ sont donc isomorphes, et ont par conséquent la même dimension. Comme $E = N \oplus S$, la formule de Grassmann donne enfin :

$$\dim E = \dim N + \dim S = \dim\big(\text{Ker}\, u\big) + \text{rg}(u)$$

□



ce qui n'est pas écrasé sur 0_F se retrouve intégralement dans l'image :
$\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg}(u)$

Exemple : Reprenons l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie au chapitre 7 par $f(x\,;y\,;z) = (x - y\,;y - z)$. Nous avions trouvé :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\big((1\,;1\,;1)\big) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$$

Le théorème du rang se vérifie : $\dim \mathbb{R}^3 = 1 + 2 = 3$. La coïncidence signalée alors trouve ici son explication.

Mieux : le théorème permet d'*économiser* un calcul. Le noyau étant une droite, le rang vaut nécessairement $3 - 1 = 2$, donc $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace de dimension 2 de $\mathbb{R}^2$: c'est $\mathbb{R}^2$ tout entier, d'après la proposition 2. La surjectivité s'obtient ainsi sans exhiber le moindre antécédent.

Propriété 3 : Soient E et F deux espaces de **même dimension finie** et $u \in \mathcal{L}(E\,;F)$. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

$$u \text{ est injective} \iff u \text{ est surjective} \iff u \text{ est bijective}$$

∘ *Démonstration :* D'après le théorème du rang, $\dim E = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg}(u)$. Or :

$$u \text{ injective} \iff \operatorname{Ker} u = \{0_E\} \iff \dim(\operatorname{Ker} u) = 0 \iff \operatorname{rg}(u) = \dim E = \dim F$$

et cette dernière égalité signifie, d'après la proposition 2, que $\operatorname{Im} u = F$, c'est-à-dire que u est surjective. □

Remarque : Ce résultat est spectaculaire, et strictement réservé à la dimension finie — et de surcroît à l'égalité des dimensions. Il suffit désormais de vérifier *la moitié* de ce qu'exige une bijection.

En dimension infinie, il tombe en défaut. Sur l'espace des suites, le décalage $(u_n) \mapsto (u_{n+1})$ est surjectif sans être injectif, puisque toute suite constante nulle à partir du rang 1 est dans son noyau ; et son analogue « décalage vers la droite » est injectif sans être surjectif.