Chapitre 9

Matrices

Les endomorphismes du chapitre précédent sont des objets abstraits : on les définit par une propriété, non par un calcul. Dès que l'espace possède une base finie, il devient pourtant possible de les représenter par un tableau de nombres, sur lequel tout se calcule. C'est l'objet de ce chapitre, et la raison pour laquelle les matrices sont omniprésentes : elles font de l'algèbre linéaire une théorie effectivement calculable.

Tout ce chapitre se place en **dimension finie**, au sens du chapitre 8 : les espaces considérés admettent des bases finies, et c'est le nombre de vecteurs de ces bases qui fixera la taille des matrices.

9.1 Matrices et opérations

9.1.1 Définitions

Définition : Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle **matrice** de taille $n \times p$ à coefficients dans K tout tableau rectangulaire de n lignes et p colonnes d'éléments de K :

$$A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Leur ensemble se note $\mathcal{M}_{n,p}(K)$, et $\mathcal{M}_n(K)$ lorsque $n = p$: on parle alors de matrices **carrées**.

Remarque : L'ordre des indices est une convention universelle qu'il faut fixer une fois pour toutes : $a_{i,j}$ désigne le coefficient situé à la **ligne** i et à la **colonne** j. On retient que la ligne se lit avant la colonne, comme dans un jeu de bataille navale.

Définition : Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $\lambda \in K$. On définit :

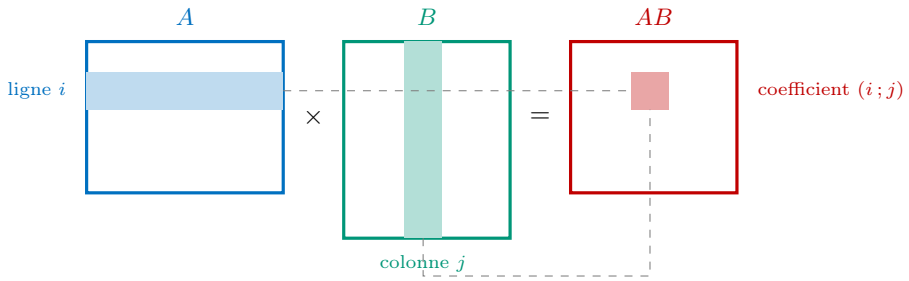
$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}) \qquad \text{et} \qquad \lambda \cdot A = (\lambda\, a_{i,j})$$

Muni de ces deux lois, $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ est un **K-espace vectoriel**.

Définition : Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$. Le **produit** AB est la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(K)$ dont le coefficient d'indice $(i\,;j)$ vaut :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\, b_{k,j}$$

Remarque : Le produit n'est défini que si le nombre de **colonnes** de A égale le nombre de **lignes** de B. On calcule le coefficient $(i\,;j)$ en faisant glisser la i-ième ligne de A le long de la j-ième colonne de B, en multipliant terme à terme puis en sommant.



Exemple : Calculons un produit et son inverse dans l'ordre :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le coefficient en haut à gauche de AB s'obtient par la première ligne de A et la première colonne de B, soit $1 \times 3 + 2 \times 2 = 7$. En poursuivant :

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{tandis que} \qquad BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Le produit matriciel n'est donc pas commutatif.

Propriété 1 : Le produit matriciel est **associatif** et **distributif** sur l'addition. De plus, en notant I_n la matrice carrée dont les coefficients diagonaux valent 1 et les autres 0 :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(K),\ AI_n = I_nA = A$$

Par conséquent, $\big(\mathcal{M}_n(K)\,;+\,;\times\big)$ est un **anneau**, non commutatif dès que $n \geqslant 2$, et son groupe des inversibles est noté $GL_n(K)$.

Remarque : Cet anneau possède des **diviseurs de zéro**, comme le montre le produit suivant, où aucun facteur n'est nul :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On ne peut donc jamais simplifier une égalité matricielle par un facteur commun, sauf si celui-ci est inversible.

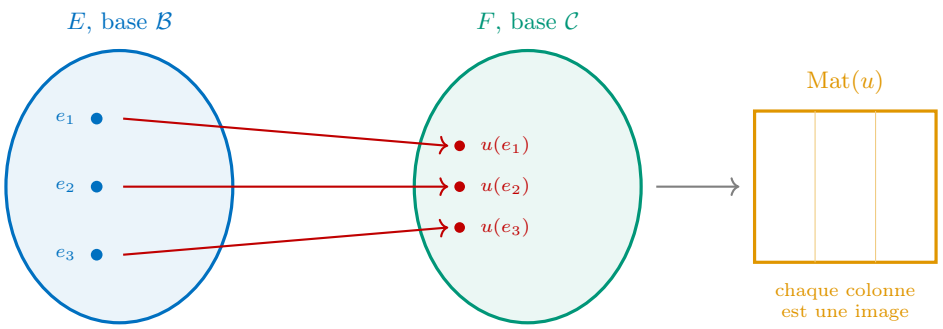
9.2 Matrice d'une application linéaire

Définition : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions p et n, munis de bases $\mathcal{B} = (e_1\,;\ldots\,;e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1\,;\ldots\,;f_n)$, et soit $u \in \mathcal{L}(E\,;F)$.

On appelle **matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$**, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ dont la **j-ième colonne** est constituée des coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.

Remarque : Retenez la règle sous cette forme : **les colonnes sont les images des vecteurs de la base de départ**. C'est l'unique chose à mémoriser, et elle détermine tout le reste — y compris la définition du produit, comme le montrera le théorème 1.

Une application linéaire est ainsi entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base : np scalaires suffisent à décrire une application définie sur un ensemble infini.



Théorème 1 : Produit et composition :
Soient $u \in \mathcal{L}(E\,;F)$ et $v \in \mathcal{L}(F\,;G)$, les trois espaces étant munis de bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$$

Remarque : Ce théorème justifie *a posteriori* la définition du produit matriciel, qui peut sembler arbitraire : elle a été construite exactement pour que le produit des matrices corresponde à la composition des applications. Les deux non-commutativités, celle de $\circ$ et celle de $\times$, n'en font donc qu'une.

Notez au passage l'ordre : dans $v \circ u$, l'application u agit la première, et sa matrice se place à *droite* dans le produit.

Exemple : Considérons la dérivation sur l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2, muni de la base $\mathcal{B} = (1\,;X\,;X^2)$:

$$D(1) = 0 \qquad D(X) = 1 \qquad D(X^2) = 2X$$

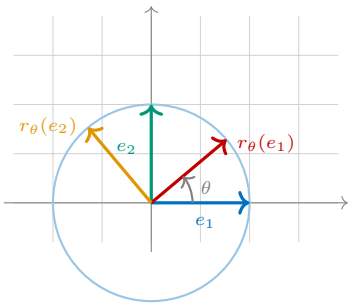
Les coordonnées de ces trois images forment les colonnes de la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie que le carré de cette matrice a une seule ligne non nulle, et que son cube est nul — ce qui traduit qu'en dérivant trois fois un polynôme de degré 2, on obtient toujours le polynôme nul.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique, la rotation r_θ d'angle θ envoie $e_1 = (1\,;0)$ sur $(\cos\theta\,;\sin\theta)$ et $e_2 = (0\,;1)$ sur $(-\sin\theta\,;\cos\theta)$. D'où :

$$\mathrm{Mat}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



les deux images forment
les deux colonnes
de la matrice

9.3 Matrices inversibles

9.3.1 Définition et premières propriétés

Définition : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite **inversible** lorsqu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

Cette matrice B, alors unique, est appelée l'**inverse** de A et notée A^{-1}.

Propriété 2 : Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$. Alors AB est inversible, et :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

∘ *Démonstration :* C'est le résultat du chapitre 3 sur l'inverse d'un produit, appliqué au groupe $GL_n(K)$:

$$(AB)\big(B^{-1}A^{-1}\big) = A\big(BB^{-1}\big)A^{-1} = AI_nA^{-1} = I_n$$

et de même dans l'autre ordre. □

Propriété 3 : Soit u un endomorphisme d'un espace E de dimension finie, muni d'une base $\mathcal{B}$. Alors :

$$u \text{ est un automorphisme} \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est inversible}$$

et l'on a dans ce cas $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(u^{-1}\big) = \big[\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\big]^{-1}$.

∘ *Démonstration :* Si u est un automorphisme, alors $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}_E$. En passant aux matrices grâce au théorème 1, et en observant que la matrice de l'identité est I_n, on obtient exactement la définition de l'inversibilité. La réciproque s'obtient en remontant les mêmes égalités. □

Méthode : Pour inverser une matrice A de *petite* taille, on résout le système $AX = Y$ d'inconnue X :

1. On écrit le système linéaire correspondant, d'inconnues les coefficients de X.

2. On le résout en exprimant X en fonction de Y, par combinaisons de lignes.

3. La matrice obtenue dans l'écriture $X = BY$ est l'inverse cherché, et l'on vérifie par un produit.

Exemple : Inversons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Le système $AX = Y$ s'écrit :

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 3x + 4y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = a \\ -2y = b - 3a \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2a + b \\ y = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b \end{cases}$$

la deuxième ligne s'obtenant par $L_2 \to L_2 - 3L_1$. D'où :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Vérification : $AA^{-1} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = I_2$.

9.3.2 Méthode du pivot de Gauss

Dès la taille 3, la résolution du système devient pénible. On lui préfère un algorithme systématique, qui s'applique à n'importe quelle taille et se prête au calcul automatique : la **méthode du pivot de Gauss**.

Définition : On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'une matrice les trois transformations suivantes :

- **échanger** deux lignes, ce que l'on note $L_i \leftrightarrow L_j$;
- **multiplier** une ligne par un scalaire *non nul*, noté $L_i \leftarrow \lambda L_i$;
- **ajouter** à une ligne un multiple d'une autre, noté $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Remarque : Chacune de ces opérations revient à multiplier A *à gauche* par une matrice inversible, et elle est donc **réversible** : on peut toujours revenir en arrière. C'est ce qui autorise à les enchaîner sans rien perdre, et c'est aussi pourquoi le second point exige $\lambda \neq 0$.

Théorème 2 : Principe du pivot :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Si une suite d'opérations élémentaires sur les lignes transforme A en I_n, alors la *même* suite d'opérations transforme I_n en A^{-1}.

∘ *Démonstration :* Notons E_1, …, E_k les matrices inversibles correspondant aux opérations effectuées. L'hypothèse s'écrit :

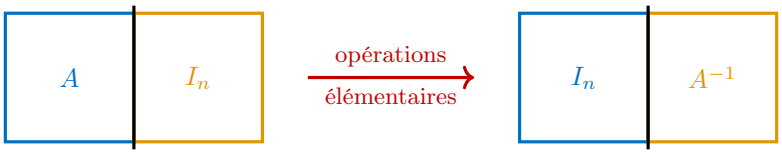
$$E_k \cdots E_1 A = I_n$$

donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = E_k \cdots E_1$. Or ce produit est exactement le résultat obtenu en appliquant les mêmes opérations à I_n, puisque :

$$E_k \cdots E_1 I_n = E_k \cdots E_1$$

□

Remarque : En pratique, on écrit les deux matrices côte à côte dans un tableau appelé **matrice augmentée**, et l'on mène les opérations simultanément sur les deux moitiés. Lorsque la moitié gauche devient I_n, la moitié droite est l'inverse cherché.



les mêmes opérations sont menées sur les deux moitiés

Méthode : L'algorithme se déroule en deux temps :

1. Descente. On fait apparaître des zéros sous la diagonale, colonne après colonne, en utilisant à chaque étape un coefficient non nul appelé **pivot**. Si le pivot est nul, on échange deux lignes.

2. Remontée. On fait apparaître des zéros au-dessus de la diagonale, en partant de la dernière colonne, puis on divise chaque ligne par son pivot.

Si une ligne entière devient nulle à gauche, l'algorithme s'arrête : la matrice n'est *pas* inversible.

Exemple : Inversons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ par cette méthode.

Matrice augmentée de départ :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Descente. Le pivot de la première colonne est le 1 en haut à gauche. On annule le 5 situé dessous :

$$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Le pivot de la deuxième colonne est le 1 de la deuxième ligne, et l'on annule le -4 :

$$L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

La moitié gauche est désormais **triangulaire supérieure**, avec des pivots tous égaux à 1 : la matrice est inversible.

Remontée. On annule maintenant les coefficients situés au-dessus de la diagonale, en commençant par la troisième colonne :

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 16 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

puis la deuxième :

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

La moitié gauche est l'identité, donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérification. Le produit AA^{-1} a pour premier coefficient $1 \times (-24) + 2 \times 20 + 3 \times (-5) = -24 + 40 - 15 = 1$, et l'on obtient de même I_3 en poursuivant.

Remarque : Deux avantages décisifs sur la résolution de système. D'une part, l'algorithme est **systématique** : aucune astuce n'est requise, ce qui le rend programmable. D'autre part, il **décide** de l'inversibilité en cours de route — inutile de la supposer au départ, l'apparition d'une ligne nulle à gauche suffit à conclure que la matrice ne l'est pas.

Le même algorithme sert d'ailleurs à résoudre les systèmes linéaires et à calculer un rang, ce qui en fait l'outil de calcul le plus rentable de toute l'algèbre linéaire.

9.4 Transposition et matrices remarquables

Définition : Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. On appelle **transposée** de A la matrice ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ de coefficients $\left({}^tA\right)_{i,j} = a_{j,i}$: elle s'obtient en échangeant les lignes et les colonnes.

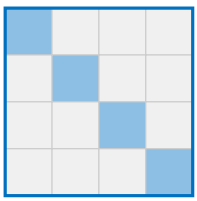
Une matrice carrée est dite **symétrique** lorsque ${}^tA = A$, et **antisymétrique** lorsque ${}^tA = -A$.

Propriété 4 : Pour toutes matrices de tailles compatibles et tout scalaire λ :

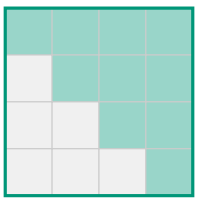
$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \quad ; \quad {}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA \quad ; \quad {}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$$

Remarque : La dernière égalité renverse l'ordre, comme l'inverse d'un produit. Ce n'est pas une coïncidence : les deux opérations se comportent de la même façon vis-à-vis de la composition, et l'image des chaussettes et des chaussures du chapitre 3 vaut encore ici.

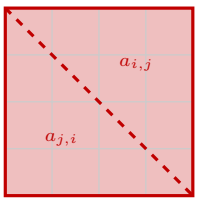
Certaines formes de matrices reviennent constamment, et se reconnaissent d'un coup d'œil à la disposition de leurs coefficients nuls :



diagonale



triangulaire supérieure



symétrique : miroir diagonal

Remarque : Les matrices grisées désignent les coefficients nécessairement nuls. Ces formes ne sont pas de simples curiosités : une matrice triangulaire rend la résolution d'un système immédiate, de proche en proche, et une matrice diagonale ramène le calcul de A^k à celui des puissances de ses coefficients. Tout l'enjeu de la suite du programme sera de *ramener* une matrice quelconque à l'une de ces formes par un changement de base.