Chapitre 2

Nombres complexes

2.1 Introduction historique

Une fois que j'ai éclairci et résolu un problème, je m'en éloigne pour retourner dans l'obscurité.

Carl Friedrich Gauss - 1777-1855

2.1.1 Nombres sophistiques

Durant la Renaissance, les mathématiciens se passionnant pour l'algèbre se sont intensément intéressés à la résolution de l'équation du troisième degré, en particulier à l'équation simplifiée :

$$x^3 + ax = b$$

Convaincus de pouvoir donner une solution directement à partir des radicaux (ici les paramètres a et b), ils y travaillèrent jusqu'à ce que **Jérome Cardan** (1501-1576) en donne une formule générale dans son ouvrage *Ars magna sive de regulis algebraicis*. En 1572, le mathématicien italien Bombelli utilise ces formules pour résoudre $x^3 - 15x = 4$. Une des solutions trouvée est $x = 4$, mais lors des calculs, il s'aperçoit que la formule de Cardan mène à :

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1}$$

Les racines se simplifiant, Bombelli ignore l'obstacle et considèrera désormais ce genre de nombres issus de la racine d'un nombre négatif comme des nombres **sophistiques**, qu'on ne peut se représenter mais dont le calcul est possible... ils sont en quelque sorte *imaginaires*.

2.1.2 L'imaginaire offre toujours une solution

Alors que **Leonhard Euler** (1707-1783), afin de faciliter les notations, introduit l'écriture de $i = \sqrt{-1}$, les mathématiciens prendront désormais en compte l'existence de ces nombres imaginaires dans leurs calculs, trouvant de nombreuses solutions à des équations polynomiales auparavant irrésolubles à partir de i. L'un des exemples les plus connus étant :

$$x^2 + 1 = 0$$

Intuitivement, le mathématicien **d'Alembert** (1717-1783) comprend qu'une solution pourra donc toujours exister, quelle que soit l'équation polynomiale, mais il faudra attendre le prince des mathématiques **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) pour qu'une démonstration complète de ce résultat soit trouvée, désormais appelé Théorème fondamental de l'Algèbre :

Tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet au moins une racine complexe.



2.2 Ensemble $\mathbb{C}$

2.2.1 Généralités

Proposition 1 : Il existe un ensemble appelé **ensemble des nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, ayant les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}$ contient un élément i ayant pour propriété $i^2 = -1$.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication ayant les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$.
- Pour tout élément $z \in \mathbb{C}$, il existe un couple de nombres réels $(a; b)$ tels que :

$$z = a + ib$$

∘ Démonstration :
Admise. Les outils utilisés pour construire $\mathbb{C}$ rigoureusement relèvent de l'enseignement supérieur.

□

Définition : Soit $z \in \mathbb{C}$ et (a, b) le couple de réels tel que $z = a + ib$.

- L'expression $a + ib$ est appelée **expression algébrique** de z.
- Le nombre a est appelé **partie réelle** de z, qu'on peut également noter $\text{Re}(z)$.
- Le nombre b est appelé **partie imaginaire** de z, qu'on peut également noter $\text{Im}(z)$.

Si $a = 0$, on dit que z est un **imaginaire pur**.

ex : Le nombre $z = 2 + 3i$ est un nombre complexe, avec $\text{Re}(z) = 2$ et $\text{Im}(z) = 3$.

2.2.2 Calcul dans $\mathbb{C}$

Proposition 2 : Soit $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$. Alors :

$$z = z' \Leftrightarrow (\text{Re}(z) = \text{Re}(z') \text{ et } \text{Im}(z) = \text{Im}(z'))$$

∘ Démonstration : Soient a, a', b et b' tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

- Supposons que $a = a'$ et $b = b'$. Ainsi $z = a + ib = a' + ib' = z'$.
- Réciproquement, supposons que $z = z'$. On a alors :

$$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a - a' = i(b' - b)$$

Supposons alors que $b \neq b'$. On a donc :

$$i = \frac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R}$$

ce qui est absurde. Donc $b = b'$, et immédiatement $a = a'$.

□

Proposition 3 : Soient a et b deux nombres réels, et n un entier naturel. On a alors :

- **Identités remarquables :**

$$(a + ib)^2 = a^2 + 2iab - b^2$$
$$(a - ib)^2 = a^2 - 2iab - b^2$$
$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

- **Binôme de Newton :**

$$\forall u, v \in \mathbb{C},\ (u + v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$$

◦ Démonstration :

—

$$\begin{aligned}(a+ib)^2 &= a^2+2iab+(ib)^2\\ &= a^2+2iab+i^2b^2\\ &= a^2+2iab-b^2\\ (a-ib)^2 &= a^2-2iab+(ib)^2\\ &= a^2-2iab+i^2b^2\\ &= a^2-2iab-b^2\\ (a+ib)(a-ib) &= a^2-(ib)^2\\ &= a^2-i^2b^2\\ &= a^2+b^2\end{aligned}$$

— Pour le binôme, on procède par récurrence sur n :

Initialisation : Pour $n=0$, on a $(u+v)^0=1$ et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}u^kv^{0-k} &= 1\times u^0v^0\\ &= 1\end{aligned}$$

Donc on a bien :

$$(u+v)^0=\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}u^kv^{0-k}$$

Hérédité : Soit $N\in\mathbb{N}$. Supposons que l'égalité du binôme est vraie pour N, on veut donc la montrer à $N+1$:

$$\begin{aligned}(u+v)^{N+1} &= (u+v)(u+v)^N\\ &= (u+v)\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}u^kv^{N-k}\\ &= \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}u^{k+1}v^{N-k}+\underbrace{\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}u^kv^{N+1-k}}_{v\text{ à la puissance recherchée}}\end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variable $k'=k+1$ (ou $k=k'-1$) dans la première somme, afin que les deux sommes aient la même puissance de v recherchée :

$$\begin{aligned}(u+v)^{N+1} &= \sum_{k'=1}^{N+1}\binom{N}{k'-1}u^{k'}v^{N+1-k'}+\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}u^kv^{N+1-k}\\ &= \binom{N}{N}u^{N+1}v^0+\underbrace{\sum_{k'=1}^{N}\binom{N}{k'-1}u^{k'}v^{N+1-k'}+\sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}u^kv^{N+1-k}}_{\text{on retire premier et dernier terme aux sommes pour pouvoir les unir}}+\binom{N}{0}u^0v^{N+1}\\ &= \binom{N}{N}u^{N+1}v^0+\sum_{k=1}^{N}\left[\binom{N}{k-1}+\binom{N}{k}\right]u^kv^{N+1-k}+\binom{N}{0}u^0v^{N+1}\\ &= \binom{N+1}{N+1}u^{N+1}v^0+\sum_{k=1}^{N}\binom{N+1}{k}u^kv^{N+1-k}+\binom{N+1}{0}u^0v^{N+1}\\ &= \sum_{k=0}^{N+1}\binom{N+1}{k}u^kv^{N+1-k}\end{aligned}$$

Conclusion : La formule du binôme de Newton est donc bien vraie pour tout n.

□

2.3 Résolution d'équations

2.3.1 Conjugué

Définition : Soit $z \in \mathbb{C}$, et a, b deux réels tels que $z = a + ib$. On appelle **conjugué de z** noté $\overline{z}$ le complexe :

$$\overline{z} = a - ib$$

ex : Soit $z = 2 + 3i$, on a $\overline{z} = 2 - 3i$.

Proposition 4 : Soient a et b deux nombres réels, $z = a + ib$. On a alors :

1. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
2. $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
3. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$
4. $\mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\overline{z}$
5. $\overline{\overline{z}} = z$
6. $z\overline{z} = a^2 + b^2$

La dernière propriété est notamment souvent utilisée pour faire disparaitre un i d'un dénominateur : **on multiplie par le conjugué au numérateur et au dénominateur**.

∘ Démonstration :

1. $z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$
2. $z - \overline{z} = a + ib - (a - ib) = a + ib - a + ib = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
3. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0$ or si $z = a$ alors $\overline{z} = a$ et donc $z = \overline{z}$.
   Réciproquement, si $z = \overline{z}$, on a :
   $$a + ib = a - ib \Rightarrow 2ib = 0 \Rightarrow b = 0$$
4. $\mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ or si $z = ib$ alors $\overline{z} = -ib$ donc $z = -\overline{z}$.
   Réciproquement, si $z = -\overline{z}$, on a :
   $$a + ib = -a + ib \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$
5. $\overline{\overline{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$
6. On utilise simplement l'identité remarquable.

□

ex : Soit $z = \dfrac{2 + 3i}{1 + 2i}$, cherchons à faire disparaître le i du dénominateur afin d'en déduire l'expression algébrique de z :

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{1+2i} &= \frac{(2+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} \\ &= \frac{2-4i+3i-6i^2}{1^2+2^2} \\ &= \frac{2-i+6}{1+4} \\ &= \frac{8-i}{5} \\ &= \frac{8}{5} - \frac{1}{5}i\end{aligned}$$

Proposition 5 : Le conjugué interagit très facilement avec les opérations usuelles, en effet si on considère $z,\ z' \in \mathbb{C}$, on a :

1. $\overline{-z} = -\overline{z}$
2. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
3. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ \overline{z^n} = \overline{z}^n$
5. Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
6. Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

∘ Démonstration : Soient a, b, a' et b' tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

1. $\overline{-z} = \overline{-a - ib} = -a + ib = -(a - ib) = -\overline{z}$
2. $\overline{a + ib + a' + ib'} = \overline{(a + a') + i(b + b')} = (a + a') - i(b + b') = a - ib + a' - ib' = \overline{z} + \overline{z'}$
3. $$\begin{aligned}\overline{z \times z'} &= \overline{(a + ib)(a' + ib')} \\ &= \overline{aa' + iab' + ia'b - bb'} \\ &= \overline{aa' - bb' + i(ab' + a'b)} \\ &= aa' - bb' - i(ab' + a'b) \\ &= aa' - iab' - ia'b + i^2bb' \\ &= (a - ib)(a' - ib') \\ &= \overline{z} \times \overline{z'}\end{aligned}$$
4. On procède par récurrence :
   Initialisation : $z^0 = 1$, donc $\overline{z^0} = \overline{z}^0$.
   Hérédité : Soit $N \in \mathbb{N}$, supposons que $\overline{z^N} = \overline{z}^N$. On a alors :
   $$\overline{z^{N+1}} = \overline{z^N \times z} = \overline{z^N} \times \overline{z} = \overline{z}^N \times \overline{z} = \overline{z}^{N+1}$$
   Conclusion : La formule est donc bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Si $z \neq 0$, alors :
   $$z \times \frac{1}{z} = 1 \text{ donc : } \overline{z} \times \overline{\frac{1}{z}} = \overline{z \times \frac{1}{z}} = \overline{1} = 1$$
   et on en déduit la relation.
6. Découle du fait que : $\dfrac{z'}{z} = z' \times \dfrac{1}{z}$ et des propriétés précédentes.

□

2.3.2 Résolution d'équation du second degré

Proposition 6 : On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$, et Δ le discriminant du trinôme correspondant.

On a alors 3 cas de figure :

Si $\Delta < 0$:	Si $\Delta = 0$:	Si $\Delta > 0$:
Deux solutions complexes conjuguées :	Une solution réelle :	Deux solutions réelles distinctes :
$z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$z_0 = -\dfrac{b}{2a}$	$z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

∘ Démonstration : Reprendre la démonstration étudiée en première, à ceci près qu'il est maintenant possible de trouver un nombre au carré qui donne un négatif, d'où l'existence de $\sqrt{\Delta}$ quel que soit le cas.

□

ex : Considérons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - 4z + 5 = 0$$

On a ici $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 < 0$. *On est donc dans le cas de deux solutions complexes, avec :*

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-(-4) - i\sqrt{4}}{2 \times 1} \\ &= \frac{4 - 2i}{2} \\ &= 2 - i \end{aligned}$$

z_2 *étant le conjugué de* z_1, *on en déduit que* $z_2 = 2 + i$.

Définition : Soient n un entier naturel et a_0, a_1,... et a_n des réels tels que $a_n \neq 0$.

On appelle **fonction polynôme de degré n à coefficients réels** la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

L'équation $P(z) = 0$ est par ailleurs appelée **équation polynomiale de degré n**.

ex : On considère la fonction P *définie pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *par :*

$$P(z) = 5z^6 - 7z^4 + \frac{z^2}{2} - z + 1$$

Cette fonction est une fonction polynomiale de degré 6.

Proposition 7 :

Soient z et a deux nombres complexes. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z^n - a^n = (z - a) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^k$$

∘ Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} (z-a) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^k &= \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} a^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^{k+1} \\ &= z^n a^0 + \sum_{k=1}^{n-1} z^{n-k} a^k - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} z^{n-1-k} a^{k+1}}_{\text{on pose k'=k+1}} - z^0 a^n \\ &= z^n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} z^{n-k} a^k - \sum_{k'=1}^{n-1} z^{n-k'} a^{k'}}_{\text{les sommes sont les mêmes}} - a^n \\ &= z^n - a^n \end{aligned}$$

□

ex : Une conséquence très utile de cette proposition est que pour tout $z \in \mathbb{C}$ *:*

$$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1)$$

On reconnaît en fait la somme géométrique...

Proposition 8 - Factorisation d'un polynôme :

Soit P une fonction polynôme de degré n, et $a \in \mathbb{C}$ une racine de P telle que $P(a) = 0$. Alors il existe une fonction polynôme Q de degré $n - 1$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z - a)Q(z)$$

◦ Démonstration : Soient c_0, c_1,... et c_n des réels tels que $c_n \neq 0$ et :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$$

On a alors pour tout complexe z :

$$\begin{aligned} P(z) = P(z) - P(a) &= \sum_{k=0}^{n} c_k z^k - \sum_{k=0}^{n} c_k a^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} c_k (z^k - a^k) \text{ or } z^0 - a^0 = 0 \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k (z^k - a^k) \end{aligned}$$

On peut alors appliquer la proposition 7 à chaque terme de la somme ayant en facteur un $(z^k - a^k)$, faisant émerger un facteur commun en $(z - a)$, d'où la proposition 8.

□

ex : On utilise souvent cette proposition pour résoudre des équations polynomiales de degré 3 dont on connaît une solution évidente, considérons par exemple :

$$z^3 - 4z^2 + 2z + 1 = 0$$

Cette équation admet comme solution évidente la valeur 1, on en déduit alors qu'il existe a, b et c trois réels tels que :

$$z^3 - 4z^2 + 2z + 1 = (z - 1)(az^2 + bz + c)$$

On développe alors le second terme pour en déduire la valeur de a, b et c :

$$\begin{aligned} (z - 1)(az^2 + bz + c) &= az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c \\ &= az^3 + (b - a)z^2 + (c - b)z - c \end{aligned}$$

Avec le coefficient constant et le coefficient de z^3, on trouve immédiatement que $a = 1$ et $c = -1$, on en déduit donc que $b - 1 = -4$, d'où $b = -3$. Ainsi :

$$z^3 - 4z^2 + 2z + 1 = (z - 1)(z^2 - 3z - 1)$$

Enfin on résout le trinôme apparu pour trouver la ou les solutions manquantes.