Chapitre 3

Matrices

3.1 Introduction historique

Le Possible est une matrice formidable.

Victor Hugo - *Les Travailleurs de la mer* (1866), II^{e} partie, livre IV, chap. 2

3.1.1 Tableau et système

Lorsque le lycéen apprend à résoudre un système d'équations qui concerne l'intersection de deux droites, il apprend à vérifier auparavant que les deux droites sont sécantes, en calculant le déterminant des vecteurs directeurs de ces droites. Le calcul du déterminant, développé par **Gabriel Cramer** en 1750 et dont la formule $ab' - a'b$ est souvent utilisée par les mathématiciens de cette époque, aura mené peu à peu ces derniers à le noter sous cette forme dès 1826 :

$$\begin{matrix} a & a' \\ b & b' \end{matrix}$$

Augustin Cauchy (1789-1857) nommera cette notation **tableau**, et s'intéressera aux différentes propriétés d'un tableau de n lignes sur n colonnes, et leur lien avec les systèmes d'équations.

3.1.2 La matrice qui se cache derrière le vecteur

Après l'invention des nombres imaginaires et les travaux de Gauss, un mathématicien irlandais nommé **William Rowan Hamilton** (1805-1865), commence à s'intéresser au concept encore peu défini se cachant derrière un point de coordonnées (a, b) et un nombre complexe $z = a + ib$. Le même objet semble décrit par ces deux concepts, et c'est ainsi que la notion mathématique de **vecteur** est pour la première fois évoquée.

En s'appuyant sur cette nouvelle notion et les tableaux évoqués auparavant, le mathématicien **Arthur Cayley** (1821-1895) généralise la notion de déterminant et développe la théorie des **matrices**. L'idée d'un tableau de nombres, pas forcément carré, mais qui peut ne contenir qu'une seule colonne, semble évoquer une sorte d'analogie entre les matrices et les vecteurs. Le calcul vectoriel devient ainsi un cas particulier d'une théorie plus profonde et plus fertile, celle du **calcul matriciel**.

$$\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & c' \\ d & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & a'+c' \\ b+d & b'+d' \end{pmatrix}$$

II. *A Memoir on the Theory of Matrices.* *By* Arthur Cayley, *Esq.*, *F.R.S.*

Received December 10, 1857,—Read January 14, 1858.

The term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices, and the term matrix used without qualification is to be understood as meaning a square matrix; in this restricted sense, a set of quantities arranged in the form of a square, *e. g.*

$$\begin{pmatrix} a\ ,\ b\ ,\ c \\ a'\ ,\ b'\ ,\ c' \\ a''\ ,\ b''\ ,\ c'' \end{pmatrix}$$

3.2 Vocabulaire

Définition : Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

• On appelle **matrice** A de dimension $n \times p$ une liste de valeurs ordonnées dans un tableau constitué de n lignes et de p colonnes. On dit que cette matrice est à valeurs dans $\mathbb{R}$ lorsqu'il existe np réels a_{ij} (où $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;p]\!]$) tels que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On notera alors $A = (a_{ij})$ où a_{ij} est le coefficient placé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

• L'**ensemble des matrices réelles de dimension** $n \times p$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

ex : On considère la matrice réelle 2×3 *notée* A *telle que :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Ici, on a par exemple $a_{12} = 0$.

Définition : Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

• On appelle **matrice ligne** toute matrice de dimension $1 \times p$.

$$ex : \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad ici\ de\ dimension\ 1 \times 3$$

• On appelle **matrice colonne** toute matrice de dimension $n \times 1$.

$$ex : \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad ici\ de\ dimension\ 3 \times 1$$

Une matrice colonne peut ainsi représenter les coordonnées d'un vecteur.

• On appelle **matrice carrée** toute matrice de dimension $n \times n$.

$$ex : \quad \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad ici\ de\ dimension\ 2 \times 2$$

L'**ensemble des matrices carrées réelles de dimension** n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Une matrice carrée est dite **symétrique** lorsque pour tout $i, j \in [\![1;n]\!]$, $a_{ij} = a_{ji}$.

$$ex : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Visuellement, on a une sorte d'axe de symétrie le long de la diagonale de a_{11} à a_{nn}.

• On appelle **matrice diagonale** toute matrice carrée dont les valeurs sont nulles hormis celles sur la diagonale. Autrement dit pour tout $i, j \in [\![1;n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

$$ex : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

• On appelle **matrice identité de dimension** n la matrice diagonale de dimension n telle que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $a_{ii} = 1$. On la note I_n.

$$ex : \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3 Opérations

Définition : Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

• Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même dimension $n \times p$. On appelle alors **matrice somme** de A et B la matrice $C = (c_{ij})$ où pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ et $j \in [\![1; p]\!]$:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

On note cette matrice $A + B$.

• On appelle **multiplication d'une matrice par un réel** l'opération qui à k un réel quelconque et $A = (a_{ij})$ une matrice de dimension $n \times p$ associe la matrice $D = (d_{ij})$ où pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ et $j \in [\![1; p]\!]$:

$$d_{ij} = k \times a_{ij}$$

On note cette matrice kA.

ex :

• $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+(-1) & -3+2 \\ 0+1 & 4+2 & 1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

• $2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 3 & 2 \times (-4) \\ 2 \times 0 & 2 \times 2 & 2 \times 1 \\ 2 \times (-5) & 2 \times 3 & 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 0 & 4 & 2 \\ -10 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Proposition 1 :

Soient A, B et C trois matrices de même dimension et α, β deux réels quelconques. On a alors :

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

◦ Démonstration : Découle des propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$.

□

Définition : Soit n, p et q trois entiers naturels non nuls.

• Soient $A = (a_{ij})$ matrice de dimension $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ matrice de dimension $p \times q$. On appelle alors **matrice produit** de A et B la matrice $C = (c_{ij})$ de dimension $n \times q$ où pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ et $j \in [\![1; q]\!]$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

On note cette matrice AB.

Chaque c_{ij} est en fait le résultat du produit scalaire entre le vecteur formé par la i-ème ligne de la matrice A et celui formé par la j-ème colonne de la matrice B.

ex : Le produit d'une matrice 2×3 par une matrice 3×2 va donner une matrice 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 2 \times 1 + (-3) \times 3 & 1 \times 5 + 2 \times 2 + (-3) \times 1 \\ 0 \times 0 + 4 \times 1 + 1 \times 3 & 0 \times 5 + 4 \times 2 + 1 \times 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Au brouillon, il sera souvent pratique de positionner les matrices de façon à visualiser quelle ligne est en produit avec quelle colonne :

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

Proposition 2 :

Soient A, B et C trois matrices de dimensions adéquates, et λ un réel quelconque.
On a alors :

- $A(BC) = (AB)C = ABC$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$
- Si A est carrée de dimension n, $I_n A = AI_n = A$.
- **Attention :** En général, $AB \neq BA$: le produit matriciel n'est pas commutatif.

◦ Démonstration : Triviale mais fastidieuse à rédiger, il suffit d'appliquer les définitions.
Par exemple le deuxième point :

$$\begin{aligned} A(B+C) &= (a_{ij})((b_{ij}) + (c_{ij})) \\ &= (a_{ij})(b_{ij} + c_{ij}) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})\right) \qquad \text{on pose } p \text{ la dimension commune} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right) + \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj}\right) \\ &= (a_{ij})(b_{ij}) + (a_{ij})(c_{ij}) \\ &= AB + AC \end{aligned}$$

On illustre tout de même le dernier point par un contre-exemple à la généralisation de $AB = BA$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{or :} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

□

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle **puissance k-ième de la matrice A**, notée A^k la matrice :

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$$

On a par convention $A^0 = I_n$.

Proposition 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et D une matrice diagonale telle que :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{où les } \lambda_i \text{ sont des réels}$$

On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

◦ Démonstration : On le montre par récurrence sur k. □

3.4 Inversion de matrice

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit de A qu'elle est **inversible** si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

On dira alors que B est la **matrice inverse** de A, notée A^{-1}.

ex : On considère $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. *On constate alors que :*

$$AB = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\text{et : } BA = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

On en déduit donc que $B = A^{-1}$.

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont quatre réels.

On appelle **déterminant de** A le nombre réel noté :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ex : On considère $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. *On a alors :*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 4 \times 1 - 3 \times 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Proposition 4 :

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont quatre réels.

Alors :

$$A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0$$

Et :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

∘ Démonstration :

— Supposons que A est inversible. Alors on sait qu'il existe $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ où x, y, z et t sont quatre réels tels que :

$$AB = BA = I_2$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par identification, la première colonne nous donne le système :

$$\begin{cases} ax + bz = 1 & (e_1) \\ cx + dz = 0 & (e_2) \end{cases}$$

En appliquant la combinaison linéaire $d \times (e_1) - b \times (e_2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} (adx + bdz) - (bcx + bdz) &= d \times 1 - b \times 0 \\ \Rightarrow \quad (ad - bc)x &= d \end{aligned}$$

De la même manière, la combinaison $a \times (e_2) - c \times (e_1)$, puis les combinaisons analogues sur la seconde colonne, donnent :

$$(ad-bc)z = -c \quad ; \quad (ad-bc)y = -b \quad ; \quad (ad-bc)t = a$$

Si l'on avait $\det(A) = ad - bc = 0$, ces quatre égalités donneraient $a = b = c = d = 0$, donc $A = 0$ et $AB = 0 \neq I_2$, ce qui est absurde. Ainsi $\det(A) \neq 0$, et :

$$x = \frac{d}{\det(A)} \quad ; \quad y = \frac{-b}{\det(A)} \quad ; \quad z = \frac{-c}{\det(A)} \quad ; \quad t = \frac{a}{\det(A)}$$

D'où l'expression de B.

— Réciproquement, supposons que $\det(A) \neq 0$.
On pose alors B comme étant la matrice donnée dans la proposition, et on vérifie que $AB = BA = I_2$ par le calcul, ce qui prouve que A est inversible.

□