Chapitre 5

Géométrie complexe

5.1 Introduction historique

Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous.

Pierre-Simon de Laplace - 1749-1827, propos rapporté par Guglielmo Libri (vers 1846)

En 1797, le Norvégien **Caspar Wessel** (1745-1818), géomètre installé au Danemark, présente à l'Académie royale danoise une représentation géométrique des nombres complexes, publiée en 1799. Son idée est simple : si les nombres réels emplissent l'entièreté d'une droite graduée, pourquoi ne pas représenter les nombres complexes en dehors de la droite, dans le plan ? Dans sa présentation moderne, cela donne un axe pour la partie réelle et un autre pour la partie imaginaire : la géométrie complexe est née.

5.1.1 Polaire ou cartésien

En complément au travail de Wessel, et sans même en avoir connaissance, le mathématicien suisse **Jean Robert Argand** (1768-1822) publie en 1806 un ouvrage proposant une idée similaire : un nombre complexe y est représenté par un segment orienté issu de l'origine, repéré par sa longueur, qu'Argand appelle déjà le « module » r, et par sa direction, l'angle θ que l'on nomme aujourd'hui « argument », ce qui permet d'écrire une singulière égalité :

$$a + ib = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

On parle de coordonnées **cartésiennes** pour le couple $(a; b)$, et de coordonnées **polaires** pour le couple $(r; \theta)$, puisqu'elles partent du pôle origine. Ces deux représentations fondent la géométrie complexe et apportent un puissant lien entre géométrie et calcul, en effet en géométrie complexe : **un point est un nombre**.

5.1.2 La plus belle égalité

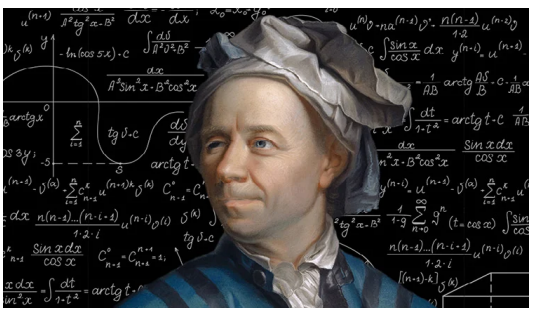
Un demi-siècle plus tôt, en s'appuyant sur les progrès gigantesques de l'analyse, notamment en ce qui concerne les séries entières et la fonction exponentielle, le mathématicien **Leonhard Euler** (1707-1783) fait le lien entre exponentielle et trigonométrie, et publie en 1748 une formule proposant une troisième expression de la géométrie complexe, une forme exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

En s'appuyant sur cette formule, on retrouve par ailleurs l'**identité d'Euler**, que nombreux mathématiciens appellent *la plus belle égalité mathématique* :

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Euler fut par ailleurs le père de nombreuses notations utilisées aujourd'hui, $f(x)$, Σ, e pour exponentielle, aussi appelé nombre d'Euler...



5.2 Représentation complexe

Définition : Soit un repère du plan $(O;\vec{u},\vec{v})$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = a + ib$ où a et b sont deux réels, respectivement partie réelle et partie imaginaire de z.

- On peut alors faire correspondre à z un unique point du plan $M(a;b)$, et on appelle z l'**affixe** du point M, ce que l'on note $M(z)$.
- On appelle **module de z**, noté $|z|$ la valeur de :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

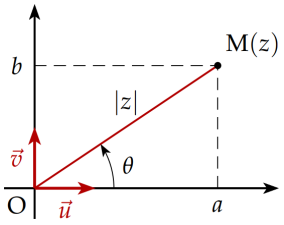
Le module de z correspond en fait à la distance OM.

- Si $z \neq 0$, on appelle **argument de z**, noté $\arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté entre le vecteur $\vec{u}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$, autrement dit :

$$\arg(z) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \ [2\pi]$$

On a alors quand $z \neq 0$:

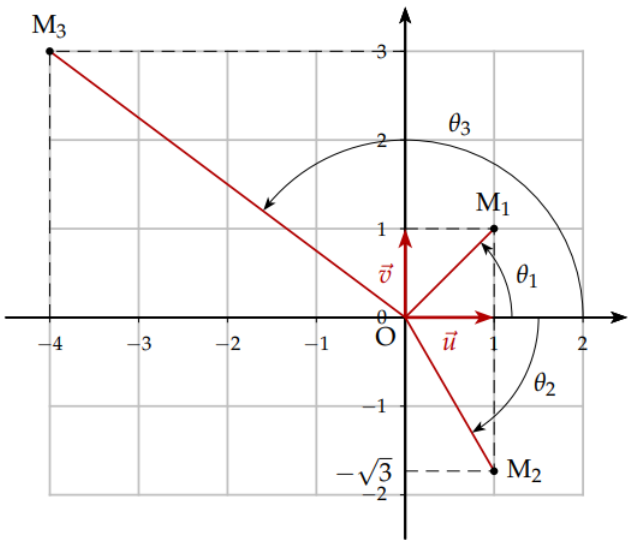
En notant $\theta = \arg(z)$, $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$



ex : *On peut représenter ainsi que déterminer le module et l'argument des complexes suivants :*

$$z_1 = 1 + i \quad , \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3} \quad , \quad z_3 = -4 + 3i$$

En considérant les points M_1, M_2 et M_3 correspondant respectivement à z_1, z_2 et z_3, on a :



$$OM_1 = |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad et \quad \begin{cases} \cos(\theta_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 \equiv \frac{\pi}{4} \ [2\pi]$$

$$OM_2 = |z_2| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \quad et \quad \begin{cases} \cos(\theta_2) = \dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta_2) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 \equiv -\frac{\pi}{3} \ [2\pi]$$

$$OM_3 = |z_3| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5 \quad et \quad \begin{cases} \cos(\theta_3) = -\dfrac{4}{5} \\ \sin(\theta_3) = \dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \theta_3 \equiv \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) \approx 2{,}50 \ [2\pi]$$

5.3 Forme trigonométrique

Définition : Soit z un nombre complexe non nul, de module r et d'argument θ.
On appelle alors **forme trigonométrique** de z l'écriture :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

On appelle **coordonnées polaires** du point $M(z)$ correspondant le couple de nombres (r, θ).

ex : On considère le nombre complexe d'expression algébrique :

$$z_1 = 1 - i$$

On a ici :

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \qquad et \qquad \begin{cases} \cos(\theta_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta_1) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

D'où la forme trigonométrique de z_1 :

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Réciproquement, si on considère le complexe de forme trigonométrique :

$$z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

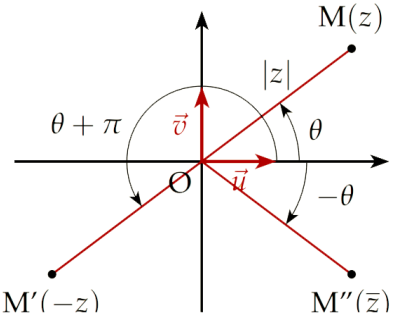
On peut en déduire la forme algébrique après calcul :

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Proposition 1 :

Soit z un nombre complexe non nul.
On a alors :

- $|-z| = |z|$ et $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$
- $|\overline{z}| = |z|$ et $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$



○ Démonstration : On pose $z = a + ib$ où a, b sont deux réels.

- $|-z| = |-a - ib| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$
  De plus, si on note $\theta = \arg(z)$, on a :

$$\begin{aligned} -z &= -|z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\ &= |z|(-\cos(\theta) + i \times (-\sin(\theta))) \\ &= |z|(\cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)) \end{aligned}$$

  D'où $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$.
- De même, on trouve rapidement que $|\overline{z}| = |z|$, et :

$$\begin{aligned} \overline{z} &= \overline{|z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))} \\ &= |z|(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) \\ &= |z|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \end{aligned}$$

  D'où $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

□

Proposition 2 : Formules d'addition
Soient a et b deux réels quelconques. On a alors :

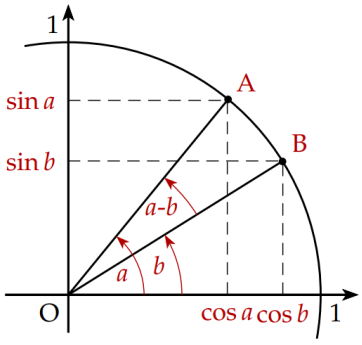
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

∘ Démonstration : On commence par montrer la deuxième formule : on considère les points A et B sur le cercle unité, correspondant respectivement aux angles a et b.

On calcule alors le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ de deux façons :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} &= OA \times OB \times \cos(a-b)\\ &= \cos(a-b)\end{aligned}$$

$$\text{et : } \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}\cos(a)\\ \sin(a)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(b)\\ \sin(b)\end{pmatrix}$$
$$= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$



D'où l'égalité attendue.
Pour montrer la première formule, on remplace b par $-b$:

$$\begin{aligned}\cos(a-(-b)) &= \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b)\\ &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\end{aligned}$$

Pour montrer la troisième formule, on rappelle que pour tout angle $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos(\alpha)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \cos(\frac{\pi}{2}-(a+b))\\ &= \cos(\frac{\pi}{2}-a-b)\\ &= \cos(\frac{\pi}{2}-a)\cos(b) + \sin(\frac{\pi}{2}-a)\sin(b)\\ &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\end{aligned}$$

Et on trouve la quatrième formule à partir de la troisième en remplaçant b par $-b$ comme précédemment.

□

Proposition 3 : Formules de duplication
Soit a un réel quelconque. On a alors :

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$

∘ Démonstration : Découle directement de la proposition 2 appliquée à $a = b$, ainsi que de la relation :

$$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$$

□

Proposition 4 :
Soient z et z' deux complexes non nuls, et $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$|zz'| = |z| \times |z'| \qquad \text{et} \qquad \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$$
$$|z^n| = |z|^n \qquad \text{et} \qquad \arg(z^n) \equiv n \times \arg(z)\ [2\pi]$$
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$$

◦ Démonstration :

- Soient r, r', θ et θ' tels que :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \qquad \text{et} \qquad z' = r'(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$$

On constate alors que :

$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \times r'(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) \\ &= rr'(\underbrace{\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')}_{=\cos(\theta+\theta')} + i(\underbrace{\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')}_{=\sin(\theta+\theta')}) \\ &= rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')) \end{aligned}$$

On en déduit par identification que $|zz'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.

- On prouve le second résultat par récurrence sur n en utilisant le premier.
- On pose $Z = \dfrac{z}{z'}$, et on constate que $z = Zz'$. En appliquant le premier résultat à Zz', on trouve rapidement le résultat attendu.

□

5.4 Forme exponentielle

5.4.1 Introduction intuitive

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

En admettant que f soit dérivable (comme fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$), on constate alors que :

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad f'(\theta) &= -\sin(\theta) + i\cos(\theta) \\ &= i^2\sin(\theta) + i\cos(\theta) \\ &= i(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\ &= if(\theta) \\ \text{Et de plus} \quad f(0) &= \cos(0) + i\sin(0) = 1 \end{aligned}$$

f est alors solution d'une équation différentielle de premier ordre, dont l'unique solution coïncide précisément avec la fonction exponentielle : $x \mapsto e^{ix}$. La preuve de cette solution relevant de l'enseignement supérieur, on admettra alors la **formule d'Euler** :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

5.4.2 Forme et formules

Définition : Soit z un nombre complexe non nul, de module r et d'argument θ.
On appelle alors **forme exponentielle** de z l'écriture :

$$z = re^{i\theta}$$

ex : On considère le nombre complexe d'expression algébrique :

$$z = 1 + i\sqrt{3}$$

On a alors $|z| = 2$ *et* $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, *d'où*

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Proposition 5 :
Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

- **Identité d'Euler :** $e^{i\pi} + 1 = 0$
- **Formule de Moivre :** $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$
- **Formules d'Euler :** $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

◦ Démonstration :

• On applique la formule d'Euler :

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= \cos(\pi) + i\sin(\pi) \\ &= -1 + i \times 0 \\ \text{d'où :} \qquad e^{i\pi} + 1 &= 0 \end{aligned}$$

• Découle de la forme exponentielle :

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) &= e^{in\theta} \\ &= (e^{i\theta})^n \\ &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n \end{aligned}$$

• On applique la formule d'Euler à $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ puis on obtient le résultat par somme et par différence.