Chapitre 6

Applications des matrices

6.1 Résolution de systèmes

Proposition 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (S) le système linéaire à n inconnues x_i et n équations suivant :

$$(S) \ : \ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

où les a_{ij} et b_i sont des réels. On pose alors :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{et :} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

L'écriture matricielle du système est donc $AX = B$, et si A est inversible, le système admet une unique solution :

$$X = A^{-1}B$$

∘ Démonstration : Supposons A inversible. Si X est une solution, alors $AX = B$, et en multipliant à gauche par A^{-1} on obtient $A^{-1}AX = A^{-1}B$, c'est-à-dire $X = A^{-1}B$: il y a donc au plus une solution. Réciproquement, $A\left(A^{-1}B\right) = \left(AA^{-1}\right)B = B$, donc $A^{-1}B$ est bien solution. Le système admet donc une unique solution, $X = A^{-1}B$. □

ex : On peut utiliser ce résultat pour résoudre des systèmes très rapidement. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x - 4y = 13 \end{cases}$$

Ici on a :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\det(A) = 2 \times (-4) - 5 \times (-3) = 7 \neq 0$*, donc A est inversible et le système admet une unique solution :*

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4+39 \\ -5+26 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 35 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

L'unique solution du système est donc $(5; 3)$.

6.2 Transformations du plan

Définition :

On appelle **transformation géométrique** une application qui à tout point M du plan fait correspondre un unique point M' du plan, appelé image de M.

- On appelle **translation du plan** de vecteur $\overrightarrow{t}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ la transformation géométrique qui à tout point $M(x,y)$ fait correspondre un point $M'(x',y')$ tel que :

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Pour les transformations géométriques suivantes, on appelle **matrice de transformation** la matrice $T = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ qui à tout point $M(x,y)$ fait correspondre $M'(x',y')$ tel que :

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = T \times \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

T est une matrice inversible, et on a :

- Si la transformation est une **symétrie axiale d'axe des abscisses**, $T = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$
- Si la transformation est une **symétrie axiale d'axe des ordonnées**, $T = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$
- Si la transformation est une **homothétie de centre O et de rapport** $k \in \mathbb{R}^*$,

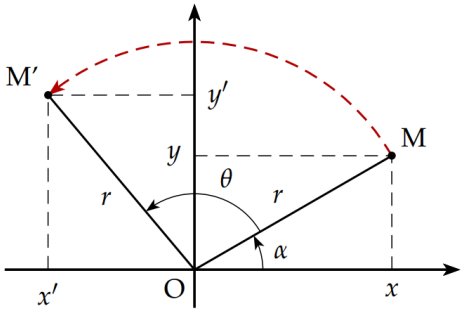
$$T = \begin{pmatrix}k & 0\\0 & k\end{pmatrix}$$

- Si la transformation est une **rotation de centre O et d'angle** $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

∘ Démonstration : Pour la matrice rotation de centre O et d'angle θ, transformant le point $M(x,y)$ en $M'(x',y')$. Si $M = O$, alors $M' = O$ et la formule est vraie. Sinon, on pose $OM = OM' = r$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) = \alpha$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$, de sorte que $x = r\cos(\alpha)$, $y = r\sin(\alpha)$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha + \theta$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}r\cos(\alpha+\theta)\\r\sin(\alpha+\theta)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\overbrace{r\cos(\alpha)}^{x}\cos(\theta) - \overbrace{r\sin(\alpha)}^{y}\sin(\theta)\\\underbrace{r\sin(\alpha)}_{y}\cos(\theta) + \underbrace{r\cos(\alpha)}_{x}\sin(\theta)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}x\cos(\theta) - y\sin(\theta)\\x\sin(\theta) + y\cos(\theta)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{aligned}$$



ex : La matrice associée à la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ est :

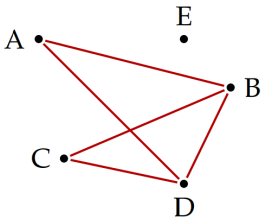
$$T = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

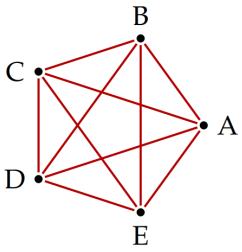
6.3 Graphes

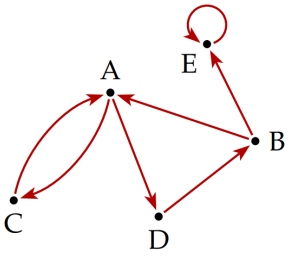
Définition :

- On appelle **graphe d'ordre** n un ensemble de n points, appelés **sommets**, reliés entre eux par des liens.
- Dans un graphe **non orienté**, les liens reliant deux sommets se schématisent par un trait, appelé **arête**, et dans un **graphe orienté** par une flèche, appelée **arc**. Un arc qui relie un sommet à lui-même est appelé **boucle**.
- Deux sommets sont dits **adjacents** s'ils sont reliés par une arête ou un arc.
- Un sommet est dit **isolé** si aucune arête ou arc ne le relie aux autres sommets.
- Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes ou d'arcs dont ce sommet est une extrémité (une boucle comptant pour 2).
- Un graphe est dit **complet** si ses sommets sont deux à deux adjacents.

ex :







	Graphe 1 d'ordre 5 non orienté	Graphe 2 d'ordre 5 non orienté Graphe complet Sommets de degré 4	Graphe 3 d'ordre 5 orienté
Nature			
Degré des sommets			

A	B	C	D	E
2	3	2	3	0

A	B	C	D	E
4	3	2	2	3

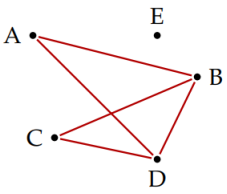
Définition :

- On appelle **chaîne** une liste de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant. Le nombre d'arêtes parcourues est la **longueur** de la chaîne.
- Un graphe est dit **connexe** s'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.
- Une chaîne est dite **fermée** si l'origine et l'extrémité sont confondues.
- Une chaîne fermée composée d'arêtes toutes distinctes forme un **cycle**.
- Dans un graphe orienté, on parle de **chemin** pour une chaîne et de **circuit** pour un cycle.

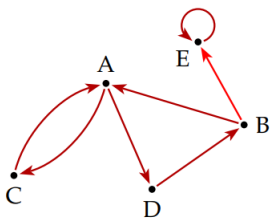
ex : Dans l'exemple précédent :

- Graphe 1 : $A-B-D-C-B$ chaîne de longueur 4 ; $D-A-B-C-D$ cycle de longueur 4
- Graphe 3 : $A-D-B-E$ chemin de longueur 3 ; $B-A-C-A-D-B$ circuit de longueur 5

Définition : À tout graphe G d'ordre n, dont les sommets sont numérotés de 1 à n, on associe une matrice $M=(m_{ij})$ telle que m_{ij} est le nombre d'arcs ou d'arêtes reliant le sommet i au sommet j.
Cette matrice est appelée **matrice d'adjacence** du graphe G.



$$\mathbf{M_1}=\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{array}$$



$$\mathbf{M_2}=\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{array}$$

Proposition 2 :
Soit G un graphe d'ordre n et $M = (m_{ij})$ sa matrice d'adjacence. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, si on note $M^p = (m_{ij}^p)$, alors :

m_{ij}^p est le nombre de chemins (de chaînes si G est non orienté) de longueur p reliant le sommet i au sommet j

∘ Démonstration : On procède par récurrence sur p :

— **Initialisation :** Par définition de la matrice d'adjacence, m_{ij}^1 est bien le nombre de chemins de longueur 1 reliant le sommet i au sommet j, car un chemin de longueur 1 est un arc ou une arête.

— **Hérédité :** Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que $M^p = (m_{ij}^p)$ soit telle que m_{ij}^p corresponde au nombre de chemins de longueur p reliant le sommet i à j. On constate alors que :

$$\begin{aligned} M^{p+1} &= M \cdot M^p \\ &= (m_{ij}) \cdot (m_{ij}^p) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} m_{ik} m_{kj}^p \right) \qquad \text{par produit matriciel} \end{aligned}$$

Or :

- m_{ik} est le nombre de chemins de longueur 1 reliant i à k
- m_{kj}^p est le nombre de chemins de longueur p reliant k à j.

Chaque chemin de longueur 1 reliant i à k donnant donc m_{kj}^p chemins de longueur $p+1$ reliant i à j et passant par k, on en déduit que $m_{ik}m_{kj}^p$ désigne précisément le nombre de chemins de longueur $p+1$ reliant i à j et passant par k, donc par somme, ce qui considère tous les sommets k :

$\sum_{k=1}^{n} m_{ik} m_{kj}^p$ désigne précisément le nombre de chemins de longueur $p+1$ reliant i à j

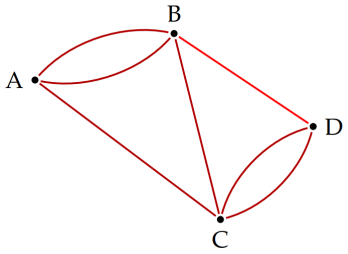
Ce qui prouve notre hérédité.

— **Conclusion :** La proposition est donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

□

ex :

Les arêtes du graphe ci-contre représentent des pistes de ski de fond mesurant chacune 2 km. Les sommets de ce graphe sont les différents points d'accès à ce domaine skiable.



De ce graphe on déduit la matrice d'adjacence $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *et par calcul :*

$$M^2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 14 & 5 \\ 16 & 8 & 11 & 14 \\ 14 & 11 & 8 & 16 \\ 5 & 14 & 16 & 4 \end{pmatrix}$$

On peut déduire de ces résultats que :

- *Il existe 4 parcours de 4 km entre B et C, car 4 km correspondent à 2 pistes donc on s'intéresse à la matrice M^2.*
- *Il existe 5 parcours différents de 6 km reliant A à D, d'après la matrice M^3, car 6 km correspondent à 3 pistes.*