Chapitre 8

Configurations géométriques

8.1 Cercle unité

Définition :
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1. Ainsi :

$$z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Proposition 1 :

- L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par produit et passage à l'inverse :

$$\forall z, z' \in \mathbb{U}, \qquad zz' \in \mathbb{U} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{z} \in \mathbb{U}$$

∘ Démonstration : Soient θ et θ' tels que $z = e^{i\theta}$ et $z' = e^{i\theta'}$. On a alors :

- $zz' = e^{i(\theta+\theta')} \in \mathbb{U}$.
- $\frac{1}{z} = e^{i(-\theta)} \in \mathbb{U}$.

□

Proposition 2 : Racines n-ièmes de l'unité
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On appelle **racines n-ièmes de l'unité** les solutions de l'équation $z^n = 1$.
- On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, et :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \ | k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

- Si $n \geqslant 2$, leur somme est nulle :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^0 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + \cdots + e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}} = 0$$

- Si $n \geqslant 3$, leurs images M_k dans le plan complexe sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle unité.

∘ Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque que :

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = 1 \\ \arg(z^n) \equiv 0\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = 1 \\ n \times \arg(z) \equiv 0\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ n \times \arg(z) = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \in \mathbb{U} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \arg(z) = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

Enfin, si $k = nq+r$ est la division euclidienne de k par n, on a $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i2q\pi}e^{i\frac{2r\pi}{n}} = e^{i\frac{2r\pi}{n}}$ avec $r \in [\![0, n-1]\!]$, et les n nombres $e^{i\frac{2r\pi}{n}}$, $0 \leqslant r \leqslant n-1$, sont distincts car leurs arguments $\frac{2r\pi}{n}$ appartiennent à $[0\,;2\pi[$. D'où $z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_n$.

- On suppose $n \geqslant 2$ et on pose $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}} \in \mathbb{U}_n$, qui est différent de 1. On remarque alors que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} z_1^k \qquad \leftarrow \text{somme géométrique} \\ &= \frac{\overbrace{z_1^n - 1}^{=0}}{z_1 - 1} = 0\end{aligned}$$

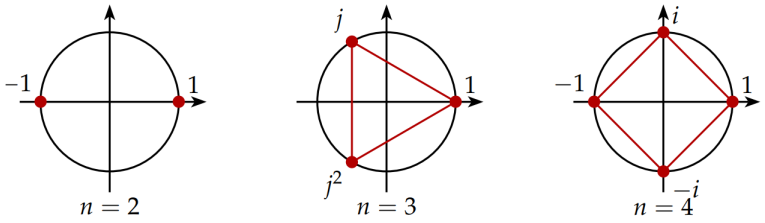
- Soient $M_k\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$ les points du cercle unité.
  On a alors $(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \dfrac{2\pi}{n}$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, en notant $M_n = M_0$. Les points M_k sont donc sur le cercle unité, régulièrement espacés, et tous les côtés $M_kM_{k+1} = \left|e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}} - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right| = \left|e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1\right|$ ont la même longueur. Pour $n \geqslant 3$, O est donc le centre d'un polygone régulier de n côtés dont les points M_k sont les sommets.

□

ex :

- $\mathbb{U}_2 = \left\{1,\ e^{i\pi}\right\} = \{1, -1\}$
- $\mathbb{U}_3 = \left\{1,\ e^{i\frac{2\pi}{3}},\ e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}$, *ainsi si on pose* $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, *on a* $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$
- $\mathbb{U}_4 = \left\{1,\ e^{i\frac{\pi}{2}},\ e^{i\pi},\ e^{i\frac{3\pi}{2}}\right\} = \{1, i, -1, -i\}$

On peut alors faire les représentations suivantes :



✠ Méthode : Résoudre $z^n = a$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a = \rho e^{i\varphi}$ un complexe non nul, avec $\rho > 0$. La même méthode que dans la démonstration précédente donne, en cherchant z sous la forme $re^{i\theta}$ avec $r > 0$:

$$z^n = a \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r^n = \rho \\ n\theta \equiv \varphi\ [2\pi] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta \equiv \dfrac{\varphi}{n}\ \left[\dfrac{2\pi}{n}\right] \end{array}\right.$$

L'équation $z^n = a$ admet donc exactement n solutions :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \qquad k \in [\![0, n-1]\!]$$

On les obtient en multipliant l'une d'entre elles par les éléments de $\mathbb{U}_n$: leurs images sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{\rho}$.

8.2 Complexes et vecteurs

8.2.1 Affixe d'un vecteur

Définition :

Soit un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, et un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels.

On appelle **affixe du vecteur** $\vec{u}$ le complexe $z_{\vec{u}} = a + ib$. C'est en fait l'affixe du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

Proposition 3 :
Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe doté d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On a alors :

- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- $AB = |z_B - z_A|$
- si $A \neq B$, $(\vec{i},\overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$

Et si on note I le milieu de $[AB]$:

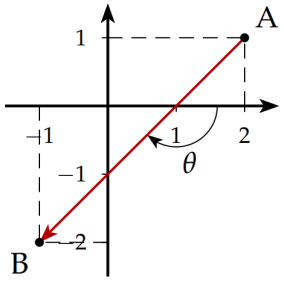
$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

◦ Démonstration : Découle des définitions de l'affixe, et des résultats portant sur les vecteurs. □

ex : On considère $A(2+i)$ et $B(-1-2i)$, on peut faire une figure, et déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, la distance AB, et l'angle $(\vec{i},\overrightarrow{AB})$:

- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1-2i-(2+i) = -3-3i$
- $AB = |z_{\overrightarrow{AB}}| = |-3-3i| = 3\sqrt{2}$
- *Si on considère $\theta = (\vec{i},\overrightarrow{AB})$, on a $\theta = \arg(-3-3i)$.*

Ainsi : $\left.\begin{array}{l}\cos(\theta) = -\dfrac{3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = -\dfrac{3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \theta \equiv -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$



Proposition 4 :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques. On a alors :

$$z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$$

◦ Démonstration : Découle de la définition de l'affixe d'un vecteur. □

Proposition 5 : Inégalité triangulaire
Soient z et z' deux complexes quelconques. On a alors toujours :

$$|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$$

◦ Démonstration :

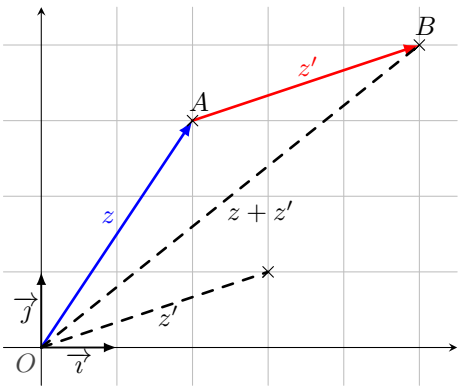
Soit un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, A et B les points tels que :

$$z = z_{\overrightarrow{OA}} \qquad \text{et} \qquad z' = z_{\overrightarrow{AB}}$$

On a alors $z + z' = z_{\overrightarrow{OB}}$.

Or dans un triangle OAB, on a nécessairement $OB \leqslant OA + AB$, d'où le résultat attendu.

□



8.2.2 Ensemble de points

Proposition 6 :
Soient $r > 0$, A et B deux points distincts du plan complexe, et $M(z)$ un point du plan. Alors :

- $|z - z_A| = r \quad \Leftrightarrow \quad M$ appartient au cercle de centre A et de rayon r
- $|z - z_A| = |z - z_B| \quad \Leftrightarrow \quad M$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$

◦ Démonstration : Découle des définitions d'un cercle et d'une médiatrice, ainsi que du fait que $AM = |z - z_A|$. □

Proposition 7 :
Soient A, B, C et D quatre points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. On a alors :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \ [2\pi]$$

◦ Démonstration : On a :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{i}) + (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{CD}) \\ &= -(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{CD}) \\ &= -\arg(z_B - z_A) + \arg(z_D - z_C) \\ &= \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \qquad [2\pi]\end{aligned}$$

□

Proposition 8 :
Soient A, B, C et D quatre points tels que $A \neq B$, $A \neq C$ et $C \neq D$. On a alors :

- A, B et C alignés $\quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
- (AB) et (CD) parallèles $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires $\Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
- (AB) et (CD) perpendiculaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ orthogonaux $\Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$

◦ Démonstration : Découle essentiellement de la proposition précédente, par exemple :

- (AB) et (CD) perpendiculaires $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} \ [\pi]$, or les seuls complexes non nuls d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π sont les imaginaires purs non nuls, dont les images sont sur l'axe des ordonnées.

□