Chapitre 9

Chaînes de Markov

9.1 Introduction historique

Les mathématiques, c'est ce qu'étudient Gauss, Tchebychev, Liapounov, Steklov et moi.

Andreï Markov (1856-1922), propos rapporté par son élève N. M. Günter

De nombreux domaines utilisent des observations en fonction du temps (ou plus rarement, d'une variable d'espace). Dans les cas les plus simples, ces observations se traduisent par une courbe bien définie. En réalité, des sciences de la Terre aux sciences humaines, les observations se présentent souvent de manière plus ou moins erratique. Ainsi, l'analyse de ces observations est donc soumise à une certaine incertitude, ce qui justifie l'utilisation des probabilités.

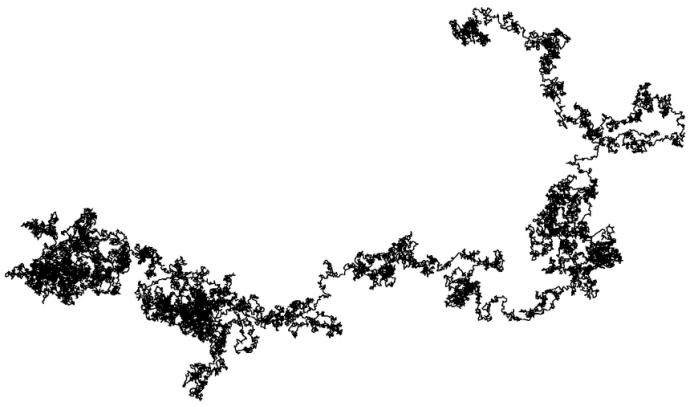
9.1.1 Processus stochastique

Une variable aléatoire s'intéresse aux différentes issues d'une expérience, mais comment la définir quand l'expérience se répète en changeant après chaque issue sa loi de probabilité ? La réponse trouvée par les mathématiciens porte le nom de **processus**, qui représente l'évolution temporelle d'une variable aléatoire. Concrètement, la variable aléatoire X devient une variable aléatoire X_n, dont l'état change à chaque étape n de son évolution temporelle. Parmi ces processus, un des plus simples va nous intéresser dans ce chapitre : le processus de Markov.

9.1.2 Faisons fi du passé

En 1906, le mathématicien **Andreï Markov** (1856-1922) publie ses premiers résultats sur un processus possédant une propriété rendant son étude plus accessible : les probabilités de passage à l'état suivant ne dépendent *que* de l'état directement précédent, et pas de l'entièreté des états qu'il a traversés. En faisant ainsi oubli de l'historique de notre processus, on peut modéliser facilement notre expérience à l'aide de matrices, dont les valeurs ne dépendent que de l'état actuel où l'on se trouve.

Les processus possédant cette propriété, dits markoviens, se sont révélés d'une portée considérable, en physique notamment : le mouvement brownien d'une particule abandonnée à elle-même dans un fluide en est un exemple, et ils interviennent dans l'étude de l'hypothèse ergodique, qui suppose que les sciences expérimentales ont vraiment un sens...



9.2 Graphe pondéré

Définition :

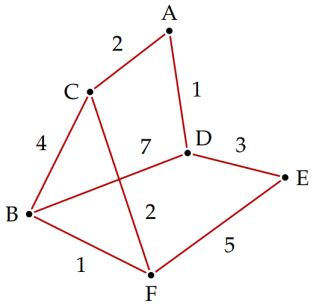
- On dit d'un graphe qu'il est **pondéré** (orienté ou non) lorsque ses arêtes sont affectées de nombres positifs, appelés **poids**.
- Le **poids d'une chaîne** est la somme des nombres affectés aux arêtes qui la composent.

ex :

Les chaînes reliant B à D :

- $B - D$ *de poids* 7
- $B - C - A - D$ *de poids* $4 + 2 + 1 = 7$
- $B - F - E - D$ *de poids* $1 + 5 + 3 = 8$
- $B - F - C - A - D$ *de poids* $1 + 2 + 2 + 1 = 6$

Cette dernière est la plus courte pour relier B à D.



9.3 Graphe probabiliste

Définition :

On appelle **graphe probabiliste** tout graphe orienté pondéré dont :

- Tout poids appartient à l'intervalle $[0; 1]$.
- La somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égale à 1.

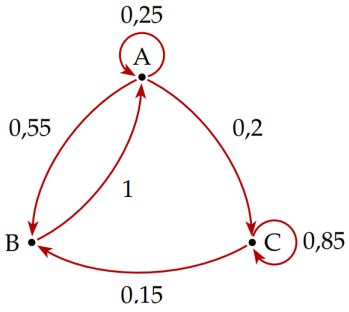
La matrice d'adjacence d'un graphe probabiliste est appelée **matrice stochastique**.

ex :

Le graphe ci-contre est un graphe probabiliste, de matrice stochastique :

$$M = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,55 & 0,2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

On remarque que la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.



9.4 Chaîne de Markov

Définition :

Soit une suite (X_n) de variables aléatoires définies sur le même univers Ω, et prenant toutes leurs valeurs dans un ensemble fini $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$, avec $N \in \mathbb{N}^*$, appelé **espace des états**.

- On dit alors que cette suite est une **chaîne de Markov** si elle respecte la propriété d'oubli suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in E,$$

$$P_{(X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n)}(X_{n+1} = x_{n+1}) = P_{(X_n=x_n)}(X_{n+1} = x_{n+1})$$

dès que l'événement $(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)$ est de probabilité non nulle. Autrement dit, la loi de probabilité de X_{n+1} ne dépend que de X_n.

- Une chaîne de Markov est dite **homogène** si pour tous i, $j \in E$, la probabilité $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$ ne dépend pas de n.

  Autrement dit, seul compte le passage de l'état i à l'état j, et pas à quel moment il intervient dans la chaîne. On note alors cette probabilité p_{ij}, et la matrice $P = (p_{ij})$ est appelée **matrice de transition** de la chaîne de Markov. C'est par définition une matrice stochastique.

ex :

- *Considérons une puce se déplaçant de sommet à sommet d'un triangle, sans jamais rester sur place, et de façon équiprobable.*
- *Si X_n désigne la position de la puce après n sauts, alors la suite (X_n) est une chaîne de Markov dont les trois états correspondent aux trois sommets du triangle, et la matrice de transition est donnée ci-contre :*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 1 : Relation de Chapman-Kolmogorov

Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène, et $P = (p_{ij})$ la matrice de transition associée. Si on note $P^n = \left(p_{ij}^{(n)}\right)$, on a alors :

$$p_{ij}^{(n)} = P_{(X_0=i)}(X_n = j)$$

Autrement dit, la probabilité de passer de l'état i à l'état j en n étapes est précisément égale au terme de i-ème ligne et j-ième colonne de la matrice P^n.

∘ Démonstration : Admise, se montre par récurrence en utilisant la propriété de Markov. □

Définition :

Soit (X_n) une chaîne de Markov d'espace des états $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle **distribution de rang n**, notée π_n, la matrice ligne à N colonnes donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n :

$$\pi_n = \begin{pmatrix} P(X_n = e_1) & P(X_n = e_2) & \cdots & P(X_n = e_N) \end{pmatrix}$$

Proposition 2 :

Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène, $P = (p_{ij})$ la matrice de transition associée et (π_n) les distributions associées. Alors :

- Les distributions vérifient la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\pi_{n+1} = \pi_n P$.
- Si on note π_0 la distribution initiale, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\pi_n = \pi_0 P^n$.

∘ Démonstration : Découle de la formule des probabilités totales. En effet, pour tout $j \in [\![1; N]\!]$:

$$P(X_n = e_j) = \sum_{i=1}^{N} P_{(X_0=e_i)}(X_n = e_j) \times P(X_0 = e_i)$$

Or, d'après la relation de Chapman-Kolmogorov, $P_{(X_0=e_i)}(X_n = e_j) = p_{ij}^{(n)}$. Le j-ème coefficient de π_n est donc $\sum_{i=1}^{N} P(X_0 = e_i)\, p_{ij}^{(n)}$, c'est-à-dire le produit de la matrice ligne π_0 par la j-ème colonne de P^n. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \pi_n = \pi_0 P^n$$

□

ex : Reprenons l'exemple précédent de la puce et son triangle. On sait que la matrice de transition P est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

En supposant que la puce démarre son itinéraire sur le premier sommet, on a donc :

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quelle est la probabilité que la puce se trouve sur le troisième sommet après 3 sauts ? On sait que $\pi_3 = \pi_0 P^3$, or à l'aide de la calculatrice, on trouve :

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,375 & 0,375 \\ 0,375 & 0,25 & 0,375 \\ 0,375 & 0,375 & 0,25 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc $\pi_3 = \begin{pmatrix}0,25 & 0,375 & 0,375\end{pmatrix}$, *d'où le fait que la probabilité que la puce se trouve sur le troisième sommet après 3 sauts est de* $0,375$.

9.5 Distribution invariante

Définition :
Soit (X_n) une chaîne de Markov de matrice de transition associée P.
On appelle alors **distribution invariante**, si elle existe, toute distribution π, c'est-à-dire toute matrice ligne à coefficients positifs de somme 1, telle que :

$$\pi = \pi P$$

On la détermine en résolvant le système $\pi(P - I_N) = 0$, auquel on ajoute la condition que la somme des coefficients de π vaut 1. On peut montrer (enseignement supérieur) qu'une chaîne de Markov ayant un nombre fini d'états admet toujours au moins une distribution invariante.

Proposition 3 : Existence de distribution invariante

Soit (X_n) une chaîne de Markov de matrice de transition associée P.

- Si P ne possède aucun coefficient nul autre que sur sa diagonale principale, alors (X_n) admet une unique distribution invariante.

∘ Démonstration : Admise, relève de l'enseignement supérieur. □

ex : Si $P = \begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\ 0,4 & 0,6\end{pmatrix}$, *alors l'unique distribution invariante est* $\pi = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

Proposition 4 : Convergence vers une distribution invariante

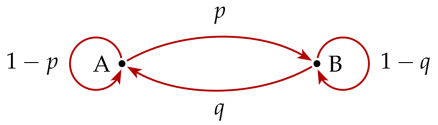
Soient une chaîne homogène de Markov (X_n) et (π_n) la suite de ses distributions.

- Si (π_n) est convergente alors (π_n) converge vers une distribution invariante π.
- Si (X_n) a exactement deux états, de matrice de transition $P = \begin{pmatrix}1-p & p\\ q & 1-q\end{pmatrix}$ avec p, $q \in]0\,;1[$, alors elle admet une unique distribution invariante $\pi = \begin{pmatrix}\frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q}\end{pmatrix}$ et, pour toute distribution initiale π_0, la suite (π_n) converge vers π.

∘ Démonstration :

- Si (π_n) converge vers une matrice ligne L, alors, chaque coefficient de $\pi_{n+1} = \pi_n P$ étant une combinaison linéaire fixe des coefficients de π_n, on obtient par passage à la limite $L = LP$. Les coefficients de L sont positifs et de somme 1 comme limites de ceux des π_n : L est donc une distribution invariante.
- Soit une chaîne de Markov à deux états A et B. On a alors le graphe et la matrice de transition suivants pour p, $q \in]0;1[$:

$$P = \begin{pmatrix}1-p & p\\ q & 1-q\end{pmatrix}$$



Cherchons une distribution invariante $\pi = \begin{pmatrix}x & 1-x\end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\pi = \pi P \Rightarrow x = x(1-p) + (1-x)q \Rightarrow x = \frac{q}{p+q}$$

Donc : $\pi = \begin{pmatrix}\frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q}\end{pmatrix}$. Soit π_0 une distribution initiale quelconque donnant des distributions π_n. Soit alors (x_n) la suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\pi_n = \begin{pmatrix}x_n & 1-x_n\end{pmatrix}$. On a :

$$\pi_{n+1} = \pi_n P \Rightarrow x_{n+1} = x_n(1-p) + (1-x_n)q \Rightarrow x_{n+1} = x_n(1-p-q) + q$$

Ainsi la suite (x_n) est arithmético-géométrique, on introduit la suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_n - \dfrac{q}{p+q}$. On remarque alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= x_{n+1} - \frac{q}{p+q} \\ &= x_n(1-p-q) + q - \frac{q}{p+q} \\ &= (1-p-q)\left(x_n - \frac{q}{p+q}\right) \\ &= (1-p-q)u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $-1 < (1-p-q) < 1$, elle converge vers 0. On en déduit enfin que (x_n) converge vers $\dfrac{q}{p+q}$. Ainsi quel que soit l'état initial :

$$\lim_{n \to +\infty} \pi_n = \pi$$

□