Chapitre 1

Logique et ensembles

1.1 Introduction historique

Du paradis que Cantor a créé pour nous, nul ne doit pouvoir nous chasser.

David Hilbert - *Über das Unendliche*, 1926

Ce premier chapitre ne contient pas de théorème spectaculaire : il fixe la langue dans laquelle tous les autres seront écrits. Cette langue est jeune, et elle a failli s'effondrer.

1.1.1 Une lettre du 16 juin 1902

Ce jour-là, **Bertrand Russell** écrit à **Gottlob Frege**, dont le second volume des *Grundgesetze der Arithmetik* est sous presse. Frege y fonde l'arithmétique sur un principe d'apparence évidente : toute propriété définit l'ensemble des objets qui la vérifient. Russell lui montre que la propriété « ne pas s'appartenir à soi-même » conduit alors à une contradiction, que la section 1.5 expliquera. Frege tente de sauver son système en modifiant l'un de ses axiomes, dans une annexe ajoutée au volume.

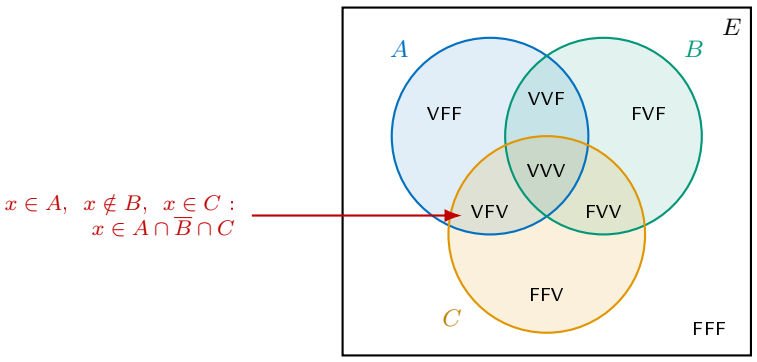
1.1.2 Un demi-siècle pour écrire la logique

L'édifice était récent. En 1847, **George Boole** et **Augustus De Morgan** font de la logique un calcul, d'où descendent les tables de vérité de la section 1.2 et les lois de De Morgan. En 1879, la *Begriffsschrift* de Frege exprime pour la première fois les quantificateurs, et en 1880 **John Venn** dessine le calcul de Boole avec des cercles qui se chevauchent. Nos symboles sont plus tardifs encore : $\in$ apparaît chez **Giuseppe Peano** en 1889, $\exists$ dans son *Formulaire* de 1897, et $\forall$ seulement en 1935, chez **Gerhard Gentzen**.

1.1.3 Garder le paradis de Cantor

Depuis 1874, **Georg Cantor** traite l'infini comme un objet mathématique ; il montre par exemple que les réels ne peuvent pas être énumérés comme les entiers. Le paradoxe de Russell ne condamne pas ses idées, mais la liberté de former n'importe quel ensemble : en 1908, **Ernst Zermelo** impose de choisir les éléments dans un ensemble déjà construit, règle que ce cours adopte. En 1926, Hilbert résume l'enjeu par la phrase placée en exergue : on encadre l'usage de l'infini, on n'y renonce pas.

Le diagramme de Venn montre le lien entre les deux langages de ce chapitre : trois parties A, B, C d'un ensemble E le découpent en huit régions, une par ligne de la table de vérité des assertions $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$.



1.2 Assertions et connecteurs logiques

1.2.1 Assertions, négation, conjonction, disjonction

Définition : Une **assertion** (ou **proposition**) est un énoncé mathématique dont on peut dire s'il est vrai ou faux, sans être à la fois l'un et l'autre. Une assertion dont la valeur de vérité dépend d'une variable x est un **prédicat**, noté $P(x)$.

À partir de deux assertions P et Q, on construit de nouvelles assertions à l'aide des **connecteurs logiques** :

- la **négation** non P, vraie exactement lorsque P est fausse ;
- la **conjonction** P et Q, vraie exactement lorsque P et Q sont toutes deux vraies ;
- la **disjonction** P ou Q, vraie exactement lorsque l'une au moins des deux est vraie.

Exemple : L'assertion « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel » est fausse, comme on le démontrera à la section 1.4. L'énoncé « $x^2 > 4$ » n'est pas une assertion tant que x n'est pas précisé : c'est un prédicat, vrai pour $x = 3$ et faux pour $x = 1$.

Remarque : Le « ou » mathématique est toujours *inclusif* : l'assertion « 2 est pair ou 2 est premier » est vraie, bien que ses deux membres le soient simultanément. C'est une différence avec la langue courante, où le « fromage ou dessert » d'un menu est exclusif. Lorsqu'on veut exclure le cas où les deux sont vraies, on le dit explicitement, en écrivant par exemple « l'un ou l'autre, mais pas les deux ».

1.2.2 Implication et équivalence

Définition : Soit P et Q deux assertions.

- L'**implication** $P \Rightarrow Q$ est l'assertion (non P) ou Q. Elle n'est donc fausse que dans un seul cas : lorsque P est vraie et Q fausse.
- L'**équivalence** $P \Leftrightarrow Q$ est l'assertion vraie exactement lorsque P et Q ont la même valeur de vérité.

Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que P est une **condition suffisante** pour Q, et que Q est une **condition nécessaire** pour P. On lit « pour que Q, il suffit que P » et « pour que P, il faut que Q ».

Toutes ces définitions se résument dans une **table de vérité**, qui donne la valeur de chaque assertion composée en fonction de celles de P et de Q ; on note **V** pour vrai et **F** pour faux.

P	Q	non P	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**

Remarques :

- Les deux dernières lignes surprennent souvent : lorsque P est fausse, l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie quelle que soit Q. Cette convention est pourtant la seule raisonnable. Nous voulons que l'assertion « pour tout réel x, $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$ » soit vraie ; elle doit donc l'être en particulier pour $x = 0$ et pour $x = -3$, où l'hypothèse $x > 2$ est fausse, et où la conclusion est tantôt fausse ($0^2 > 4$), tantôt vraie ($(-3)^2 > 4$).
- L'implication ne traduit aucun lien de causalité. L'assertion « $2 + 2 = 5 \Rightarrow \pi$ est rationnel » est vraie, simplement parce que son hypothèse est fausse. Le mathématicien ne s'intéresse évidemment pas à de tels énoncés : en pratique, une implication n'a d'intérêt que lorsqu'elle est quantifiée, comme dans le point précédent.
- L'erreur la plus répandue sur ce vocabulaire est d'inverser « il faut » et « il suffit ». Pour qu'un entier soit divisible par 4, il *faut* qu'il soit pair, mais cela ne *suffit* pas, comme le montre 6. Avant d'écrire l'une de ces expressions, il est prudent de la retraduire en implication : ici, « divisible par 4 » $\Rightarrow$ « pair ».

1.2.3 Les lois de la logique

Proposition 1 : Soit P, Q et R trois assertions. Les équivalences suivantes sont toujours vraies.

(i) Double négation : $\text{non}\,(\text{non}\,P) \Leftrightarrow P$.

(ii) Lois de De Morgan :

$$\text{non}\,(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (\text{non}\,P) \text{ ou } (\text{non}\,Q)$$
$$\text{non}\,(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (\text{non}\,P) \text{ et } (\text{non}\,Q)$$

(iii) Distributivités :

$$P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$$
$$P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \Leftrightarrow (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$$

(iv) Négation d'une implication : $\text{non}\,(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \text{ et } (\text{non}\,Q)$.

(v) Contraposition : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \big((\text{non}\,Q) \Rightarrow (\text{non}\,P)\big)$.

(vi) Double implication : $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)\big)$.

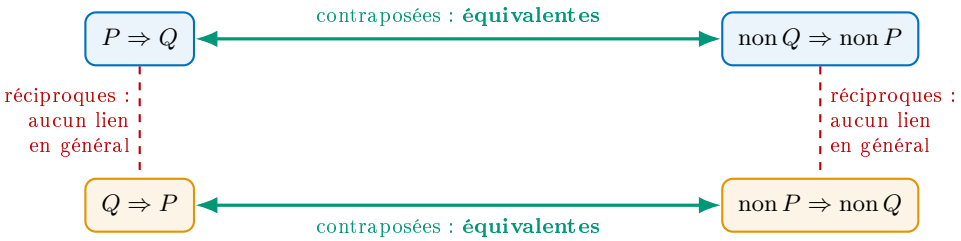
∘ Démonstration : Le point (i) découle directement de la définition de la négation. Pour les points (ii), (iv) et (v), il suffit de comparer, dans la table suivante, les colonnes deux à deux : à chaque ligne, les colonnes de même couleur portent la même valeur.

P	Q	non $(P$ et $Q)$	non P ou non Q	non $(P \Rightarrow Q)$	P et non Q	$P \Rightarrow Q$	non $Q \Rightarrow$ non P
V	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**

La seconde loi de De Morgan s'obtient en appliquant la première aux assertions non P et non Q, puis en niant les deux membres et en utilisant (i).

Distributivités (iii). Démontrons la première en distinguant deux cas. Si P est fausse, les deux membres sont faux, puisque chacun est une conjonction dont un terme est P. Si P est vraie, le membre de gauche a la valeur de Q ou R, et celui de droite aussi, puisque P et Q a alors la valeur de Q et P et R celle de R. La seconde distributivité se traite de même, en distinguant cette fois le cas où P est vraie (les deux membres sont vrais) et le cas où P est fausse (les deux membres valent Q et R).

Double implication (vi). D'après la table de vérité de la section 1.2.2, $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ n'est fausse que si l'une des deux implications l'est, c'est-à-dire si l'une des assertions est vraie et l'autre fausse ; elle est donc vraie exactement lorsque P et Q ont même valeur de vérité, ce qui démontre (vi). □



Ce schéma résume les quatre implications que l'on peut former à partir de P et Q. Les flèches vertes relient des énoncés équivalents, que l'on peut substituer l'un à l'autre dans une démonstration ; les traits rouges relient une implication à sa **réciproque**, qui peut être vraie ou fausse indépendamment d'elle.

Remarque : L'erreur la plus répandue en logique élémentaire consiste à confondre la contraposée et la réciproque. De « si un entier est divisible par 4, il est pair » on peut déduire « s'il est impair, il n'est pas divisible par 4 » (contraposée), mais certainement pas « s'il est pair, il est divisible par 4 » (réciproque, fausse).

1.3 Quantificateurs

1.3.1 Définitions et négation

Définition : Soit E un ensemble et $P(x)$ un prédicat portant sur les éléments x de E.

- L'assertion $\forall x \in E,\ P(x)$, lue « pour tout x de E, $P(x)$ », est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour chaque élément x de E. Le symbole $\forall$ est le **quantificateur universel**.
- L'assertion $\exists x \in E,\ P(x)$, lue « il existe x dans E tel que $P(x)$ », est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E. Le symbole $\exists$ est le **quantificateur existentiel**.
- L'assertion $\exists!\, x \in E,\ P(x)$ signifie qu'il existe un **unique** élément x de E vérifiant $P(x)$, c'est-à-dire :

$$\big(\exists x \in E,\ P(x)\big) \ \text{ et } \ \Big(\forall (x,x') \in E^2,\ \big(P(x) \ \text{ et } \ P(x')\big) \Rightarrow x = x'\Big)$$

Remarques :

- La variable quantifiée est *muette* : les assertions « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$ » et « $\forall t \in \mathbb{R},\ t^2 \geqslant 0$ » sont identiques, exactement comme $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{i=1}^{n} i$ désignent le même nombre. En revanche, une variable qui apparaît dans un énoncé sans avoir été quantifiée ni introduite par « soit » n'a aucun sens : c'est une faute de rédaction, et non une simple maladresse.
- Les quantificateurs ne s'emploient jamais comme des abréviations au milieu d'une phrase française : un lecteur doit pouvoir lire chaque phrase à voix haute sans buter sur un symbole. On n'écrit pas « la fonction s'annule $\forall x$ négatif », mais « la fonction s'annule en tout réel négatif », ou bien une assertion entièrement symbolique. Les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ appartiennent aux formules, pas à la prose.

Proposition 2 : (*Négation des quantificateurs*) Soit E un ensemble et $P(x)$ un prédicat sur E. Alors :

$$\text{non}\big(\forall x \in E,\ P(x)\big) \iff \exists x \in E,\ \text{non}\, P(x)$$
$$\text{non}\big(\exists x \in E,\ P(x)\big) \iff \forall x \in E,\ \text{non}\, P(x)$$

∘ Démonstration : L'assertion $\forall x \in E,\ P(x)$ est fausse exactement lorsque $P(x)$ n'est pas vraie pour chaque x de E, c'est-à-dire lorsqu'il existe au moins un élément x de E pour lequel $P(x)$ est fausse, ce qui est la première équivalence. Appliquons-la au prédicat $\text{non}\, P(x)$: elle donne

$$\text{non}\big(\forall x \in E,\ \text{non}\, P(x)\big) \iff \exists x \in E,\ \text{non}\big(\text{non}\, P(x)\big) \iff \exists x \in E,\ P(x),$$

et il suffit de nier les deux membres pour obtenir la seconde. □

♡ **Méthode :** Pour écrire la **négation d'une assertion quantifiée**, on la lit de gauche à droite :

- ▶ On remplace chaque $\forall$ par $\exists$ et chaque $\exists$ par $\forall$, *sans changer* les ensembles sur lesquels portent les variables.
- ▶ On nie la propriété finale, en utilisant la proposition 1 : une conjonction devient une disjonction, et une implication $A \Rightarrow B$ devient A et non B.

Exemples :

- Une fonction f définie sur un intervalle I est *majorée* lorsque :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in I,\ \ f(x) \leqslant M$$

Sa négation, « f n'est pas majorée sur I », s'écrit donc :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \ \exists x \in I,\ \ f(x) > M$$

Cette formule dit exactement ce que l'on attend : aucun réel M, si grand soit-il, ne fait l'affaire, puisque la fonction finit toujours par le dépasser. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$, car pour tout réel M, le réel $x = |M|+1$ vérifie $x^2 \geqslant x > |M| \geqslant M$.

- Une fonction f est *croissante* sur I lorsque $\forall (x,y) \in I^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$. D'après la méthode, sa négation est :

$$\exists (x,y) \in I^2,\quad x \leqslant y \quad \text{et} \quad f(x) > f(y)$$

Remarques :

- L'erreur la plus répandue consiste à traduire « f n'est pas croissante » par « f est décroissante ». La négation ci-dessus ne demande qu'*un seul* couple de points où la fonction diminue : la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ n'est ni croissante ni décroissante. Plus généralement, la négation d'une propriété « pour tout » n'est jamais une autre propriété « pour tout ».
- La négation de « il existe un unique x tel que $P(x)$ » n'est pas « il existe un unique x tel que non $P(x)$ » : c'est « aucun x ne vérifie $P(x)$, ou au moins deux le vérifient ». C'est pourquoi, en pratique, on démontre séparément l'*existence* et l'*unicité*, comme on le fera au théorème de la section 1.4.5.

1.3.2 L'ordre des quantificateurs

Deux quantificateurs de même nature peuvent être échangés : « $\forall x,\ \forall y$ » et « $\forall y,\ \forall x$ » ont le même sens, de même que « $\exists x,\ \exists y$ » et « $\exists y,\ \exists x$ ». Il en va tout autrement lorsqu'ils sont de natures différentes.

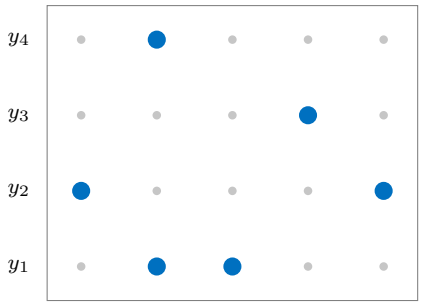
Proposition 3 : Soit E et F deux ensembles et $P(x,y)$ un prédicat portant sur $x \in E$ et $y \in F$. Alors :

$$\Big(\exists y \in F,\ \ \forall x \in E,\ \ P(x,y)\Big) \implies \Big(\forall x \in E,\ \ \exists y \in F,\ \ P(x,y)\Big)$$

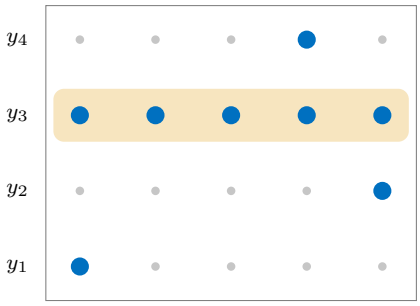
mais la réciproque est fausse en général.

∘ Démonstration : *L'implication.* Supposons qu'il existe $y_0 \in F$ tel que $P(x,y_0)$ soit vraie pour tout $x \in E$. Soit alors $x \in E$: l'élément $y = y_0$ convient, ce qui prouve l'assertion de droite.

La réciproque est fausse. Prenons $E = F = \mathbb{R}$ et $P(x,y)$: « $y > x$ ». L'assertion $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y > x$ est vraie, puisque $y = x+1$ convient. L'assertion $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y > x$ est fausse, car un tel y vérifierait en particulier $y > y$ en choisissant $x = y$. □



chaque colonne contient un point bleu :
$\forall x,\ \exists y,\ P(x,y)$ est vraie,
mais aucune ligne n'est pleine.



la ligne y_3 est pleine :
$\exists y,\ \forall x,\ P(x,y)$ est vraie,
donc $\forall x,\ \exists y,\ P(x,y)$ aussi.

Dans ces deux grilles, un point bleu en position (x_i, y_j) signifie que $P(x_i, y_j)$ est vraie. « $\forall x,\ \exists y$ » demande un point dans chaque colonne, le y pouvant changer d'une colonne à l'autre ; « $\exists y,\ \forall x$ » demande une ligne entièrement remplie, c'est-à-dire un même y qui convienne pour tous les x, ce qui est beaucoup plus exigeant.

Remarque : Cette distinction sera au cœur des chapitres d'analyse. La définition de la convergence d'une suite, au chapitre 7, commence par « $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ » : le rang N peut dépendre de ε. Échanger les deux quantificateurs donnerait un énoncé radicalement différent, et presque toujours faux. De même, au chapitre 8, la continuité uniforme ne diffère de la continuité que par la place d'un quantificateur.

1.4 Modes de raisonnement

1.4.1 Raisonnement direct, implications et équivalences

♡ **Méthode :** Pour démontrer une **implication** $P \Rightarrow Q$, on *suppose* que P est vraie et l'on en déduit Q ; le cas où P est fausse n'a pas à être examiné, puisque l'implication y est automatiquement vraie. Pour démontrer une assertion $\forall x \in E,\ P(x)$, on commence par « Soit $x \in E$ », on ne suppose *rien d'autre* sur x, et l'on démontre $P(x)$. Pour démontrer une **équivalence**, on démontre le plus souvent les deux implications séparément, conformément au point (vi) de la proposition 1.

Remarque : Une chaîne d'équivalences $P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow Q$ est une démonstration valable, mais chaque symbole $\Leftrightarrow$ engage le rédacteur dans *deux* implications. L'erreur la plus répandue est d'écrire $\Leftrightarrow$ là où seule l'implication $\Rightarrow$ est justifiée, typiquement en élevant au carré : $a = b$ entraîne $a^2 = b^2$, mais la réciproque est fausse, puisque $(-1)^2 = 1^2$.

Exemple : Résolvons dans $[-2\,,+\infty[$ l'équation $\sqrt{x+2} = x$. Si x est solution, alors en élevant au carré

$$x + 2 = x^2, \qquad \text{soit} \qquad x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) = 0,$$

dont les racines sont -1 et 2. Nous avons seulement démontré l'implication « x solution $\Rightarrow x \in \{-1\,,2\}$ », et il faut maintenant tester ces deux candidats : pour $x = 2$, on a bien $\sqrt{4} = 2$; pour $x = -1$, on trouve $\sqrt{1} = 1 \neq -1$. L'ensemble des solutions est donc $\{2\}$. La valeur parasite -1 est précisément celle que l'élévation au carré a introduite : c'est une solution de $-\sqrt{x+2} = x$, que le carré ne distingue pas de l'équation initiale.

1.4.2 Raisonnement par disjonction des cas

♡ **Méthode :** Pour démontrer une assertion Q, on peut distinguer plusieurs cas P_1, …, P_k, à condition qu'ils *épuisent toutes les possibilités*, c'est-à-dire que P_1 ou … ou P_k soit vraie, puis démontrer $P_i \Rightarrow Q$ dans chacun d'eux.

Exemple : Montrons que pour tout réel x, $|x-1| + |x+1| \geqslant 2$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les signes de $x-1$ et $x+1$ invitent à distinguer trois cas, qui recouvrent bien tout $\mathbb{R}$.

- Si $x \leqslant -1$, alors $|x-1| + |x+1| = (1-x) + (-x-1) = -2x \geqslant 2$.
- Si $-1 \leqslant x \leqslant 1$, alors $|x-1| + |x+1| = (1-x) + (x+1) = 2$.
- Si $x \geqslant 1$, alors $|x-1| + |x+1| = (x-1) + (x+1) = 2x \geqslant 2$.

L'inégalité est donc démontrée, et l'on voit même qu'elle est une égalité exactement lorsque $x \in [-1\,,1]$. Géométriquement, $|x-1| + |x+1|$ est la somme des distances de x aux points 1 et -1 de la droite réelle : elle vaut au moins la distance 2 entre ces deux points, avec égalité lorsque x est situé entre eux.

Remarque : Les cas n'ont pas besoin d'être disjoints : ci-dessus, $x = 1$ appartient au deuxième et au troisième. Ce qui est indispensable, c'est qu'ils recouvrent toutes les situations. Nous retrouverons cette idée à la section 1.5.5 avec la notion de recouvrement et de partition d'un ensemble.

1.4.3 Raisonnement par contraposition

♡ **Méthode :** Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, il est équivalent, d'après le point (v) de la proposition 1, de démontrer non $Q \Rightarrow$ non P : on suppose que Q est fausse et l'on en déduit que P est fausse. Ce détour est utile lorsque non Q fournit une information plus maniable que P.

Exemple : Montrons que pour tout entier n, *si n^2 est pair, alors n est pair.* L'hypothèse « n^2 pair » est difficile à exploiter directement, car on ne sait pas « extraire la racine » d'une écriture $n^2 = 2k$. On démontre donc la contraposée : si n est impair, alors n^2 est impair. Écrivons $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$; alors

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\,(2k^2 + 2k) + 1$$

est impair. Ce petit résultat sera réutilisé dès la sous-section suivante.

1.4.4 Raisonnement par l'absurde

♡ **Méthode :** Pour démontrer une assertion P, on suppose que P est fausse et l'on en déduit une contradiction, c'est-à-dire une assertion de la forme R et non R. Puisque non P entraîne une assertion fausse, non P est fausse, donc P est vraie.

Théorème 1 : Irrationalité de $\sqrt{2}$:
Le réel $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

∘ Démonstration : Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, et écrivons-le sous forme de fraction irréductible $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, avec p et q entiers naturels non nuls sans diviseur commun autre que 1. En élevant au carré, on obtient

$$p^2 = 2q^2,$$

donc p^2 est pair, et p est pair d'après l'exemple précédent. Écrivons $p = 2p'$; il vient

$$4p'^2 = 2q^2, \qquad \text{soit} \qquad q^2 = 2p'^2.$$

Par le même argument, q est pair. Ainsi p et q sont tous deux divisibles par 2, ce qui contredit le caractère irréductible de la fraction. L'hypothèse était donc fausse. □

Remarque : On confond souvent raisonnement par l'absurde et contraposition, et une démonstration annoncée « par l'absurde » n'est parfois qu'une contraposée déguisée. Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, la contraposition aboutit à la conclusion précise non P, tandis que l'absurde suppose à la fois P et non Q et cherche *n'importe quelle* contradiction. Lorsque la contradiction obtenue est justement non P, la contraposition est plus claire et doit être préférée.

1.4.5 Raisonnement par analyse-synthèse

♡ **Méthode :** Pour déterminer tous les objets vérifiant une propriété, ou pour démontrer qu'un tel objet existe et est unique, on procède en deux temps :

- **Analyse.** On suppose qu'un objet convient et l'on en déduit des **conditions nécessaires**, si possible jusqu'à ne laisser qu'un petit nombre de candidats.
- **Synthèse.** On vérifie lesquels de ces candidats conviennent effectivement : les conditions obtenues sont-elles **suffisantes** ?

Théorème 2 : Parties paire et impaire d'une fonction :
Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit **de manière unique** comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Plus précisément, $f = g + h$ avec

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

∘ Démonstration : *Analyse.* Supposons que $f = g + h$, avec g paire et h impaire. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = g(x) + h(x)$ et, en évaluant en $-x$, $f(-x) = g(x) - h(x)$. En additionnant puis en soustrayant ces deux égalités, on obtient nécessairement

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Les fonctions g et h sont donc entièrement déterminées par f, ce qui démontre l'*unicité*.

Synthèse. Définissons g et h par ces formules. Pour tout réel x,

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x) \qquad \text{et} \qquad h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x),$$

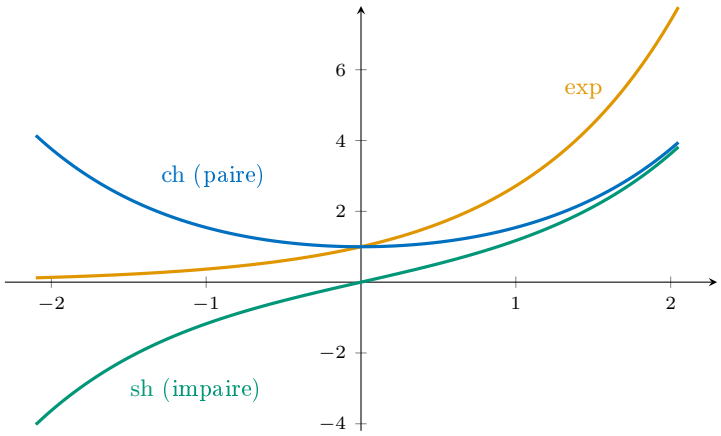
donc g est paire et h impaire ; enfin $g(x) + h(x) = f(x)$. Cela démontre l'*existence*. □

Exemples :

- Pour $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$, on trouve $g(x) = 2x^2 + 5$ et $h(x) = x^3 - x$: la partie paire d'un polynôme est formée de ses termes de degré pair, et sa partie impaire de ses termes de degré impair, ce qui justifie a posteriori ce vocabulaire.
- Pour la fonction exponentielle, la décomposition fournit deux fonctions nouvelles, le **cosinus hyperbolique** et le **sinus hyperbolique** :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \text{de sorte que} \quad \mathrm{e}^x = \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)$$

Ces fonctions seront étudiées au chapitre 5, avec les autres fonctions usuelles. À titre de contrôle, $\mathrm{ch}(1) \approx 1{,}543$ et $\mathrm{sh}(1) \approx 1{,}175$ ont bien pour somme $\mathrm{e} \approx 2{,}718$.



La courbe de ch est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et celle de sh par rapport à l'origine. En chaque abscisse, l'ordonnée de la courbe orange est la somme des ordonnées des deux autres : pour x grand, e^{-x} devient négligeable et ch et sh se confondent presque avec $\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

Remarque : La résolution de $\sqrt{x+2} = x$ dans la section 1.4.1 était déjà une analyse-synthèse : l'élévation au carré fournissait des conditions nécessaires, et le test des candidats en vérifiait la suffisance. L'erreur la plus répandue consiste à omettre la synthèse, en pensant qu'une analyse menée correctement suffit. Elle ne garantit que l'unicité, ou un ensemble de candidats, jamais l'existence.

1.4.6 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence repose sur une propriété de l'ensemble $\mathbb{N}$ que nous admettons : construire $\mathbb{N}$ à partir d'axiomes, comme l'a fait Peano en 1889, est hors programme.

Proposition 4 : (*Propriété fondamentale de* $\mathbb{N}$, *admise*) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un **plus petit élément**.

Remarque : Cette propriété est propre aux entiers naturels. Elle est fausse dans $\mathbb{Z}$, puisque $\mathbb{Z}$ lui-même n'a pas de plus petit élément, et fausse pour les parties de $\mathbb{R}_+$: l'ensemble $]0\,,1]$ n'a pas de plus petit élément, car tout réel $a > 0$ de cet ensemble est strictement plus grand que $\frac{a}{2}$, qui y appartient aussi.

Théorème 3 : Principe de récurrence :
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ un prédicat défini pour les entiers $n \geqslant n_0$. On suppose que :

- **initialisation** : $P(n_0)$ est vraie ;
- **hérédité** : pour tout entier $n \geqslant n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

◦ Démonstration : Raisonnons par l'absurde et supposons non vide l'ensemble A des entiers $n \geqslant n_0$ pour lesquels $P(n)$ est fausse. D'après la proposition 4, il possède un plus petit élément m.

- Comme $P(n_0)$ est vraie, $m \neq n_0$, donc $m \geqslant n_0 + 1$ et l'entier $m-1$ vérifie $m - 1 \geqslant n_0$.
- Puisque $m - 1 < m$ et que m est le plus petit élément de A, l'entier $m - 1$ n'appartient pas à A : $P(m-1)$ est vraie.
- L'hérédité, appliquée à $n = m - 1$, montre alors que $P(m)$ est vraie.

Cela contredit $m \in A$. □

Théorème 4 : Inégalité de Bernoulli :
Pour tout réel $x \geqslant -1$ et tout entier naturel n : $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

∘ Démonstration : Fixons un réel $x \geqslant -1$ et notons $P(n)$ l'assertion « $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ ».

Initialisation. Pour $n = 0$, on a $(1+x)^0 = 1 \geqslant 1 + 0 \times x$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Comme $1 + x \geqslant 0$, on peut multiplier l'inégalité $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ par $1 + x$ sans en changer le sens :

$$(1+x)^{n+1} \geqslant (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x$$

puisque $nx^2 \geqslant 0$. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Remarques :

- L'hypothèse $x \geqslant -1$ n'a servi qu'à un endroit, au moment de multiplier par $1 + x$, mais elle y est indispensable : pour $x = -4$ et $n = 3$, on obtient $(-3)^3 = -27$, qui n'est pas supérieur à $1 - 12 = -11$. Repérer où sert chaque hypothèse est un excellent moyen de contrôler une démonstration. Cette inégalité montre aussi qu'une puissance q^n avec $q = 1 + x > 1$ croît au moins comme une fonction affine de n : avec $x = 0{,}01$ et $n = 100$, elle garantit $1{,}01^{100} \geqslant 2$, la valeur exacte étant environ 2,705. C'est l'argument qu'on utilisera au chapitre 7 pour établir que $q^n \to +\infty$ lorsque $q > 1$.
- L'initialisation n'est pas une formalité. Considérons l'assertion $P(n)$: « $10^n + 1$ est divisible par 9 ». L'hérédité est vraie, puisque $10^{n+1} + 1 = 10\,(10^n + 1) - 9$ est divisible par 9 dès que $10^n + 1$ l'est. Pourtant $P(n)$ n'est vraie pour aucun entier : on a $10^0 + 1 = 2$, $10^1 + 1 = 11$, $10^2 + 1 = 101$, et le reste de la division par 9 vaut toujours 2, comme le montrera l'étude des congruences au chapitre 12.

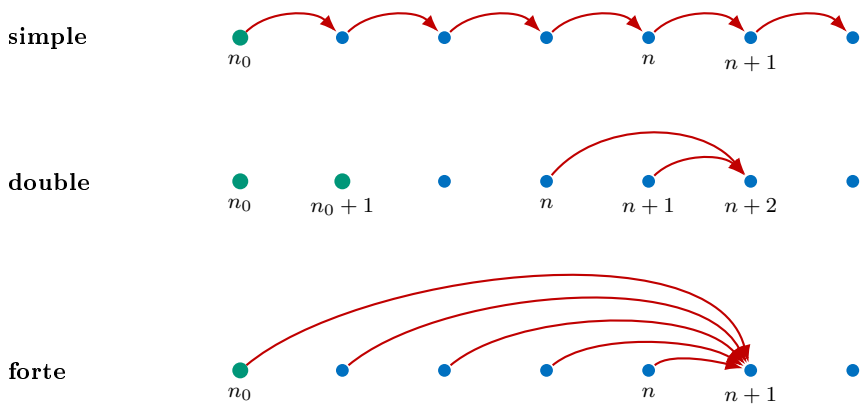
Il arrive que la vérité de $P(n+1)$ dépende non seulement de $P(n)$, mais de $P(n-1)$, voire de toutes les assertions précédentes. On dispose alors de deux variantes du principe de récurrence.

Théorème 5 : Récurrences double et forte :
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ un prédicat défini pour les entiers $n \geqslant n_0$.

- **Récurrence double.** Si $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$ sont vraies et si, pour tout $n \geqslant n_0$, $\big(P(n) \text{ et } P(n+1)\big) \Rightarrow P(n+2)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
- **Récurrence forte.** Si $P(n_0)$ est vraie et si, pour tout $n \geqslant n_0$, $\big(\forall k \in [\![n_0\,, n]\!],\ P(k)\big) \Rightarrow P(n+1)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

∘ Démonstration : *Récurrence double.* Appliquons le théorème 3 à l'assertion $Q(n)$: « $P(n)$ et $P(n+1)$ ». L'initialisation $Q(n_0)$ est l'hypothèse faite sur $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$. Si $Q(n)$ est vraie pour un $n \geqslant n_0$, alors $P(n+1)$ est vraie, et $P(n+2)$ aussi d'après l'hypothèse, donc $Q(n+1)$ est vraie. Ainsi $Q(n)$, et a fortiori $P(n)$, est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Récurrence forte. On procède de même avec l'assertion $R(n)$: « $\forall k \in [\![n_0\,, n]\!],\ P(k)$ ». On a $R(n_0) = P(n_0)$, qui est vraie. Si $R(n)$ est vraie, l'hypothèse donne $P(n+1)$, donc $P(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![n_0\,, n+1]\!]$, c'est-à-dire que $R(n+1)$ est vraie. On conclut comme précédemment. □



Les points verts sont les initialisations et les flèches rouges représentent l'hérédité. Dans une récurrence simple, chaque entier ne s'appuie que sur son prédécesseur ; dans une récurrence double, sur les deux précédents ; dans une récurrence forte, sur tous les entiers déjà traités depuis n_0.

Exemples :

- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ses premiers termes sont 0, 1, 5, 19, 65. Montrons par récurrence double que $u_n = 3^n - 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'initialisation est immédiate : $3^0 - 2^0 = 0$ et $3^1 - 2^1 = 1$. Si la formule est vraie aux rangs n et $n+1$, alors

$$u_{n+2} = 5\left(3^{n+1} - 2^{n+1}\right) - 6\left(3^n - 2^n\right) = (15-6)\,3^n - (10-6)\,2^n = 3^{n+2} - 2^{n+2}.$$

  Une récurrence simple ne suffirait pas, puisque u_{n+2} dépend de *deux* termes précédents. Le chapitre 7 expliquera d'où vient cette formule : 2 et 3 sont les racines de l'équation $r^2 = 5r - 6$.

- Montrons par récurrence forte que *tout entier $n \geqslant 2$ est un produit de nombres premiers*, un produit pouvant ne comporter qu'un seul facteur. L'entier 2 est premier, ce qui initialise la récurrence. Soit $n \geqslant 2$ tel que tout entier de $[\![2, n]\!]$ soit un produit de nombres premiers. Si $n+1$ est premier, il n'y a rien à démontrer. Sinon, il s'écrit $n+1 = ab$ avec a et b entiers vérifiant $2 \leqslant a \leqslant n$ et $2 \leqslant b \leqslant n$; par hypothèse, a et b sont des produits de nombres premiers, donc $n+1$ aussi. La récurrence simple serait ici inopérante, puisque les facteurs a et b n'ont aucune raison d'être égaux à n.

Théorème 6 : Euclide :
Il existe une **infinité de nombres premiers**.

∘ Démonstration : Supposons par l'absurde qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers p_1, …, p_r, et posons $N = p_1 p_2 \cdots p_r + 1$. Comme $N \geqslant 2$, l'exemple précédent montre que N est un produit de nombres premiers ; soit p l'un d'entre eux. Puisque p figure dans la liste, il divise le produit $p_1 \cdots p_r$, donc il divise la différence

$$N - p_1 \cdots p_r = 1,$$

ce qui est impossible pour un entier $p \geqslant 2$. □

Remarque : L'erreur la plus répandue sur cette démonstration est de croire que le nombre N est lui-même premier. Ce n'est pas ce qui est démontré, et c'est d'ailleurs faux en général : avec les six premiers nombres premiers, $2\times3\times5\times7\times11\times13+1 = 30\,031 = 59\times509$. La démonstration affirme seulement que les facteurs premiers de N sont nouveaux. Ce raisonnement figure déjà dans les *Éléments* d'Euclide, et l'arithmétique des entiers fera l'objet du chapitre 12.

1.5 Ensembles

1.5.1 Ensembles, appartenance, inclusion

Définition : Un **ensemble** est une collection d'objets, appelés ses **éléments**. On note $x \in E$ lorsque x **appartient** à E, et $x \notin E$ sinon. L'**ensemble vide**, noté $\varnothing$, est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

On décrit un ensemble :

- **en extension**, en donnant la liste de ses éléments : $\{1\,,2\,,3\}$;
- **en compréhension**, comme partie d'un ensemble E déjà connu : $\{x \in E \mid P(x)\}$;
- **de manière paramétrée**, comme ensemble des valeurs d'une expression : $\{f(i) \mid i \in I\}$.

Exemple : L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 4\}$ est l'intervalle $[-2\,,2]$, et l'ensemble $\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, noté $2\mathbb{Z}$, est celui des entiers pairs. Dans une écriture en extension, ni l'ordre ni les répétitions ne comptent : $\{1\,,2\,,2\,,3\} = \{3\,,1\,,2\}$.

Remarque : La description en compréhension impose de choisir d'abord un ensemble E dans lequel on sélectionne les éléments. C'est précisément la précaution qui évite le paradoxe de Russell : on ne peut pas former « l'ensemble de tous les x tels que $x \notin x$ », car si un tel ensemble R existait, on aurait $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$, ce qui est absurde. En revanche, pour tout ensemble E, la partie $\{x \in E \mid x \notin x\}$ est parfaitement définie.

Définition : Soit A et B deux ensembles. On dit que A est **inclus** dans B, ou que A est une **partie** (ou un **sous-ensemble**) de B, et l'on note $A \subset B$, lorsque tout élément de A est un élément de B :

$$A \subset B \iff \forall x,\ \big(x \in A \Rightarrow x \in B\big)$$

L'ensemble de toutes les parties d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$. Ainsi $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$.

Remarque : L'erreur la plus répandue consiste à confondre les symboles $\in$ et $\subset$, qui relient des objets de natures différentes : on écrit $1 \in \{1\,,2\}$ et $\{1\} \subset \{1\,,2\}$, mais ni $1 \subset \{1\,,2\}$ ni $\{1\} \in \{1\,,2\}$. De même, l'ensemble vide est inclus dans tout ensemble, puisque l'implication $x \in \varnothing \Rightarrow x \in E$ est vraie pour tout x, son hypothèse étant toujours fausse ; mais il n'appartient pas, en général, à E. Enfin $\{\varnothing\}$ n'est pas vide : c'est un ensemble à un élément.

Proposition 5 : (*Double inclusion*) Deux ensembles A et B sont égaux si et seulement si $A \subset B$ **et** $B \subset A$.

∘ Démonstration : Par définition, deux ensembles sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes éléments. D'après le point (vi) de la proposition 1,

$$\begin{aligned} A = B &\iff \forall x,\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \\ &\iff \forall x,\ \big((x \in A \Rightarrow x \in B) \ \text{ et } \ (x \in B \Rightarrow x \in A)\big) \\ &\iff A \subset B \ \text{ et } \ B \subset A. \end{aligned}$$

□

♡ **Méthode :** Pour démontrer que $A \subset B$, on écrit « Soit $x \in A$ » et l'on démontre que $x \in B$. Pour démontrer que $A = B$, on démontre en général les deux inclusions séparément.

Exemple : Montrons que $\{2a+3b \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\} = \mathbb{Z}$. L'inclusion $\subset$ est claire, puisqu'une somme de produits d'entiers est un entier. Réciproquement, soit $n \in \mathbb{Z}$; on peut écrire $n = 2 \times (-n) + 3 \times n$, qui est bien de la forme $2a+3b$ avec $a = -n$ et $b = n$. Le fond de l'affaire est l'égalité $2 \times (-1) + 3 \times 1 = 1$: dès qu'on sait atteindre 1, on atteint tous les entiers. C'est l'idée du théorème de Bézout, qui sera établi au chapitre 12.

Proposition 6 : Si E est un ensemble fini à n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini à 2^n éléments.

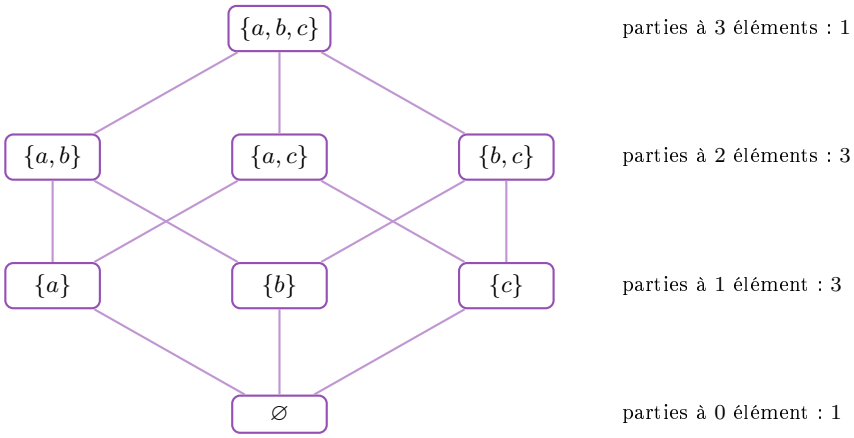
∘ Démonstration : Nous utilisons ici les propriétés intuitives du nombre d'éléments d'un ensemble fini, qui seront établies rigoureusement au chapitre 21. Raisonnons par récurrence sur n.

Initialisation. Si $n = 0$, alors $E = \varnothing$ et $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing\}$ a $1 = 2^0$ élément.

Hérédité. Supposons le résultat vrai pour les ensembles à n éléments et soit E un ensemble à $n+1$ éléments. Fixons $a \in E$ et posons $E' = E \setminus \{a\}$, qui a n éléments. Les parties de E se répartissent en deux familles sans élément commun :

- celles qui ne contiennent pas a, qui sont exactement les parties de E', au nombre de 2^n ;
- celles qui contiennent a, qui s'écrivent de manière unique $B' \cup \{a\}$ avec $B' \subset E'$, au nombre de 2^n également.

Au total, E possède $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ parties. □

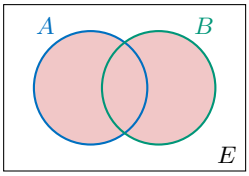


Les huit parties de $E = \{a, b, c\}$ sont ici rangées par nombre d'éléments, un trait reliant deux parties lorsque l'une s'obtient en ajoutant un élément à l'autre. On lit sur la droite la décomposition $8 = 1+3+3+1$, qui annonce les coefficients binomiaux du chapitre 3.

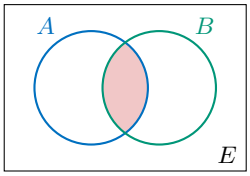
1.5.2 Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition : Soit E un ensemble, et A, B deux parties de E.

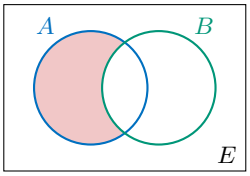
- La **réunion** de A et B est $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- L'**intersection** de A et B est $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$. Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont **disjointes**.
- La **différence** de A et B est $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$.
- Le **complémentaire** de A dans E est $E \setminus A$, noté aussi $\overline{A}$ ou A^c.



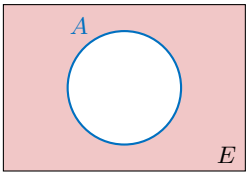
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \setminus B$



$\overline{A} = E \setminus A$

Dans ces diagrammes de Venn, la partie A est toujours bordée de bleu, la partie B de vert, et le résultat de l'opération est la zone rouge. Ils aident à deviner une égalité entre ensembles, mais ne la démontrent pas : la démonstration passe par les éléments, comme ci-dessous.

Proposition 7 : Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E.

(i) La réunion et l'intersection sont commutatives et associatives.

(ii) Distributivités : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(iii) Complémentaire : $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (lois de De Morgan).

(iv) Différence : $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

(v) Inclusion : $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$.

∘ Démonstration : Chacun de ces énoncés est la traduction d'une loi de la proposition 1. Démontrons par exemple la première distributivité. Pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

où l'équivalence centrale est le point (iii) de la proposition 1. La seconde distributivité se démontre de la même façon.

Lois de De Morgan. Pour tout $x \in E$, grâce au point (ii) de la proposition 1,

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\iff \text{non}\,(x \in A \text{ ou } x \in B) \\ &\iff (x \notin A) \text{ et } (x \notin B) \\ &\iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}. \end{aligned}$$

La seconde loi s'en déduit en appliquant la première à $\overline{A}$ et $\overline{B}$, puis en passant au complémentaire.

Les autres points.

- Le point (iv) est une simple relecture des définitions.
- Le point (v) est la contraposition : « $\forall x \in E,\ x \in A \Rightarrow x \in B$ » équivaut à « $\forall x \in E,\ x \notin B \Rightarrow x \notin A$ ».
- Le point (i) découle de la commutativité et de l'associativité des connecteurs « et » et « ou », qui se lisent directement sur leurs tables de vérité.

□

Remarque : Le complémentaire dépend de l'ensemble de référence E, que la notation $\overline{A}$ ne mentionne pas. Le complémentaire de $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers strictement négatifs si l'on travaille dans $\mathbb{Z}$, mais il contient aussi $\frac{1}{2}$ et π si l'on travaille dans $\mathbb{R}$. En cas de doute, l'écriture $E \setminus A$ lève toute ambiguïté.

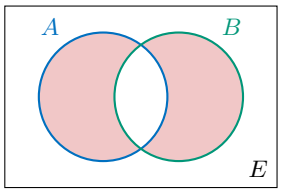
Exemple : La **différence symétrique** de deux parties A et B est $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$: c'est l'ensemble des éléments qui appartiennent à exactement l'une des deux parties, ce qui correspond au « ou exclusif » de la section 1.2. Pour $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$, on trouve

$$A \Delta B = \{1, 2\} \cup \{5\} = \{1, 2, 5\}.$$

On vérifie sur cet exemple, et l'on démontre en général à l'aide de la proposition 7, que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$: en effet,

$$(A \cup B) \cap \overline{A \cap B} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

en développant par distributivité et en supprimant les termes $A \cap \overline{A}$ et $B \cap \overline{B}$, qui sont vides.



$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

La zone rouge, formée de deux lunules, montre les deux descriptions à la fois : on y voit la réunion des deux différences, et l'on y voit aussi la réunion privée de la lentille centrale.

Remarque : La différence symétrique possède des propriétés algébriques remarquables : elle est associative, admet $\varnothing$ pour élément neutre, et chaque partie est son propre « opposé » puisque $A \Delta A = \varnothing$. Nous reconnaîtrons au chapitre 11 que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe.

1.5.3 Réunion et intersection d'une famille de parties

Définition : Soit E un ensemble, I un ensemble d'indices et, pour chaque $i \in I$, une partie A_i de E. On définit la réunion et l'intersection de ces parties par :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\} \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$$

Remarque : Ces définitions prolongent les précédentes, que l'on retrouve avec $I = \{1, 2\}$. Elles montrent que la réunion est l'analogue ensembliste du quantificateur $\exists$ et l'intersection celui du quantificateur $\forall$, comme $\cup$ était celui du « ou » et $\cap$ celui du « et ». La notion de famille indexée sera formalisée au chapitre 2.

Proposition 8 : (*Lois de De Morgan pour une famille*) Avec les notations précédentes :

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i} \qquad \text{et} \qquad \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$$

∘ Démonstration : Pour tout $x \in E$, d'après la proposition 2,

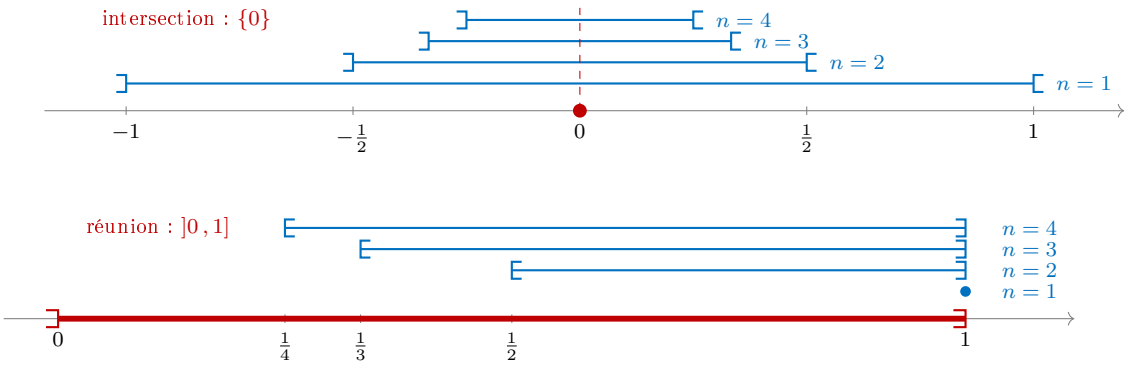
$$x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \iff \text{non}\left(\exists i \in I,\ x \in A_i\right) \iff \forall i \in I,\ x \notin A_i \iff x \in \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}.$$

La seconde égalité s'en déduit en l'appliquant aux complémentaires $\overline{A_i}$. □

Exemples :

- Montrons que
$$\bigcap_{n\geqslant 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}.$$
Le réel 0 appartient à chacun de ces intervalles, d'où l'inclusion $\supset$. Réciproquement, soit x un réel non nul ; il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{n} \leqslant |x|$, par exemple tout entier $n \geqslant \frac{1}{|x|}$, et alors $x \notin \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$, donc x n'appartient pas à l'intersection. L'existence d'un tel entier est la propriété d'Archimède, que l'on admet ici et qui sera démontrée au chapitre 7.

- De même,
$$\bigcup_{n\geqslant 1} \left[\frac{1}{n}, 1\right] =]0\,, 1].$$
Chaque intervalle est inclus dans $]0\,, 1]$, d'où l'inclusion $\subset$; réciproquement, si $0 < x \leqslant 1$, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{n} \leqslant x$, donc $x \in \left[\frac{1}{n}\,, 1\right]$.



En haut, les intervalles se resserrent autour de 0 et leur intersection, en rouge, est réduite à ce point ; en bas, ils s'allongent vers la gauche sans jamais contenir 0, et leur réunion est l'intervalle $]0\,, 1]$, ouvert en 0.

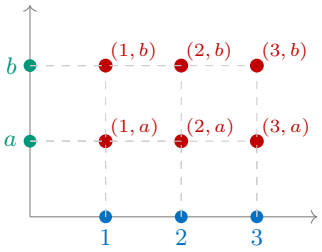
Remarque : Ces deux exemples contiennent un piège fréquent. Une intersection d'intervalles ouverts n'est pas forcément un intervalle ouvert, puisque $\{0\} = [0,0]$ est fermé ; une réunion d'intervalles fermés n'est pas forcément fermée. Ces phénomènes n'apparaissent qu'avec une infinité d'ensembles, et ils reviendront en analyse, lorsqu'il faudra justifier qu'une propriété vraie « pour chaque n » passe ou non « à la limite ».

1.5.4 Produit cartésien

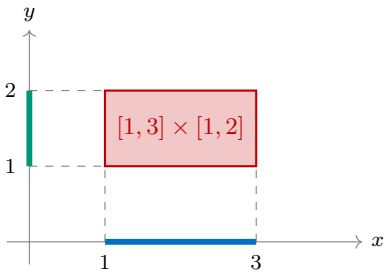
Définition : Soit E et F deux ensembles. Le **produit cartésien** de E et F est l'ensemble des **couples** (x, y) formés d'un élément x de E et d'un élément y de F :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Deux couples sont égaux lorsqu'ils ont même première et même seconde composante : $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x' \text{ et } y = y')$. Plus généralement, $E_1 \times \cdots \times E_n$ est l'ensemble des **n-uplets** $(x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_k \in E_k$ pour tout k ; on note $E^n = E \times \cdots \times E$ (n facteurs).



$\{1,2,3\} \times \{a,b\}$: six couples



un rectangle du plan $\mathbb{R}^2$

À gauche, chaque couple de $\{1,2,3\} \times \{a,b\}$ est placé à la croisée d'un élément du premier ensemble (en bleu) et d'un élément du second (en vert). À droite, le même principe appliqué à deux intervalles produit un rectangle : le plan $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ n'est rien d'autre que l'ensemble des couples de réels.

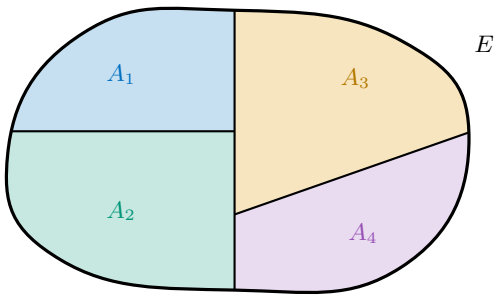
Remarques :

- L'erreur la plus répandue est de confondre le couple (x, y) et l'ensemble $\{x, y\}$. Dans un couple, l'ordre compte : $(1,2) \neq (2,1)$ alors que $\{1,2\} = \{2,1\}$, et $(1,1)$ est un couple légitime alors que $\{1,1\} = \{1\}$ n'a qu'un élément. Pour la même raison, $E \times F$ et $F \times E$ sont en général différents : $(1,a) \in \{1,2,3\} \times \{a,b\}$, mais $(1,a) \notin \{a,b\} \times \{1,2,3\}$.
- Le nombre d'éléments d'un produit d'ensembles finis est le produit des nombres d'éléments : la grille de gauche compte $3 \times 2 = 6$ points. Ce principe multiplicatif, qui explique le nom de « produit », sera le premier outil du dénombrement au chapitre 21.

1.5.5 Recouvrements disjoints et partitions

Définition : Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E.

- On dit que c'est un **recouvrement** de E lorsque $\bigcup_{i \in I} A_i = E$: tout élément de E appartient à au moins une des parties.
- Ce recouvrement est **disjoint** lorsque les parties sont deux à deux disjointes : $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tous $i \neq j$. Tout élément de E appartient alors à *exactement une* des parties.
- Une **partition** de E est un recouvrement disjoint de E par des parties *non vides*.



les A_i sont non vides,
deux à deux disjoints,
et leur réunion est E

Une partition découpe l'ensemble E en morceaux qui ne se chevauchent pas et ne laissent aucun trou : chaque point de E se trouve dans un et un seul morceau.

Exemple : Les parties $2\mathbb{Z}$ et $2\mathbb{Z}+1$, ensembles des entiers pairs et des entiers impairs, forment une partition de $\mathbb{Z}$. Les trois parties $\mathbb{R}_-^*$, $\{0\}$ et $\mathbb{R}_+^*$ forment une partition de $\mathbb{R}$, ce qui justifie la discussion habituelle selon le signe d'un réel. Les intervalles $[k\,,k+1[$, pour $k \in \mathbb{Z}$, forment eux aussi une partition de $\mathbb{R}$: l'unique entier k tel que $x \in [k\,,k+1[$ sera appelé la *partie entière* de x au chapitre 7.

Remarques :

- Une disjonction des cas, au sens de la section 1.4.2, revient exactement à choisir un recouvrement de l'ensemble où varie la variable ; lorsqu'il s'agit d'une partition, chaque situation est traitée une fois et une seule. Dans l'exemple de la section 1.4.2, les trois cas formaient un recouvrement de $\mathbb{R}$ qui n'était pas disjoint, ce qui n'avait aucune conséquence fâcheuse.
- Les partitions apparaîtront de nouveau au chapitre 2, sous une forme inattendue : les classes d'une relation d'équivalence forment toujours une partition de l'ensemble, et réciproquement toute partition provient d'une relation d'équivalence. Elles sont aussi à la base de la formule des probabilités totales du chapitre 21.

1.6 Bilan : le dictionnaire logique / ensembles

Tout au long de ce chapitre, chaque opération sur les ensembles s'est démontrée en la traduisant en une opération logique sur les éléments. Le tableau suivant rassemble ce dictionnaire, qui permet de passer d'un langage à l'autre. Les parties A et B sont des parties d'un ensemble E, et l'on note P et Q les prédicats « $x \in A$ » et « $x \in B$ ».

Logique	Ensembles	Traduction
non P	$\overline{A}$	$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \text{non}\,(x \in A)$
P et Q	$A \cap B$	$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$
P ou Q	$A \cup B$	$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$
$P \Rightarrow Q$ pour tout x	$A \subset B$	définition de l'inclusion
$P \Leftrightarrow Q$ pour tout x	$A = B$	double inclusion
$\exists i \in I,\ P_i$	$\bigcup_{i\in I} A_i$	réunion d'une famille
$\forall i \in I,\ P_i$	$\bigcap_{i\in I} A_i$	intersection d'une famille
lois de De Morgan	lois de De Morgan	complémentaire d'une réunion, d'une intersection
contraposition	$A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$	passage au complémentaire

Ce dictionnaire sera prolongé au chapitre 2, où l'image réciproque d'une partie par une application se révélera compatible avec toutes les opérations de ce tableau.