Chapitre 3

Calcul algébrique

3.1 Introduction historique

> *En tout Triangle arithmétique, chaque cellule est égale à la somme de toutes celles du rang parallèle précédent [...]*
>
> Blaise Pascal - *Traité du triangle arithmétique*, rédigé en 1654, publié en 1665

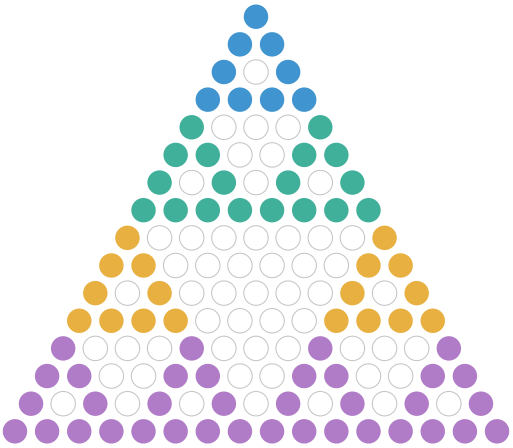
Les deux premiers chapitres ont fixé le langage ; celui-ci forge les outils de calcul dont tout le reste du cours se servira. On y apprend à écrire et à transformer des sommes et des produits finis, à manier les coefficients binomiaux, et à résoudre méthodiquement un système d'équations linéaires. La phrase de Pascal en donne le ton : une propriété d'apparence anodine, dès qu'on l'écrit avec le symbole $\sum$, devient une formule que l'on démontre en deux lignes, la formule « de la crosse de hockey » de la section 3.4.

3.1.1 Des points de suspension au symbole $\sum$

Une anecdote rapportée en 1856 par **Wolfgang Sartorius von Waltershausen** veut que le jeune **Carl Friedrich Gauss**, vers l'âge de neuf ans, ait calculé instantanément une longue somme de termes en progression arithmétique, en associant le premier terme au dernier, le deuxième à l'avant-dernier, et ainsi de suite : c'est le changement d'indice $k \mapsto n+1-k$ de la section 3.2. Le symbole $\sum$ est introduit par **Leonhard Euler** en 1755 dans ses *Institutiones calculi differentialis*, mais c'est **Joseph Fourier** qui, vers 1820, y fait figurer les bornes de l'indice, comme nous le faisons aujourd'hui. La notation $n!$ est due à **Christian Kramp** (1808), celle des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ à **Andreas von Ettingshausen** (1826).

3.1.2 Le triangle et l'élimination

Le triangle des coefficients binomiaux est connu bien avant Pascal : on le trouve chez **al-Karajī** vers l'an mil, puis en Chine chez **Yang Hui** au XIII^{e} siècle. Le mérite de **Blaise Pascal** est d'en avoir fait, en 1654, un objet de démonstration : son *Traité* énonce dix-neuf « conséquences » et les établit par une forme explicite du raisonnement par récurrence. La méthode du pivot a une histoire aussi longue. Le huitième chapitre des *Neuf chapitres sur l'art du calcul*, compilés en Chine au début de notre ère, résout des systèmes linéaires en combinant les lignes d'un tableau de nombres ; en Europe, **Gauss** l'emploie systématiquement au début du XIX^{e} siècle pour calculer l'orbite d'astéroïdes, et elle porte depuis le nom d'*élimination de Gauss*.



3.2 Sommes et produits

Dans tout le chapitre, les nombres sont réels ; tout ce qui est dit des sommes et des produits restera valable pour les nombres complexes, dès qu'ils auront été introduits.

3.2.1 Définition

On commence par les sommes indexées par un intervalle d'entiers, que l'on définit par récurrence, puis on passe à un ensemble fini quelconque. On rappelle la notation du chapitre 2 : pour deux entiers m et n,

$$[\![m\,,n]\!] = \{k \in \mathbb{Z} \mid m \leqslant k \leqslant n\}.$$

Cet ensemble est *vide* si $n < m$. Si $m \leqslant n$, il a $n-m+1$ éléments, au sens du chapitre 2, puisque $j \mapsto j+m-1$ est une bijection de $[\![1\,,n-m+1]\!]$ sur $[\![m\,,n]\!]$, de réciproque $k \mapsto k-m+1$. On ne suppose pas $m \leqslant n$ dans la définition qui suit : le cas de l'intervalle vide est précisément celui qui initialise la récurrence.

Définition : Soit m et n deux entiers et $(a_k)_{k\in[\![m\,,n]\!]}$ une famille de réels. On définit la **somme** et le **produit** des a_k par récurrence sur n, l'entier m étant fixé. Si $n < m$, l'intervalle $[\![m\,,n]\!]$ est vide, et l'on pose

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{k=m}^{n} a_k = 1.$$

Si $n \geqslant m$, on pose

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \Big(\sum_{k=m}^{n-1} a_k\Big) + a_n \quad \text{et} \quad \prod_{k=m}^{n} a_k = \Big(\prod_{k=m}^{n-1} a_k\Big) \times a_n,$$

ce qui ramène le rang n au rang $n-1$, et finalement au rang $m-1$, où l'intervalle est vide. On écrit aussi $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$ et $a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n$. La lettre k est l'**indice** de sommation.

Remarques :

- L'indice est une variable *muette* : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2$ désignent le même nombre, qui dépend de n mais pas de k. L'erreur la plus répandue est de laisser l'indice survivre hors de la somme, dans une écriture comme
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = k \times \cdots,$$
qui n'a aucun sens : une fois la somme calculée, il ne reste plus de k.
- Les conventions sur la somme et le produit vides ne sont pas arbitraires. Ce sont les seules qui rendent vraie la relation de récurrence dès le premier rang, puisque pour $n = m$ elle donne
$$\sum_{k=m}^{m} a_k = 0 + a_m = a_m \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=m}^{m} a_k = 1 \times a_m = a_m.$$
On retrouve ainsi les conventions $x^0 = 1$ et, plus loin, $0! = 1$.
- Le nombre de termes de la somme $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k$ est le nombre d'éléments de $[\![m\,,n]\!]$, soit $n-m+1$ lorsque $n \geqslant m$. Une somme de 1 à n en a donc n, une somme de 0 à n en a $n+1$: c'est la source d'innombrables erreurs d'une unité.

Pour sommer sur un ensemble fini quelconque, on énumère ses éléments, c'est-à-dire qu'on le met en bijection avec un intervalle d'entiers.

Définition : Soit I un ensemble fini de cardinal p et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Pour une numérotation $\sigma : [\![1\,,p]\!] \to I$, c'est-à-dire une bijection, on pose

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=1}^{p} a_{\sigma(k)} \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in I} a_i = \prod_{k=1}^{p} a_{\sigma(k)}.$$

En particulier, la somme sur $I = \varnothing$ vaut 0 et le produit vaut 1.

Cette définition n'a de sens que si le résultat ne dépend pas de la bijection σ choisie, c'est-à-dire de l'ordre dans lequel on range les termes. C'est la *commutativité généralisée* de l'addition et de la multiplication, que l'on **admet** : sa démonstration est une récurrence sur p, sans difficulté conceptuelle mais fastidieuse, qui montre qu'on peut passer d'un rangement à un autre par une suite d'échanges de deux termes consécutifs. L'associativité, elle, est contenue dans la définition par récurrence, qui fixe une fois pour toutes la manière de placer les parenthèses.

3.2.2 Règles de calcul

Proposition 1 : Soit I un ensemble fini, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de réels, et λ, c deux réels.

(i) *Linéarité :* $\displaystyle\sum_{i\in I}(\lambda a_i + b_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$.

(ii) *Somme d'une constante :* $\displaystyle\sum_{i\in I} c = \mathrm{card}(I)\times c$ et $\displaystyle\prod_{i\in I} c = c^{\mathrm{card}(I)}$.

(iii) *Relation de Chasles :* si $I = J\cup K$ avec $J\cap K = \varnothing$, alors $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in J} a_i + \sum_{i\in K} a_i$, et de même pour les produits.

(iv) *Produits :* $\displaystyle\prod_{i\in I}(a_i b_i) = \prod_{i\in I} a_i \times \prod_{i\in I} b_i$ et $\displaystyle\prod_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda^{\mathrm{card}(I)} \prod_{i\in I} a_i$.

∘ Démonstration : Grâce à la définition, il suffit de traiter le cas $I = [\![1\,,p]\!]$, par récurrence sur p. Pour (i), le cas $p=0$ se réduit à $0 = \lambda\times 0 + 0$. Si l'égalité est vraie au rang $p-1$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p}(\lambda a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{p-1}(\lambda a_k + b_k) + \lambda a_p + b_p\\ &= \lambda\sum_{k=1}^{p-1} a_k + \sum_{k=1}^{p-1} b_k + \lambda a_p + b_p = \lambda\sum_{k=1}^{p} a_k + \sum_{k=1}^{p} b_k.\end{aligned}$$

Les points (ii) et (iv) se démontrent de la même façon. Pour (iii), si J a q éléments et K en a r, on choisit la numérotation $\sigma : [\![1\,,q+r]\!] \to I$ construite dans la démonstration du lemme 4 du chapitre 2, qui énumère d'abord les éléments de J, puis ceux de K ; il reste à établir la relation

$$\sum_{k=1}^{q+r} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{q} a_{\sigma(k)} + \sum_{k=q+1}^{q+r} a_{\sigma(k)},$$

qui se démontre par récurrence sur r, à partir de la définition. □

Remarques :

- Il n'existe aucune formule générale pour $\sum(a_i b_i)$ ni pour $\prod(a_i + b_i)$: la somme d'un produit n'est pas le produit des sommes. Par exemple,

$$\sum_{k=1}^{2} k\times k = 1+4 = 5, \qquad \text{alors que} \qquad \Big(\sum_{k=1}^{2} k\Big)\times\Big(\sum_{k=1}^{2} k\Big) = 3\times 3 = 9.$$

- Le facteur λ sort d'un produit avec un exposant :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n\, n!, \qquad \text{et non} \qquad 2\prod_{k=1}^{n} k.$$

C'est l'erreur la plus répandue sur les produits.

3.2.3 Changements d'indice

Proposition 2 : Soit I et J deux ensembles finis, $\tau : J \to I$ une bijection et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Alors

$$\sum_{j\in J} a_{\tau(j)} = \sum_{i\in I} a_i \qquad \text{et} \qquad \prod_{j\in J} a_{\tau(j)} = \prod_{i\in I} a_i.$$

∘ Démonstration : Soit p le nombre d'éléments de J, qui est aussi celui de I puisque deux ensembles en bijection ont le même cardinal (lemme 2 du chapitre 2), et $\sigma : [\![1\,,p]\!] \to J$ une numérotation. D'après le chapitre 2, l'application $\tau \circ \sigma : [\![1\,,p]\!] \to I$ est une bijection, comme composée de deux bijections. La définition de la somme, appliquée aux deux membres, donne alors la même expression :

$$\sum_{j\in J} a_{\tau(j)} = \sum_{k=1}^{p} a_{\tau(\sigma(k))} = \sum_{i\in I} a_i.$$

□

En pratique, on n'utilise guère que deux changements d'indice, dans une somme indexée par un intervalle d'entiers :

- la **translation** $j = k + r$, pour un entier r fixé, qui décale les bornes : $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_{k+r} = \sum_{j=m+r}^{n+r} a_j$;
- la **symétrie** $j = n + m - k$, qui parcourt les termes à l'envers : $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k} = \sum_{j=m}^{n} a_j$.

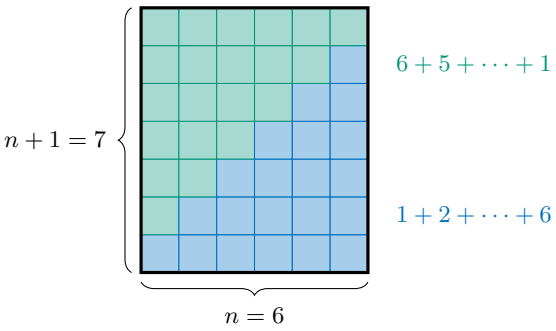
Dans chaque cas, l'application $k \mapsto j$ est une bijection entre les deux intervalles d'entiers, de réciproque $j \mapsto j - r$ ou $j \mapsto n + m - j$.

Exemple : L'argument attribué à Gauss se rédige ainsi. Notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$. Par la symétrie $k \mapsto n + 1 - k$, on a aussi

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (n + 1 - k),$$

et en ajoutant les deux écritures terme à terme, grâce à la linéarité :

$$2S_n = \sum_{k=1}^{n} \big(k + (n + 1 - k)\big) = \sum_{k=1}^{n} (n + 1) = n(n + 1).$$



Pour $n = 6$, l'escalier bleu, formé de colonnes de hauteurs $1, 2, \ldots, 6$, et son retourné vert, de hauteurs $6, 5, \ldots, 1$, s'emboîtent en un rectangle de $6 \times 7 = 42$ carreaux : chaque escalier en contient donc $21 = \frac{6\times 7}{2}$. Chaque colonne du rectangle est une paire $k + (n + 1 - k)$ du calcul précédent.

3.2.4 Sommes et produits télescopiques

Proposition 3 : Soit $m \leqslant n$ deux entiers et $(u_k)_{m\leqslant k\leqslant n+1}$ une famille de réels. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m \qquad \text{et, si les } u_k \text{ sont non nuls,} \qquad \prod_{k=m}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_m}.$$

∘ Démonstration : Par linéarité, puis par la translation $j = k + 1$ dans la première somme,

$$\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{j=m+1}^{n+1} u_j - \sum_{k=m}^{n} u_k.$$

Les termes d'indice compris entre $m + 1$ et n figurent dans les deux sommes et disparaissent, d'après la relation de Chasles : il reste $u_{n+1} - u_m$. Le cas du produit est identique. □

♡ **Méthode : Pour calculer une somme** $\sum a_k$, on cherche une suite (u_k) telle que

$$a_k = u_{k+1} - u_k \quad \text{pour tout } k\,;$$

c'est l'analogue discret de la recherche d'une primitive, la somme télescopique jouant le rôle de l'intégrale $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.

Exemples :

- Pour $k \geqslant 1$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, donc
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$
On peut ainsi majorer une somme qui n'a pas d'expression simple, comme dans l'exercice 19 de la feuille du chapitre 1 :
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$
- Pour $k \geqslant 1$, $k \cdot k! = (k+1)! - k!$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.
- Pour $k \geqslant 2$, $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{k-1}{k} \times \frac{k+1}{k}$. Chacun des deux facteurs donne un produit télescopique :
$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Remarque : Une somme télescopique se reconnaît rarement d'elle-même : il faut souvent la faire apparaître par une décomposition, comme celle de $\frac{1}{k(k+1)}$. On apprendra au chapitre consacré aux fractions rationnelles à obtenir systématiquement ces décompositions, dites *en éléments simples*.

3.2.5 Sommes usuelles

Proposition 4 : Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout réel x :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

∘ Démonstration : **Première somme.** C'est l'argument de Gauss, rédigé plus haut.

Deuxième somme. On télescope la suite $u_k = k^3$. Pour tout k, $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, donc

$$(n+1)^3 - 1 = \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n.$$

On isole la somme cherchée et l'on factorise par $n+1$:

$$6\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) = (n+1)\left(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2\right) = n(n+1)(2n+1).$$

Troisième somme. Pour $x = 1$, on somme $n+1$ fois le nombre 1. Sinon, on note $G = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$, et l'on calcule, par translation d'indice,

$$(1-x)\,G = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (x^k - x^{k+1}) = 1 - x^{n+1},$$

qui est une somme télescopique. On divise par $1 - x \neq 0$. □

Remarques :

- Il est indispensable de connaître ces trois formules par cœur, mais plus encore de savoir les retrouver : la méthode du télescopage de $(k+1)^3 - k^3$ donne de proche en proche toutes les sommes $\sum k^p$. Avec $(k+1)^4 - k^4$, on obtient par exemple

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2.$$

- La troisième formule s'applique aux sommes géométriques qui ne commencent pas à 0, après factorisation : pour $x \neq 1$,

$$\sum_{k=m}^{n} x^k = x^m \sum_{j=0}^{n-m} x^j = x^m \, \frac{1 - x^{n-m+1}}{1-x}.$$

  Il est plus sûr de retenir la règle en mots : *premier terme, fois un moins la raison puissance le nombre de termes, sur un moins la raison.*

- La formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ montre au passage que 6 divise $n(n+1)(2n+1)$, ce que l'exercice 15 de la feuille du chapitre 1 établissait par une disjonction des cas.

Proposition 5 : *(Factorisation de $a^n - b^n$.)* Pour tous réels a, b et tout entier $n \geqslant 1$:

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k \, b^{n-1-k} = (a-b)\big(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\big).$$

∘ Démonstration : On développe le membre de droite par linéarité, puis l'on reconnaît une somme télescopique de la suite $u_k = a^k b^{n-k}$:

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \big(a^{k+1}b^{n-1-k} - a^k b^{n-k}\big) = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = a^n - b^n.$$

□

Exemples :

- Pour $n = 2$ et $n = 3$, on retrouve $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ et $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. Pour $b = 1$ et $a = x$, on retrouve la somme géométrique de la proposition 4.
- Si n est impair, on remplace b par $-b$:

$$a^n + b^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} a^k b^{n-1-k},$$

  par exemple $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. Pour n pair, $a^n + b^n$ ne se factorise pas ainsi, comme le montre $a^2 + b^2$, qui ne s'annule jamais pour $b = -a \neq 0$.
- En arithmétique, la proposition montre que $a-b$ divise $a^n - b^n$ pour tous entiers a et b. Ainsi $2^6 - 1 = 63$ est divisible par $2^2 - 1 = 3$ et par $2^3 - 1 = 7$, puisque $2^6 - 1 = 4^3 - 1^3 = 8^2 - 1^2$.

3.2.6 Regroupements de termes

Lorsque l'expression du terme général dépend de la parité de l'indice, on sépare les indices pairs et les indices impairs, grâce à la relation de Chasles : les entiers pairs de $[\![0\,,2n]\!]$ s'écrivent $2p$ avec $p \in [\![0\,,n]\!]$, et les entiers impairs $2p+1$ avec $p \in [\![0\,,n-1]\!]$.

Exemple : Calculons, pour $n \geqslant 1$,

$$T_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k = 0 - 1 + 2 - 3 + \cdots + 2n.$$

On sépare les deux sortes de termes :

$$T_n = \sum_{p=0}^{n} 2p - \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1) = n(n+1) - \big(n(n-1) + n\big) = n.$$

On peut aussi regrouper les termes deux par deux, $(2-1) + (4-3) + \cdots + (2n - (2n-1))$, ce qui donne directement n paires valant chacune 1.

3.3 Sommes doubles

3.3.1 Sommes sur un produit cartésien

Soit I et J deux ensembles finis. Une famille de réels indexée par $I \times J$ se note $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, et l'on peut la ranger dans un tableau dont les lignes sont indexées par i et les colonnes par j. Sa somme $\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$ est définie à la section 3.2, puisque $I \times J$ est un ensemble fini. Il y a deux manières naturelles de la calculer : sommer chaque ligne, puis ajouter les résultats, ou sommer chaque colonne, puis ajouter les résultats.

Proposition 6 : *(Interversion des sommes.)* Soit I et J deux ensembles finis et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels. Alors

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I} \Big(\sum_{j\in J} a_{i,j} \Big) = \sum_{j\in J} \Big(\sum_{i\in I} a_{i,j} \Big).$$

∘ Démonstration : Les parties $\{i\} \times J$, pour $i \in I$, sont deux à deux disjointes et recouvrent $I \times J$. La relation de Chasles, étendue par récurrence sur le nombre d'éléments de I à une réunion disjointe finie, donne

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I} \Big(\sum_{(i',j)\in\{i\}\times J} a_{i',j} \Big).$$

Pour i fixé, l'application $j \mapsto (i,j)$ est une bijection de J sur $\{i\} \times J$, et la proposition 2 transforme la somme intérieure en $\sum_{j\in J} a_{i,j}$. La seconde égalité s'obtient de même, avec les parties $I \times \{j\}$. □

Proposition 7 : *(Produit de deux sommes.)* Pour deux familles finies $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ de réels :

$$\Big(\sum_{i\in I} x_i \Big) \Big(\sum_{j\in J} y_j \Big) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i\, y_j.$$

∘ Démonstration : Par linéarité, on fait d'abord entrer le facteur $\sum_{j\in J} y_j$ dans la somme sur i, puis le facteur x_i dans la somme sur j :

$$\Big(\sum_{i\in I} x_i \Big) \Big(\sum_{j\in J} y_j \Big) = \sum_{i\in I} \Big(x_i \sum_{j\in J} y_j \Big) = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} x_i\, y_j,$$

et la proposition 6 conclut. □

Remarques :

- C'est la règle de la double distributivité, $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$, étendue à un nombre quelconque de termes : on multiplie chaque terme de la première somme par chaque terme de la seconde. Il faut donc deux indices *distincts* : écrire
$$\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} y_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k \qquad \text{(faux)}$$
est l'erreur la plus répandue sur ce sujet, et elle est grave, puisque la seconde somme ne contient que les termes « diagonaux ».

- Lorsque les deux familles sont égales, le carré d'une somme se décompose en termes diagonaux et en termes rectangles, chacun de ces derniers apparaissant deux fois :
$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i\, x_j.$$
Avec $x_i = i$, on en déduit, grâce à la proposition 4 et à la remarque qui la suit,
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij = \frac{1}{2}\Big(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\Big) = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}.$$
Pour $n=3$, on trouve bien $1\times 2+1\times 3+2\times 3 = 11 = \frac{2\times 3\times 4\times 11}{24}$.

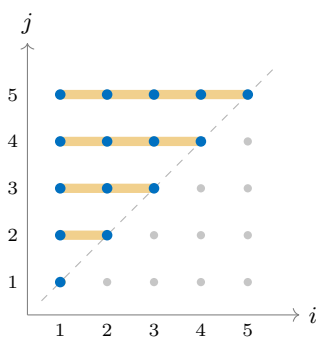
- Avec $x_i = y_j = 1$, la proposition 7 redonne $\mathrm{card}(I\times J) = \mathrm{card}(I)\times\mathrm{card}(J)$, c'est-à-dire le lemme 6 du chapitre 2. Plus généralement, le symbole $\sum$ permet d'énoncer le lemme des bergers du chapitre 2 sans supposer que les fibres ont toutes le même cardinal : pour une application $f : E \to F$ entre deux ensembles finis,
$$\mathrm{card}(E) = \sum_{x\in E} 1 = \sum_{y\in F}\Big(\sum_{x\in f^{-1}(\{y\})} 1\Big) = \sum_{y\in F} \mathrm{card}\big(f^{-1}(\{y\})\big).$$
En effet, les fibres $f^{-1}(\{y\})$, pour $y\in F$, sont deux à deux disjointes et recouvrent E, et l'on applique la relation de Chasles étendue à cette réunion disjointe, comme dans la démonstration de la proposition 6. Lorsque toutes les fibres ont k éléments, la somme vaut $k\times\mathrm{card}(F)$: c'est le lemme des bergers.

3.3.2 Sommes triangulaires

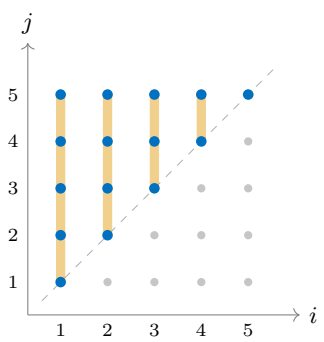
On rencontre souvent des sommes portant sur les couples (i,j) tels que $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$, c'est-à-dire sur la moitié d'un tableau carré, diagonale comprise.

Proposition 8 : Soit $n\geqslant 1$ et $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ une famille de réels. Alors
$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}.$$

∘ Démonstration : Notons $T = \{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid i\leqslant j\}$. Pour chaque $j\in[\![1,n]\!]$, les couples de T de seconde composante j sont les (i,j) avec $1\leqslant i\leqslant j$; ces parties sont disjointes et recouvrent T, et la relation de Chasles donne la première égalité. Pour la seconde, on découpe T selon la première composante : les couples de première composante i sont les (i,j) avec $i\leqslant j\leqslant n$. □



d'abord sur i, à j fixé



d'abord sur j, à i fixé

Les points bleus sont les couples (i,j) de T, situés au-dessus de la diagonale ou sur elle, pour $n=5$. À gauche, on les regroupe par lignes : la ligne de hauteur j contient les j couples $(1,j)$, …, (j,j). À droite, on les regroupe par colonnes : la colonne d'abscisse i contient les $n-i+1$ couples (i,i), …, (i,n). Les deux regroupements comptent les mêmes points, et c'est tout le contenu de la proposition 8.

♡ **Méthode : Pour intervertir une somme triangulaire** :
- ▶ On écrit l'ensemble des indices sous la forme d'un système d'inégalités, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.
- ▶ Si l'on somme d'abord sur i, on lit que j décrit $[\![1\,,n]\!]$ et i décrit $[\![1\,,j]\!]$.
- ▶ Si l'on somme d'abord sur j, on lit que i décrit $[\![1\,,n]\!]$ et j décrit $[\![i\,,n]\!]$.

Un dessin comme celui ci-dessus évite toute erreur de bornes.

Exemples :

- Calculons $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$. Le facteur $\frac{1}{j}$ incite à sommer d'abord sur i, à j fixé :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{n(n+1)}{2} + n\Big) = \frac{n(n+3)}{4}.$$

  Dans l'autre ordre, on aurait dû calculer $\displaystyle\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}$, qui n'a pas d'expression simple : le choix de l'ordre est essentiel.

- Pour calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,2^k$, on écrit $k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} 1$, ce qui fait apparaître une somme triangulaire, que l'on intervertit :

$$S = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} 2^k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} 2^k = \sum_{i=1}^{n} \big(2^{n+1} - 2^i\big) = n\,2^{n+1} - (2^{n+1}-2) = (n-1)\,2^{n+1} + 2.$$

  La somme intérieure est géométrique : $\displaystyle\sum_{k=i}^{n} 2^k = 2^i\,(2^{n-i+1}-1) = 2^{n+1} - 2^i$. Pour $n=3$, on vérifie $2+8+24 = 34 = 2\times 16 + 2$.

3.4 Coefficients binomiaux

3.4.1 Factorielle et coefficients binomiaux

Définition : Pour $n \in \mathbb{N}$, la **factorielle** de n est

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1\times 2\times \cdots \times n,$$

avec en particulier $0! = 1$, comme produit vide. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{Z}$, le **coefficient binomial** « k parmi n » est

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{si } 0\leqslant k\leqslant n, \qquad \binom{n}{k} = 0 \quad \text{si } k<0 \text{ ou } k>n.$$

Pour $0\leqslant k\leqslant n$, on simplifie la fraction par $(n-k)!$, ce qui donne une expression plus commode pour le calcul :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, \qquad \text{par exemple} \qquad \binom{10}{3} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} = 120.$$

Le numérateur comporte k facteurs, comme le dénominateur.

Proposition 9 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

(i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, et $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ *(symétrie).*

(ii) Si $n \geqslant 1$: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ *(formule du pion).*

(iii) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ *(formule de Pascal).*

∘ Démonstration : **(i)** Les trois premières valeurs se lisent sur la définition. Pour la symétrie, $k \mapsto n-k$ échange les cas $0 \leqslant k \leqslant n$ et $0 \leqslant n-k \leqslant n$, et dans ce cas la formule est symétrique en k et $n-k$; hors de ce cas, les deux membres sont nuls.

(ii) Si $1 \leqslant k \leqslant n$, alors

$$k\binom{n}{k} = \frac{k \cdot n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!\,\big((n-1)-(k-1)\big)!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Si $k \leqslant 0$ ou $k > n$, les deux membres sont nuls : pour $k = 0$ grâce au facteur k, et sinon parce que $k-1$ est hors de $[\![0\,,n-1]\!]$.

(iii) Si $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on réduit au même dénominateur $(k+1)!\,(n-k)!$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!\,(k+1) + n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,\big((n+1)-(k+1)\big)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

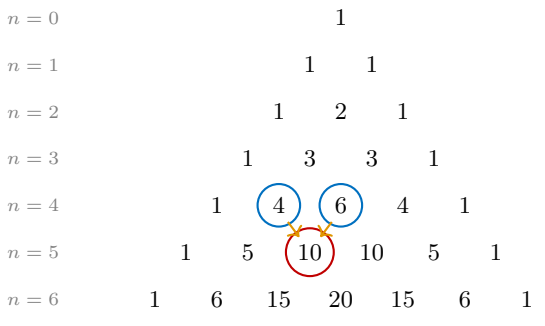
Les cas restants se vérifient directement. Si $k = n$, on obtient $1+0=1$. Si $k=-1$, on obtient $0+1=1$. Si $k < -1$ ou $k > n$, les trois coefficients sont nuls. □

Remarques :

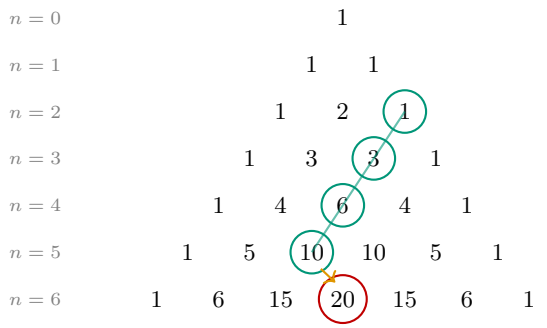
- La convention $\binom{n}{k} = 0$ hors de $[\![0\,,n]\!]$ n'a pas d'autre raison d'être que de rendre la formule de Pascal vraie pour *tout* $k \in \mathbb{Z}$, ce qui dispense de traiter les bords séparément dans les calculs.
- La formule de Pascal montre, par récurrence sur n, que les coefficients binomiaux sont des *entiers naturels*, ce que la définition par une fraction ne laisse pas deviner. On en déduit par exemple que le produit de k entiers consécutifs est divisible par $k!$, puisque

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = k!\binom{n}{k}.$$

La formule de Pascal permet de calculer les coefficients binomiaux de proche en proche, en les rangeant dans un tableau triangulaire dont la ligne n contient les $\binom{n}{k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.



$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$



$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = \binom{6}{3}$

Chaque coefficient est la somme des deux coefficients situés au-dessus de lui, ce que la figure de gauche montre sur $4+6=10$. À droite, la somme des coefficients d'une même diagonale, en vert, depuis le bord jusqu'à une ligne donnée, est le coefficient situé juste au-dessous et à côté du dernier, ici $1+3+6+10=20$: c'est la forme moderne de la « conséquence seconde » de Pascal citée en épigraphe, que démontre la proposition 10.

3.4.2 Interprétation combinatoire

Théorème 1 : Nombre de parties à k éléments :
Soit E un ensemble fini à n éléments et $k \in \mathbb{Z}$. Le nombre de parties de E à k éléments est $\binom{n}{k}$.

∘ Démonstration : On utilise deux résultats démontrés au chapitre 2 : deux ensembles en bijection ont le même nombre d'éléments (lemme 2), et une réunion de deux ensembles finis disjoints est finie, de cardinal la somme des cardinaux (lemme 4). Notons $P(n,k)$ le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. Il ne dépend que de n et k : une bijection $h : E \to E'$ entre deux ensembles à n éléments induit une bijection $A \mapsto h(A)$ entre leurs parties à k éléments. La récurrence qui suit montre en même temps que l'ensemble de ces parties est fini. Montrons par récurrence sur n que $P(n,k) = \binom{n}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Initialisation. L'ensemble vide a une seule partie, à 0 élément : $P(0,0) = 1 = \binom{0}{0}$, et $P(0,k) = 0 = \binom{0}{k}$ pour $k \neq 0$.

Hérédité. Supposons le résultat vrai au rang n, et soit E un ensemble à $n+1$ éléments, a un élément de E et $E' = E \setminus \{a\}$, qui a n éléments d'après le lemme 3 du chapitre 2. Les parties de E à $k+1$ éléments se répartissent en deux catégories disjointes :

- celles qui ne contiennent pas a, qui sont les parties de E' à $k+1$ éléments ; il y en a $P(n,k+1)$;
- celles qui contiennent a, qui s'écrivent $B \cup \{a\}$ avec B partie de E' à k éléments, la réunion disjointe $B \cup \{a\}$ ayant bien $k+1$ éléments d'après le lemme 4 ; l'application $B \mapsto B \cup \{a\}$ est une bijection, de réciproque $A \mapsto A \setminus \{a\}$, donc il y en a $P(n,k)$.

Le lemme 4, appliqué à ces deux catégories, puis l'hypothèse de récurrence et la formule de Pascal donnent, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$P(n+1,k+1) = P(n,k) + P(n,k+1) = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

□

Remarques :

- Le théorème donne un sens concret aux propriétés de la proposition 9. La symétrie traduit le fait que $A \mapsto E \setminus A$ est une bijection entre les parties à k éléments et les parties à $n-k$ éléments. La formule du pion compte de deux manières les couples (A,x) formés d'une partie A à k éléments et d'un élément x de A, que l'on peut appeler son « chef ».
- On lit souvent $\binom{n}{k}$ comme le nombre de façons de *choisir* k objets parmi n, sans tenir compte de l'ordre : le nombre de mains de 5 cartes dans un jeu de 32 est $\binom{32}{5} = 201\,376$. Le chapitre 21 développera ce point de vue.

3.4.3 Formule du binôme

Théorème 2 : Formule du binôme de Newton :
Pour tous réels a et b et tout entier naturel n :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

∘ Démonstration : On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$, les deux membres valent 1. Supposons la formule vraie au rang n. Alors

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}.$$

Dans la première somme, on effectue la translation $j = k+1$; dans la seconde, on renomme l'indice j. Grâce à la convention sur les coefficients nuls, on peut faire varier j de 0 à $n+1$ dans les deux sommes, en ajoutant des termes nuls :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j} = \sum_{j=0}^{n+1} \left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right) a^j b^{n+1-j}.$$

La formule de Pascal donne $\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}$, ce qui est la formule au rang $n+1$. □

Remarques :

- La démonstration n'utilise que les règles de calcul dans $\mathbb{R}$, et notamment la commutativité $ab = ba$, cachée dans l'écriture $a^k b^{n-k}$. La formule restera vraie pour les nombres complexes ; elle restera vraie pour deux matrices A et B à condition qu'elles commutent, c'est-à-dire que $AB = BA$, et elle est fausse sinon.
- On peut aussi comprendre la formule en développant le produit $(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ de n facteurs : chaque terme du développement s'obtient en choisissant a dans certains facteurs et b dans les autres, et le terme $a^k b^{n-k}$ apparaît autant de fois que l'on peut choisir les k facteurs qui fournissent a, c'est-à-dire $\binom{n}{k}$ fois, d'après le théorème 1.

Exemples :

- La ligne $n = 5$ du triangle donne $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. Pour $(a-b)^n$, on remplace b par $-b$, ce qui fait alterner les signes.
- Le coefficient de x^3 dans $(2x-1)^6$ est $\binom{6}{3} \times 2^3 \times (-1)^3 = -160$. L'erreur la plus répandue est d'oublier d'élever à la puissance le coefficient 2, ou le signe.
- Pour $x \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$, tous les termes de $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ sont positifs, et l'on peut ne garder que les deux premiers : $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$. Cette minoration servira au chapitre 7 à montrer que q^n tend vers $+\infty$ lorsque $q > 1$, en écrivant $q = 1 + x$.

Proposition 10 : Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \qquad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}.$$

De plus, pour tous entiers naturels $k \leqslant n$, on a la **formule de la crosse de hockey** :

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

∘ Démonstration : Les deux premières égalités sont la formule du binôme avec $a = b = 1$, puis $a = -1$ et $b = 1$; la seconde demande $n \geqslant 1$, pour que $0^n = 0$. Pour la troisième, la formule du pion, puis la translation $j = k-1$ et la première égalité au rang $n-1$ donnent

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n\, 2^{n-1}.$$

Pour la dernière, la formule de Pascal s'écrit $\binom{j}{k} = \binom{j+1}{k+1} - \binom{j}{k+1}$: la somme est télescopique, et elle vaut $\binom{n+1}{k+1} - \binom{k}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. □

Remarques :

- La première égalité donne une nouvelle démonstration du fait, vu au chapitre 1, qu'un ensemble à n éléments a 2^n parties : on compte séparément celles qui ont $0, 1, \ldots, n$ éléments. La deuxième dit qu'un ensemble non vide a autant de parties à nombre pair d'éléments que de parties à nombre impair d'éléments, soit 2^{n-1} de chaque sorte.
- La formule de la crosse de hockey contient les sommes usuelles. Pour $k = 1$, elle donne $\sum_{j=1}^{n} j = \binom{n+1}{2}$, et pour $k = 2$, en écrivant $j^2 = 2\binom{j}{2} + j$, elle donne

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

ce qui fournit une seconde démonstration de la proposition 4.

3.5 Systèmes linéaires et méthode du pivot

3.5.1 Vocabulaire

Définition : Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Un **système linéaire** de n équations à p inconnues $x_1, \ldots, x_p$ est un système de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{n,p}\,x_p & = & b_n \end{cases}$$

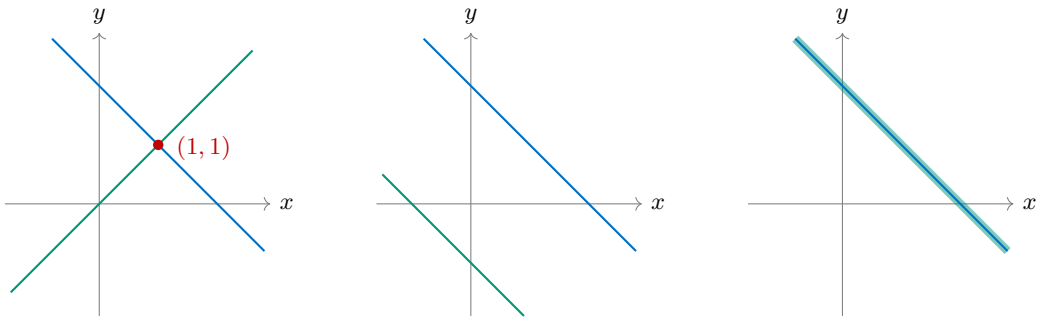
où les **coefficients** $a_{i,j}$ et les **seconds membres** b_i sont des réels. Une **solution** de (S) est un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ qui vérifie les n équations. Le système est dit **compatible** s'il a au moins une solution, **incompatible** sinon, et **homogène** si tous les seconds membres sont nuls. Deux systèmes sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Remarques :

- Avec les notations de la section 3.2, la i-ième équation s'écrit $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\,x_j = b_i$. Le premier indice d'un coefficient repère l'équation, le second l'inconnue.
- Un système homogène est toujours compatible, puisque $(0, \ldots, 0)$ en est une solution. On verra dans le chapitre consacré au calcul matriciel que les solutions d'un système compatible s'obtiennent toutes en ajoutant à l'une d'elles les solutions du système homogène associé.

3.5.2 Interprétation géométrique

Pour deux inconnues, une équation $ax + by = c$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est l'équation cartésienne d'une droite du plan, et résoudre un système de deux équations revient à déterminer l'intersection de deux droites. Trois situations peuvent se présenter.

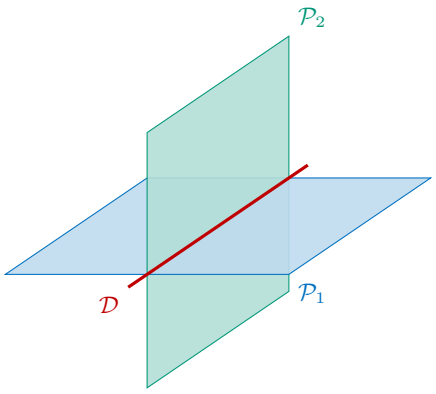


droites sécantes — droites strictement parallèles — droites confondues

La droite bleue a pour équation $x+y = 2$ dans les trois cas. À gauche, la droite verte d'équation $x-y = 0$ la coupe en un seul point, et le système a une unique solution $(1, 1)$. Au centre, la droite d'équation $x+y = -1$

lui est parallèle sans la rencontrer : le système est incompatible. À droite, l'équation $2x + 2y = 4$ décrit la même droite, et le système a une infinité de solutions, les couples $(x, 2-x)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Pour trois inconnues, une équation $ax+by+cz = d$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ est l'équation d'un plan de l'espace, et un système est l'étude de l'intersection de plusieurs plans. Deux plans non parallèles se coupent suivant une droite : un système de deux équations à trois inconnues, s'il est compatible, a donc en général une infinité de solutions, qui dépendent d'un paramètre.



Le plan horizontal $\mathcal{P}_1$, en bleu, et le plan vertical $\mathcal{P}_2$, en vert, se coupent suivant la droite $\mathcal{D}$, en rouge : chaque point de $\mathcal{D}$ fournit une solution du système formé par leurs deux équations. Un troisième plan coupera en général $\mathcal{D}$ en un seul point, mais il peut aussi lui être parallèle, ou la contenir.

3.5.3 Opérations élémentaires

Définition : On note $L_1, \dots, L_n$ les équations d'un système. On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes du système les trois opérations suivantes :

- l'**échange** de deux lignes, noté $L_i \leftrightarrow L_j$;
- la **multiplication** d'une ligne par un réel *non nul* λ, notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$;
- l'**ajout** à une ligne d'un multiple d'une *autre* ligne, noté $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, avec $j \neq i$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition 11 : Une opération élémentaire transforme un système en un système équivalent.

∘ Démonstration : Notons (S) le système de départ et (S') le système obtenu. On montre d'abord que toute solution de (S) est solution de (S'), puis que l'opération peut être défaite par une autre opération élémentaire, ce qui donne l'inclusion réciproque.

Les solutions de (S) *sont solutions de* (S'). Chaque équation de (S') est une équation de (S), ou bien λL_i, ou bien $L_i + \lambda L_j$. Si un p-uplet vérifie L_i et L_j, il vérifie aussi ces combinaisons, par linéarité.

Les opérations sont réversibles. L'échange $L_i \leftrightarrow L_j$ se défait par lui-même. L'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ se défait par $L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i$, ce qui exige $\lambda \neq 0$. L'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ se défait par $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$, ce qui exige que la ligne L_j n'ait pas été modifiée, d'où la condition $j \neq i$. Les solutions de (S') sont donc solutions du système obtenu en défaisant l'opération, qui est (S). □

Remarques :

- Les deux restrictions de la définition sont indispensables. Multiplier une ligne par 0 la transforme en $0 = 0$ et fait perdre une équation. Ajouter à une ligne un multiple d'elle-même revient à la multiplier par $1 + \lambda$, ce qui est interdit pour $\lambda = -1$.
- L'erreur la plus répandue est d'effectuer *simultanément* $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$: on obtient deux lignes opposées, et l'information contenue dans $L_1 + L_2$ est perdue. Le système $x + y = 2$, $x - y = 0$, qui n'a que la solution $(1,1)$, deviendrait ainsi $2y = 2$, $-2y = -2$, qui admet tous les couples $(x, 1)$. On effectue les opérations *l'une après l'autre*, en n'utilisant comme ligne L_j qu'une ligne qui n'est pas modifiée à la même étape.

3.5.4 L'algorithme du pivot

Un système est dit **échelonné** si chaque équation commence par strictement plus d'inconnues de coefficient nul que la précédente, les éventuelles équations sans inconnue, de la forme $0 = b$, étant placées à la fin. Un système échelonné se résout de bas en haut, par *remontée*. L'algorithme du pivot, ou d'élimination de Gauss, transforme tout système en un système échelonné par une suite d'opérations élémentaires.

♡ **Méthode : Algorithme du pivot** :

- On choisit une équation dans laquelle la première inconnue x_1 figure avec un coefficient non nul, le **pivot**, et on la place en première ligne par un échange. On choisit de préférence un pivot égal à 1, pour éviter les fractions.
- Pour chaque ligne L_i avec $i \geqslant 2$, on élimine x_1 par l'opération $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$.
- On recommence avec les lignes $L_2, \dots, L_n$ et l'inconnue suivante, la première ligne n'étant plus modifiée. Si une inconnue n'apparaît plus dans aucune des lignes restantes, on passe à la suivante.
- On conclut sur le système échelonné obtenu. Une ligne $0 = b$ avec $b \neq 0$ rend le système incompatible. Sinon, les inconnues qui ne sont pas en tête d'une ligne sont des **paramètres** libres, et l'on exprime les autres en fonction d'elles, de bas en haut.

Exemple : **Un système à solution unique.** On résout

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = 7 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

On élimine x des lignes 2 et 3 grâce au pivot 1 de la première ligne, par $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$. Puis on élimine y de la ligne 3 par $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$:

$$\iff \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -3y + 3z = 3 \\ 3y + z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -3y + 3z = 3 \\ 4z = 8 \end{cases}$$

La remontée donne $z = 2$, puis $-3y = 3 - 6$, soit $y = 1$, puis $x = 2 - 2 + 2 = 2$.

L'unique solution est $(x, y, z) = (2, 1, 2)$.

On vérifie dans le système initial : $2+2-2 = 2$, $4+1+2 = 7$ et $-2+1+4 = 3$. Géométriquement, les trois plans se coupent en un seul point.

Exemple : **Un système à une infinité de solutions.** On résout

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \end{cases}$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, donnent

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 3 \\ y + 2z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

L'inconnue z n'est en tête d'aucune ligne : c'est un paramètre. On pose $z = t$, puis $y = 3 - 2t$ et $x = 3 - y - z = t$.

L'ensemble des solutions est $\{(t,\ 3 - 2t,\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

C'est une droite de l'espace, passant par $(0, 3, 0)$ et dirigée par $(1, -2, 1)$: les trois plans ont une droite commune, ce qui s'explique par la relation $L_3 = L_1 + L_2$ entre les équations initiales.

Exemple : **Un système incompatible.** On résout

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + 3z = 4 \end{cases}$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, donnent

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2y + z = 1 \\ -2y + z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2y + z = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

La dernière ligne est impossible : le système n'a aucune solution. Si le second membre de la troisième équation initiale valait 3 au lieu de 4, la dernière ligne deviendrait $0 = 0$, et l'on obtiendrait une droite de solutions, comme dans l'exemple précédent : la compatibilité dépend des seconds membres, l'échelonnement n'en dépend pas.

Remarques :

- Le nombre de lignes non nulles du système échelonné ne dépend pas des choix de pivots effectués : c'est le *rang* du système, qui sera défini et étudié dans le chapitre consacré au calcul matriciel. Pour un système de n équations à n inconnues, la solution est unique exactement lorsque le rang vaut n.
- Lorsque les coefficients dépendent d'un paramètre, le choix d'un pivot qui peut s'annuler oblige à distinguer des cas. Pour résoudre $x + my = 1$, $mx + y = 1$, on prend le pivot 1 de la première ligne, et l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$ donne $(1 - m^2)\, y = 1 - m$. Si $m \neq \pm 1$, la solution est unique, $x = y = \frac{1}{1+m}$; si $m = 1$, les deux équations sont identiques ; si $m = -1$, la dernière ligne s'écrit $0 = 2$ et le système est incompatible.

3.6 Bilan

Les formules de ce chapitre sont des outils que l'on utilisera sans cesse ; il faut les connaître, mais surtout savoir les retrouver par l'une des trois techniques fondamentales, le changement d'indice, le télescopage et l'interversion des sommes.

Résultat	**Formule**	**Méthode**
somme des entiers	$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$	symétrie $k \mapsto n+1-k$
somme des carrés	$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	télescopage de k^3
somme géométrique	$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad x \neq 1$	télescopage de x^k
factorisation	$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$	télescopage
somme triangulaire	$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$	découpage de l'ensemble des indices
formule de Pascal	$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$	calcul, ou dénombrement
binôme de Newton	$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$	récurrence et formule de Pascal
système linéaire	système échelonné équivalent	opérations élémentaires, l'une après l'autre

Le chapitre consacré au calcul matriciel reprendra la méthode du pivot dans le langage des matrices, et le chapitre 21 donnera aux coefficients binomiaux leur place naturelle, celle du dénombrement.