Chapitre 4

Nombres complexes et trigonométrie

4.1 Introduction historique

> *Si quelqu'un te dit : divise 10 en deux parties dont l'une, multipliée par l'autre, produise 30 ou 40, il est évident que ce cas ou cette question est impossible. Néanmoins, nous la résoudrons de cette façon.*
>
> Jérôme Cardan - *Ars magna*, 1545

On raconte volontiers que les nombres complexes ont été inventés pour résoudre $x^2 = -1$. C'est inexact : les algébristes de la Renaissance déclaraient simplement une telle équation impossible, comme Cardan dans le passage cité. Ce qui a rendu les « quantités impossibles » indispensables, c'est une équation du troisième degré dont la solution était parfaitement réelle.

4.1.1 L'énigme de Bombelli

En 1572, **Rafael Bombelli** applique la formule de résolution publiée par Cardan à l'équation $x^3 = 15x + 4$, dont 4 est visiblement solution. La formule donne

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} \; + \; \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

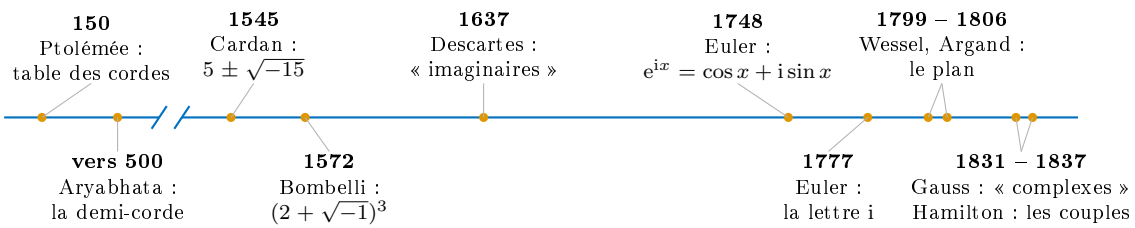
expression dénuée de sens pour ses contemporains. Bombelli ose calculer avec $\sqrt{-1}$ comme avec un nombre, en convenant que son carré vaut -1, et constate que

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121} \qquad \text{et} \qquad (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}.$$

La somme des deux racines cubiques vaut donc $(2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$: les quantités impossibles disparaissent et laissent la bonne réponse. Ce calcul s'écrira $(2 + \mathrm{i})^3 = 2 + 11\mathrm{i}$ à la section 4.3.

4.1.2 Un ordre inverse de celui de l'histoire

Il faut ensuite trois siècles pour savoir ce que sont ces nombres : Euler les relie à la trigonométrie, Wessel et Argand les placent dans le plan, Hamilton les définit enfin comme des couples de réels. Ce chapitre suit l'ordre inverse : il part de la définition de Hamilton (section 4.3) pour en déduire les formules d'Euler (section 4.4), les équations (sections 4.6 et 4.7), où se résoudra le problème de Cardan, et la géométrie (section 4.9). La frise ci-dessous, qui comprime l'Antiquité à gauche, en retrace les étapes.



4.2 Trigonométrie

On reprend la trigonométrie du lycée en précisant ce que l'on admet et ce que l'on démontre. Le point de départ est géométrique ; tout le reste se déduit d'une seule formule, celle du cosinus d'une différence.

4.2.1 Le cercle trigonométrique

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le **cercle trigonométrique** est le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1, c'est-à-dire l'ensemble des points (x, y) tels que $x^2 + y^2 = 1$. On note A le point $(1, 0)$.

Le réel 2π est la longueur de $\mathcal{C}$, et un même point du cercle est atteint par une infinité de mesures, qui diffèrent d'un multiple de 2π : il faut une relation pour les identifier.

Définition : Soit $\alpha > 0$ un réel. Deux réels a et b sont dits **congrus modulo** α s'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = k\alpha$. On note alors

$$a \equiv b \ [\alpha].$$

Remarques :

- La congruence modulo α est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$, au sens du chapitre 2 : elle est réflexive ($a - a = 0 \cdot \alpha$), symétrique (si $a - b = k\alpha$, alors $b - a = (-k)\alpha$) et transitive (si $a - b = k\alpha$ et $b - c = \ell\alpha$, alors $a - c = (k + \ell)\alpha$). On peut ajouter membre à membre deux congruences modulo α, et multiplier une congruence par un entier.
- On ne peut pas, en revanche, diviser une congruence par un entier sans diviser aussi le module. L'erreur la plus répandue est de passer de $3x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ à $x \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$: la bonne conclusion est

$$3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{\pi}{6} + k\,\frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x \equiv \frac{\pi}{6}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right],$$

  ce qui donne trois solutions distinctes dans $[0\,, 2\pi[$, et non une seule.

La définition rigoureuse des fonctions cosinus et sinus demande de mesurer la longueur d'un arc de cercle, ou l'aire d'un secteur, ce qui relève du calcul intégral (chapitre 18) ou des séries entières, étudiées en seconde année. On admet donc les propriétés géométriques suivantes, qui sont celles qu'utilise le lycée.

Définition et propriétés admises : Il existe deux fonctions $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le **cosinus** et le **sinus**, telles que, en notant $M(t)$ le point de coordonnées $(\cos t, \sin t)$:

(i) pour tout réel t, le point $M(t)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$, c'est-à-dire $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$;

(ii) tout point de $\mathcal{C}$ est un point $M(t)$, et $M(t) = M(t') \iff t \equiv t'\ [2\pi]$;

(iii) pour $t \in [0\,, 2\pi[$, le réel t est la longueur de l'arc parcouru de A à $M(t)$ dans le sens direct, et, pour $t \in [0\,, \frac{\pi}{2}]$, l'aire du secteur angulaire $AOM(t)$ vaut $\frac{t}{2}$;

(iv) la longueur de la corde $M(a)M(b)$ ne dépend que de la différence $a - b$;

(v) $M(0) = (1, 0)$, $M(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$, $M(\pi) = (-1, 0)$, $M(-\frac{\pi}{2}) = (0, -1)$, et $\sin t > 0$ pour tout $t \in]0\,, \pi[$.

Remarques :

- Le point (iv) traduit le fait qu'une rotation de centre O conserve les distances : la rotation qui envoie $M(b)$ sur $M(0)$ envoie $M(a)$ sur $M(a-b)$. C'est la seule propriété « géométrique » dont on aura besoin pour établir les formules d'addition.
- D'après (ii), les fonctions cos et sin sont **périodiques de période** 2π : pour tout réel t, on a $\cos(t + 2\pi) = \cos t$ et $\sin(t + 2\pi) = \sin t$.
- L'unité de mesure est le radian : un angle d'un tour mesure 2π, et non 360. Toutes les formules d'analyse de ce cours, à commencer par $\sin' = \cos$, sont fausses si l'on mesure les angles en degrés.

4.2.2 Formules d'addition

Théorème 1 : Formules d'addition :
Pour tous réels a et b :

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \qquad \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

∘ Démonstration : *Première formule.* On calcule de deux façons le carré de la longueur d de la corde $M(a)M(b)$. Avec les coordonnées des deux points, et la relation (i),

$$d^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 = 2 - 2(\cos a\cos b + \sin a\sin b).$$

D'après (iv), d est aussi la longueur de la corde $M(a-b)M(0)$, dont les extrémités ont pour coordonnées $(\cos(a-b), \sin(a-b))$ et $(1,0)$:

$$d^2 = \big(\cos(a-b) - 1\big)^2 + \sin^2(a-b) = 2 - 2\cos(a-b).$$

La comparaison des deux expressions donne la première formule.

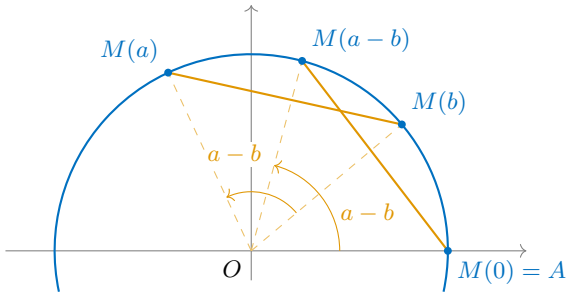
Conséquences immédiates. Avec $a = 0$, il vient $\cos(-b) = \cos b$, puisque $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$. Avec $a = \frac{\pi}{2}$, il vient $\cos(\frac{\pi}{2} - b) = \sin b$ pour tout b ; en remplaçant b par $\frac{\pi}{2} - b$, on obtient aussi $\sin(\frac{\pi}{2} - b) = \cos b$. Enfin, avec $a = -\frac{\pi}{2}$, puis en remplaçant b par $-b$,

$$\sin(-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = \cos\left(b - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos b\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin b\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin b.$$

Les trois autres formules. On remplace b par $-b$ dans la première, ce qui donne la deuxième. Pour la troisième,

$$\sin(a+b) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b = \sin a\cos b + \cos a\sin b,$$

et la quatrième s'en déduit en remplaçant b par $-b$. □

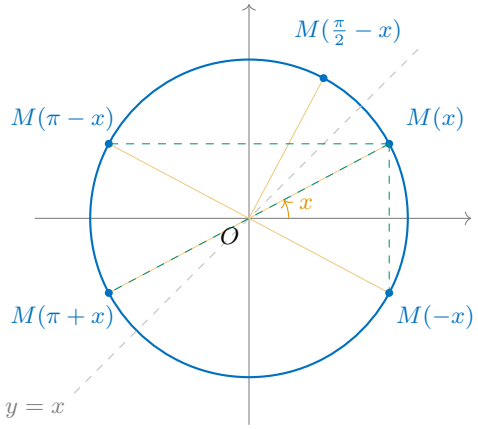


Les deux cordes orange sous-tendent des arcs de même longueur $a-b$: elles sont donc de même longueur, et c'est cette égalité, traduite en coordonnées, qui donne la formule de $\cos(a-b)$.

Proposition 1 : *(Angles associés.)* Pour tout réel x :

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

∘ Démonstration : Les formules en $-x$ et en $\frac{\pi}{2} - x$ ont été obtenues dans la démonstration précédente. Les autres résultent des formules d'addition et des valeurs $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$; par exemple, $\sin(\pi - x) = \sin\pi\cos x - \cos\pi\sin x = \sin x$. □



Les points $M(-x)$, $M(\pi-x)$ et $M(\pi+x)$ sont les symétriques de $M(x)$ par rapport à l'axe des abscisses, à l'axe des ordonnées et au centre O, et $M(\frac{\pi}{2}-x)$ est son symétrique par rapport à la première bissectrice : chaque formule de la proposition se lit sur la figure, en comparant les coordonnées.

Proposition 2 : *(Valeurs remarquables.)*

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

∘ Démonstration : Pour $t\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on a $\cos t=\sin(t+\frac{\pi}{2})>0$ d'après (v). Posons $c=\cos\frac{\pi}{4}$. La formule $\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1$, cas particulier des formules d'addition, donne $0=\cos\frac{\pi}{2}=2c^2-1$, d'où $c=\frac{\sqrt{2}}{2}$ puisque $c>0$; et $\sin\frac{\pi}{4}=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=c$. Posons maintenant $c=\cos\frac{\pi}{3}$. La formule $\cos(3a)=4\cos^3 a-3\cos a$, que l'on obtient en développant $\cos(2a+a)$, donne

$$-1=\cos\pi=4c^3-3c,\qquad\text{soit}\qquad 4c^3-3c+1=(c+1)(2c-1)^2=0.$$

Comme $c>0$, on a $c=\frac{1}{2}$, puis $\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{1-c^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, puisque ce sinus est positif. Les valeurs en $\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$ s'en déduisent par la proposition 1. □

Remarque : Il ne faut pas apprendre par cœur les valeurs en $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{3}$, et ainsi de suite, mais les retrouver par les symétries de la figure précédente. Ainsi $\cos\frac{5\pi}{6}=\cos(\pi-\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

Proposition 3 : *(Formules de duplication et de produit.)* Pour tous réels a et b :

$$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a \qquad \sin(2a)=2\sin a\cos a$$

$$\cos a\cos b=\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2} \qquad \sin a\sin b=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$

$$\sin a\cos b=\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$$

∘ Démonstration : On prend $b=a$ dans les formules de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$, puis l'on utilise $\cos^2 a+\sin^2 a=1$. Pour les produits, on ajoute ou l'on retranche membre à membre les formules d'addition : par exemple, $\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b$. □

Remarques :

- Les formules de duplication se lisent aussi dans l'autre sens, et c'est souvent ainsi qu'on les utilise :
$$\cos^2 a=\frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad\text{et}\qquad \sin^2 a=\frac{1-\cos(2a)}{2}.$$
Elles transforment un carré en une expression du premier degré en $\cos(2a)$: c'est le premier exemple de *linéarisation*, que la section 4.4 systématisera.

- On ne retient pas les formules de produit : on les retrouve en une ligne à partir des formules d'addition, comme dans la démonstration. On verra à la section 4.4 que les nombres complexes permettent aussi de retrouver toutes ces formules sans effort de mémoire.

4.2.3 Équations trigonométriques

Proposition 4 : Pour tous réels a et b :

$$\cos a = \cos b \iff \big(a \equiv b\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv -b\ [2\pi]\big)$$

$$\sin a = \sin b \iff \big(a \equiv b\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv \pi - b\ [2\pi]\big)$$

En particulier, $\cos a = 0 \iff a \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $\sin a = 0 \iff a \equiv 0\ [\pi]$.

∘ Démonstration : On commence par $\sin u = 0$. Le point $M(u)$ est alors un point du cercle d'ordonnée nulle, c'est-à-dire $A = M(0)$ ou $M(\pi)$; d'après (ii), $u \equiv 0\ [2\pi]$ ou $u \equiv \pi\ [2\pi]$, ce qui s'écrit $u \equiv 0\ [\pi]$. La réciproque est claire. Ensuite, en écrivant $a = p + q$ et $b = p - q$ avec $p = \frac{a+b}{2}$ et $q = \frac{a-b}{2}$, les formules d'addition donnent

$$\cos a - \cos b = \cos(p+q) - \cos(p-q) = -2\sin p \sin q = -2\sin\frac{a+b}{2}\,\sin\frac{a-b}{2}.$$

Ce produit est nul si et seulement si $\frac{a+b}{2} \equiv 0\ [\pi]$ ou $\frac{a-b}{2} \equiv 0\ [\pi]$, c'est-à-dire, en multipliant par 2 *y compris le module*, $a \equiv -b\ [2\pi]$ ou $a \equiv b\ [2\pi]$. Pour le sinus, on écrit $\sin a = \cos(\frac{\pi}{2} - a)$ et $\sin b = \cos(\frac{\pi}{2} - b)$, et l'on applique ce qui précède : $\frac{\pi}{2} - a \equiv \pm(\frac{\pi}{2} - b)\ [2\pi]$ équivaut à $a \equiv b\ [2\pi]$ ou $a \equiv \pi - b\ [2\pi]$. Enfin, $\cos a = 0$ équivaut à $\sin(\frac{\pi}{2} - a) = 0$. □

Exemple : On résout l'équation $\sin(2x) = \cos x$ d'inconnue réelle x. On écrit $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, et la proposition 4 donne

$$\begin{aligned}\sin(2x) = \cos x &\iff \Big(2x \equiv \frac{\pi}{2} - x\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x \equiv \pi - \Big(\frac{\pi}{2} - x\Big)\ [2\pi]\Big)\\ &\iff \Big(x \equiv \frac{\pi}{6}\ \Big[\frac{2\pi}{3}\Big] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]\Big).\end{aligned}$$

Dans l'intervalle $[0\,, 2\pi[$, la première famille fournit $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{2}$, la seconde fournit $\frac{\pi}{2}$:

$$\text{l'ensemble des solutions dans } [0\,, 2\pi[\text{ est } \Big\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\Big\}.$$

On peut contrôler ce résultat en factorisant : $\sin(2x) - \cos x = \cos x\,(2\sin x - 1)$ s'annule lorsque $\cos x = 0$, ce qui donne $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, ou lorsque $\sin x = \frac{1}{2}$, ce qui donne $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

♡ **Méthode : Pour résoudre une inéquation trigonométrique simple** :

- ▶ On résout d'abord l'équation associée.
- ▶ On lit sur le cercle l'arc formé par les points qui conviennent.

Par exemple, dans l'intervalle $]-\pi\,, \pi]$, l'inéquation $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$ décrit les points du cercle d'abscisse au moins $\frac{1}{2}$, qui forment l'arc allant de $M(-\frac{\pi}{3})$ à $M(\frac{\pi}{3})$ en passant par A : l'ensemble des solutions est $[-\frac{\pi}{3}\,, \frac{\pi}{3}]$. L'erreur la plus répandue est de lire l'arc dans le mauvais sens, ou de donner un intervalle dont les bornes ne sont pas dans le bon ordre, comme $[\frac{\pi}{3}\,, -\frac{\pi}{3}]$.

4.2.4 Les fonctions cosinus et sinus

Proposition 5 : Pour tout réel x, $|\sin x| \leqslant |x|$. De plus, pour tout $x \in]0\,, \frac{\pi}{2}[$,

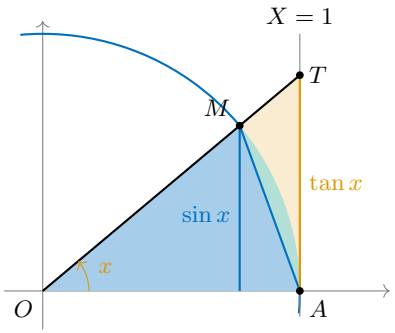
$$\sin x < x < \tan x, \qquad \text{où} \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

∘ Démonstration : Soit $x \in]0\,, \frac{\pi}{2}[$, $M = M(x)$, et T le point d'intersection de la demi-droite $[OM)$ avec la tangente au cercle en A, d'équation $X = 1$. Les points de $[OM)$ s'écrivent $(\lambda\cos x, \lambda\sin x)$ avec

$\lambda \geqslant 0$, et l'abscisse vaut 1 pour $\lambda = \frac{1}{\cos x}$: le point T a pour coordonnées $(1, \tan x)$. Le triangle OAM est contenu dans le secteur AOM, lui-même contenu dans le triangle OAT, et les inclusions sont strictes ; en comparant les aires, et grâce à la propriété admise (iii),

$$\frac{1 \times \sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{1 \times \tan x}{2}.$$

Pour l'inégalité $|\sin x| \leqslant |x|$, la fonction $x \mapsto |\sin x| - |x|$ étant paire, il suffit de la vérifier pour $x \geqslant 0$. Elle vient d'être établie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$; elle est claire pour $x = 0$, et, pour $x \geqslant \frac{\pi}{2}$, on a $|\sin x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant x$. □



Le triangle bleu OAM, d'aire $\frac{\sin x}{2}$, est contenu dans le secteur vert, d'aire $\frac{x}{2}$, lui-même contenu dans le triangle orange OAT, d'aire $\frac{\tan x}{2}$: l'encadrement $\sin x < x < \tan x$ n'est qu'une comparaison d'aires.

Proposition 6 : *(Dérivées.)* On a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

En conséquence, les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.

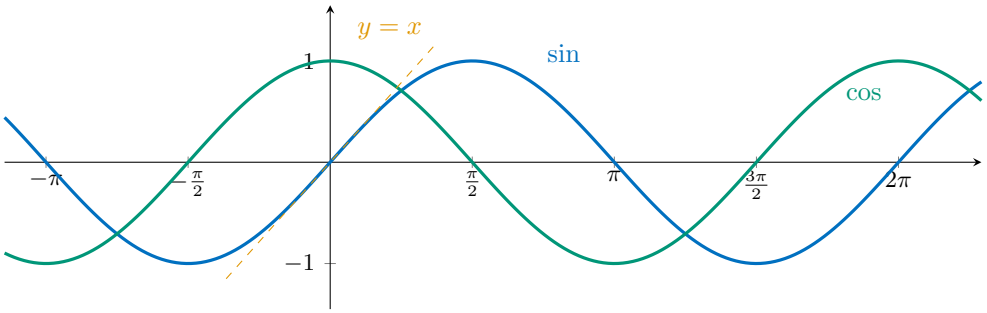
∘ Démonstration : La notion de limite sera définie au chapitre 8 ; on raisonne ici avec les règles connues depuis le lycée. Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, l'encadrement de la proposition 5 donne, en divisant par $\sin x > 0$ puis en passant aux inverses, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, et cet encadrement reste vrai pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ par parité. Par ailleurs, la formule $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ et la proposition 5 donnent

$$0 \leqslant 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \leqslant 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}, \qquad \text{donc} \qquad \left|\frac{1 - \cos x}{x}\right| \leqslant \frac{|x|}{2},$$

ce qui établit la seconde limite et montre que $\cos x$ tend vers 1 ; l'encadrement précédent donne alors la première limite. Enfin, pour x fixé et $h \neq 0$, la formule d'addition donne

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x \, \frac{\sin h}{h} - \sin x \, \frac{1 - \cos h}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \cos x,$$

et l'on procède de même pour le cosinus, ou l'on dérive $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$. □



La courbe du cosinus, en vert, se déduit de celle du sinus, en bleu, par la translation de $-\frac{\pi}{2}$ parallèlement à l'axe des abscisses, puisque $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. La droite orange $y = x$ est tangente à la courbe du sinus en l'origine, ce que traduit la limite $\frac{\sin x}{x} \to 1$, et elle reste au-dessus de la courbe pour $x > 0$, comme l'affirme la proposition 5.

Remarques :

- L'erreur la plus répandue est de croire que $\frac{\sin x}{x} \to 1$ est une conséquence de la règle de L'Hôpital, ou de la dérivabilité du sinus en 0. C'est l'inverse : cette limite *est* le nombre dérivé du sinus en 0, et c'est elle qui permet de calculer la dérivée en tout point. Le raisonnement serait circulaire.
- On retiendra le principe de la démonstration : les formules d'addition ramènent l'étude au voisinage d'un point quelconque à l'étude au voisinage de 0. On le retrouvera au chapitre 5 pour l'exponentielle, dont la propriété $\mathrm{e}^{x+h} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^h$ joue le même rôle.

4.2.5 La fonction tangente

Définition : On note $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des réels dont le cosinus n'est pas nul, d'après la proposition 4. La fonction **tangente** est

$$\tan : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{array} \right.$$

Proposition 7 : La fonction tan est impaire et π-périodique : pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\tan(-x) = -\tan x$ et $\tan(x+\pi) = \tan x$, d'où $\tan(\pi - x) = -\tan x$. Elle est dérivable sur $\mathcal{D}$, et

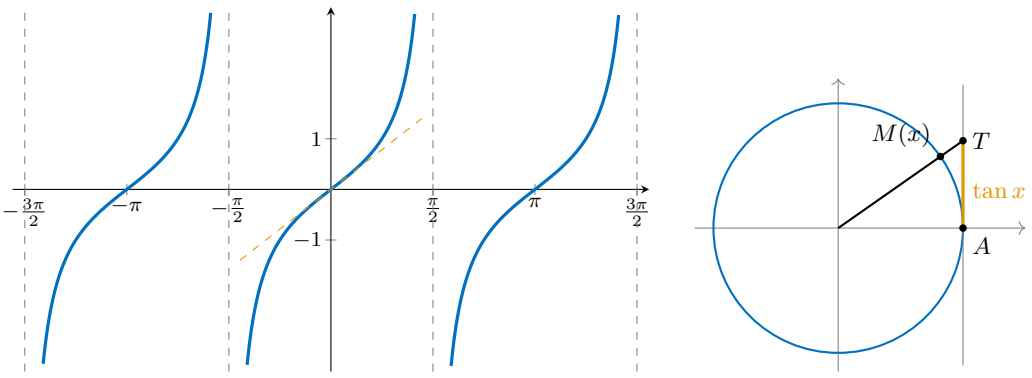
$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

Elle est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, de limites $-\infty$ en $-\frac{\pi}{2}$ et $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}$. Enfin, $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ et $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

∘ Démonstration : L'imparité et la périodicité résultent de la proposition 1 : $\sin(x+\pi) = -\sin x$ et $\cos(x+\pi) = -\cos x$, et le quotient est inchangé. La formule de dérivation d'un quotient et la proposition 6 donnent

$$\tan' x = \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

qui s'écrit des deux façons annoncées. Cette dérivée est strictement positive, d'où la stricte croissance sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures, $\sin x$ tend vers 1 et $\cos x$ tend vers 0 par valeurs positives, donc $\tan x$ tend vers $+\infty$; la limite en $-\frac{\pi}{2}$ s'en déduit par imparité. Les valeurs résultent de la proposition 2. □



À gauche, la courbe de la tangente, qui admet les droites $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour asymptotes et la droite $y = x$ pour tangente en l'origine. À droite, son interprétation : $\tan x$ est l'ordonnée du point T où la droite $(OM(x))$ coupe la tangente au cercle en A, ce qui explique le nom de la fonction.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan' x$	‖	$+$		$+$	‖
$\tan x$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖

Le tableau de variations sur une période ; la valeur $\tan' 0 = 1$ correspond à la tangente $y = x$ de la courbe en l'origine.

Proposition 8 : Pour tous réels a et b tels que a, b et $a+b$ appartiennent à $\mathcal{D}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{x}{2} \in \mathcal{D}$, en notant $t = \tan\frac{x}{2}$:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

∘ Démonstration : D'après les formules d'addition, $\tan(a+b) = \dfrac{\sin a\cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$, et l'on divise numérateur et dénominateur par $\cos a \cos b \neq 0$. Le dénominateur obtenu, $1 - \tan a \tan b$, est non nul puisque $\cos(a+b) \neq 0$. Pour les deux autres formules, on écrit, avec $u = \frac{x}{2}$,

$$\cos x = \cos^2 u - \sin^2 u = \cos^2 u\,(1-t^2), \qquad \sin x = 2\sin u \cos u = \cos^2 u \times 2t, \qquad \frac{1}{\cos^2 u} = 1 + t^2.$$

□

Remarques :

- En remplaçant b par $-b$, et grâce à l'imparité, on obtient la première formule ci-dessous, et avec $b = a$ la formule de duplication :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \qquad \text{et} \qquad \tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

- Les formules en $t = \tan\frac{x}{2}$ expriment $\cos x$ et $\sin x$ comme des fractions rationnelles d'une même variable t. Elles serviront au chapitre 6 pour calculer certaines primitives, et elles donnent une paramétrisation du cercle privé du point $(-1, 0)$ par des fractions rationnelles : pour t rationnel, on obtient un point du cercle à coordonnées rationnelles, comme $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ pour $t = \frac{1}{2}$, et l'on peut montrer que l'on obtient ainsi tous les triplets pythagoriciens.

4.3 Le corps des nombres complexes

4.3.1 Construction

On cherche à prolonger les opérations de $\mathbb{R}$ à un ensemble plus grand, dans lequel le nombre -1 possède une racine carrée, sans rien perdre des règles de calcul. Suivant Hamilton, on prend pour ensemble le plan $\mathbb{R}^2$ et l'on choisit la multiplication de façon que le couple $(0,1)$ ait pour carré $(-1,0)$.

Définition : On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$, dont les éléments sont appelés **nombres complexes**, muni des deux opérations définies, pour tous couples (a,b) et (c,d) de réels, par

$$(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d) \qquad \text{et} \qquad (a,b) \times (c,d) = (ac - bd,\ ad + bc).$$

Théorème 2 : Règles de calcul dans $\mathbb{C}$:
Les opérations de $\mathbb{C}$ vérifient les mêmes règles que celles de $\mathbb{R}$:

(i) l'addition et la multiplication sont associatives et commutatives ;

(ii) $(0,0)$ est neutre pour l'addition, et tout (a,b) a pour opposé $(-a,-b)$;

(iii) $(1,0)$ est neutre pour la multiplication, et tout $(a,b) \neq (0,0)$ a pour inverse

$$(a,b)^{-1} = \Big(\frac{a}{a^2+b^2}\,,\ \frac{-b}{a^2+b^2}\Big);$$

(iv) la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

∘ Démonstration : Toutes ces propriétés se vérifient par le calcul, à partir des propriétés de $\mathbb{R}$; donnons les deux qui ne sont pas immédiates. Pour l'associativité de la multiplication, on calcule

$$\big((a,b)(c,d)\big)(e,f) = (ac-bd,\ ad+bc)(e,f) = (ace-bde-adf-bcf,\ acf-bdf+ade+bce),$$

et l'on obtient la même expression en calculant $(a,b)\big((c,d)(e,f)\big) = (a,b)(ce-df,\ cf+de)$. Pour l'inverse, on remarque que $a^2+b^2>0$ lorsque $(a,b)\neq(0,0)$, et l'on vérifie que

$$(a,b)\Big(\frac{a}{a^2+b^2}\,,\ \frac{-b}{a^2+b^2}\Big) = \Big(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\,,\ \frac{-ab+ba}{a^2+b^2}\Big) = (1,0).$$

□

Un ensemble muni de deux opérations vérifiant ces règles sera appelé un *corps commutatif* au chapitre 11 : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ en sont les premiers exemples. Le calcul montre aussi que, pour tous réels x et y,

$$(x,0)+(y,0) = (x+y,0) \qquad \text{et} \qquad (x,0)\times(y,0) = (xy,0).$$

Les couples de la forme $(x,0)$ se calculent donc exactement comme les réels x. On **identifie** le réel x au complexe $(x,0)$, de sorte que $\mathbb{R}$ devient une partie de $\mathbb{C}$, et l'on pose $\mathrm{i} = (0,1)$. Alors

$$\mathrm{i}^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1 \qquad \text{et} \qquad (a,b) = (a,0)+(b,0)(0,1) = a+\mathrm{i}b.$$

Définition : Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique $z = a+\mathrm{i}b$ avec a et b réels : c'est sa **forme algébrique**. Le réel a est la **partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}\,z$, et le réel b sa **partie imaginaire**, notée $\mathrm{Im}\,z$. On dit que z est **imaginaire pur** si $\mathrm{Re}\,z = 0$, et l'on note $\mathrm{i}\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

Remarques :

- L'unicité de la forme algébrique est l'égalité de deux couples : $a+\mathrm{i}b = a'+\mathrm{i}b'$ si et seulement si $a=a'$ et $b=b'$, pourvu que a, b, a', b' soient *réels*. On identifie ainsi les parties réelles et imaginaires, ce qui transforme une équation complexe en deux équations réelles.
- La partie imaginaire est un nombre *réel*. L'erreur la plus répandue est d'écrire $\mathrm{Im}(3+2\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}$; la bonne valeur est 2.
- Pour calculer, on n'a jamais besoin de la définition par les couples : on développe comme dans $\mathbb{R}$ et l'on remplace i^2 par -1. Par exemple, $(2+\mathrm{i})^3 = 8+12\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3 = 8+12\mathrm{i}-6-\mathrm{i} = 2+11\mathrm{i}$, ce qui est le calcul de Bombelli évoqué dans l'introduction.
- On ne peut pas munir $\mathbb{C}$ d'une relation d'ordre total compatible avec les opérations comme celle de $\mathbb{R}$. Si c'était possible, on aurait $0 \leqslant \mathrm{i}$ ou $\mathrm{i} \leqslant 0$, donc, dans les deux cas, $0 \leqslant \mathrm{i}^2 = -1$ en multipliant i ou $-\mathrm{i}$ par lui-même ; on aurait aussi $0 \leqslant 1^2 = 1$, et en ajoutant 1 à l'inégalité $0 \leqslant -1$, on obtiendrait $1 \leqslant 0$, d'où $1 = 0$. Une écriture comme $z \leqslant z'$ n'a donc aucun sens pour des complexes non réels.

4.3.2 Le plan complexe

On fixe un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ du plan. Au nombre complexe $z = a+\mathrm{i}b$, on associe le point M de coordonnées (a,b), appelé **image** de z ; inversement, z est l'**affixe** de M, et l'on note $M(z)$. De même, le vecteur de coordonnées (a,b) a pour affixe z. Cette correspondance est une bijection entre $\mathbb{C}$ et le plan, qu'on appelle alors le **plan complexe** : l'axe des abscisses représente les réels, l'axe des ordonnées les imaginaires purs.

Si A et B ont pour affixes a et b, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b-a$, et le milieu de $[AB]$ a pour affixe $\frac{a+b}{2}$. L'addition des complexes correspond à l'addition des vecteurs, c'est-à-dire à la règle du parallélogramme ; on verra à la section 4.9 l'interprétation géométrique de la multiplication.

4.3.3 Calculs dans $\mathbb{C}$

Les démonstrations du chapitre 3 sur les sommes et les produits finis n'utilisent que les règles du théorème 2. Elles restent donc valables, mot pour mot, pour des familles de nombres complexes. En particulier :

Proposition 9 : Pour tous complexes a, b, z et tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \text{ si } z \neq 1, \qquad a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}, \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

Remarque : Les puissances de i se répètent de quatre en quatre : $\mathrm{i}^0 = 1$, $\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$, $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, puis $\mathrm{i}^4 = 1$, de sorte que i^n ne dépend que du reste de la division de n par 4. Ainsi, la formule du binôme donne $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$, d'où $(1+\mathrm{i})^4 = -4$ et $(1+\mathrm{i})^8 = 16$; la section 4.5 expliquera ces valeurs.

4.3.4 Conjugaison

Définition : Le **conjugué** du nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b réels, est le nombre complexe $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.

Proposition 10 : Pour tous complexes z et z' :

(i) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$, $\quad$ et, si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$;

(ii) $\overline{\overline{z}} = z$, de sorte que la conjugaison est une bijection de $\mathbb{C}$ sur lui-même, égale à sa réciproque ;

(iii) $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ $\quad$ et $\quad$ $\mathrm{Im}\, z = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$;

(iv) z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$, et z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

∘ Démonstration : On écrit $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$. Pour le produit, $zz' = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + ba')$, tandis que

$$\overline{z}\,\overline{z'} = (a - \mathrm{i}b)(a' - \mathrm{i}b') = (aa' - bb') - \mathrm{i}(ab' + ba') = \overline{zz'}.$$

Pour le quotient, on conjugue l'égalité $z' \times \frac{z}{z'} = z$, ce qui donne $\overline{z'} \times \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z}$, et l'on divise par $\overline{z'} \neq 0$. Les autres points sont immédiats : par exemple, $z + \overline{z} = 2a$ et $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}b$, et (iv) en découle. □

Dans le plan complexe, l'image de $\overline{z}$ est la symétrique de celle de z par rapport à l'axe des réels.

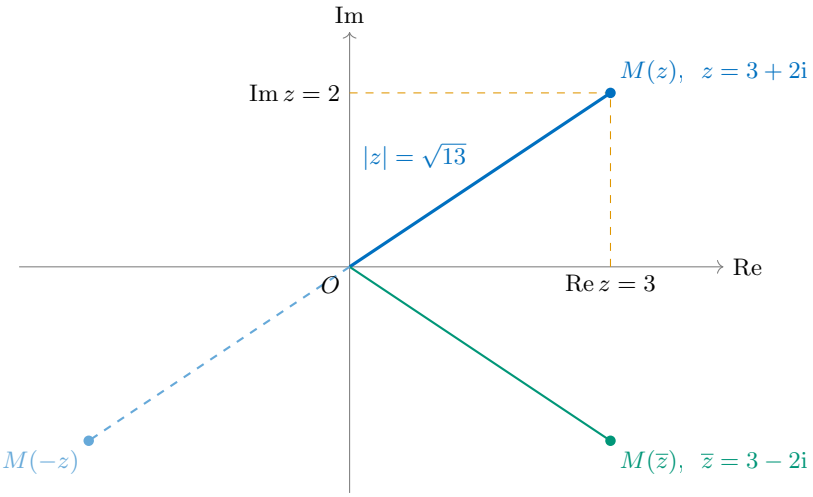
4.3.5 Module

On admet, jusqu'au chapitre 7 où on le démontrera à l'aide de la borne supérieure, que tout réel $x \geqslant 0$ possède une unique racine carrée positive, notée $\sqrt{x}$.

Définition : Le **module** du nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b réels, est le réel positif

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Lorsque z est réel, $|z| = \sqrt{a^2}$ est sa valeur absolue : la notation est cohérente. Géométriquement, $|z|$ est la distance de l'origine O au point $M(z)$, et, si A et B ont pour affixes a et b, la distance AB vaut $|b - a|$.



Le point $M(z)$ a pour coordonnées la partie réelle et la partie imaginaire de z ; son conjugué, en vert, est son symétrique par rapport à l'axe des réels, et $-z$ est son symétrique par rapport à l'origine. Le module est la longueur du segment bleu, donnée par le théorème de Pythagore.

Proposition 11 : Pour tous complexes z et z' :

(i) $|z|^2 = z\,\overline{z}$, $\quad |\overline{z}| = |z|$, $\quad$ et $|z| = 0 \iff z = 0$;

(ii) $|zz'| = |z|\,|z'|$ $\quad$ et, si $z' \neq 0$, $\quad \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$;

(iii) $|\,\mathrm{Re}\, z| \leqslant |z|$ $\quad$ et $\quad |\,\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z|$;

(iv) si $z \neq 0$, $\quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

∘ Démonstration : (i) Avec $z = a + \mathrm{i}b$, $z\overline{z} = a^2 - (\mathrm{i}b)^2 = a^2 + b^2$; une somme de deux carrés de réels est nulle si et seulement si les deux réels le sont. (ii) Par (i) et la proposition 10, $|zz'|^2 = zz'\,\overline{z}\,\overline{z'} = |z|^2|z'|^2$, et l'on prend la racine carrée de ces réels positifs ; le cas du quotient s'en déduit en écrivant $z = \frac{z}{z'} \times z'$. (iii) On a $a^2 \leqslant a^2 + b^2$, et la racine carrée est croissante. (iv) On divise $z\overline{z} = |z|^2$ par $z\,|z|^2$. □

Exemple : La formule (iv) donne la méthode pour mettre un quotient sous forme algébrique : on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur, qui devient réel.

$$\frac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = \frac{(3+4\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} = \frac{3+6\mathrm{i}+4\mathrm{i}-8}{1+4} = \frac{-5+10\mathrm{i}}{5} = -1+2\mathrm{i}.$$

On contrôle avec les modules : $\frac{|3+4\mathrm{i}|}{|1-2\mathrm{i}|} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, qui est bien le module de $-1+2\mathrm{i}$.

Remarque : Le module permet de décrire des parties du plan. Pour $\omega \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, l'ensemble des z tels que $|z - \omega| = r$ est le cercle de centre $M(\omega)$ et de rayon r ; l'ensemble des z tels que $|z - \omega| \leqslant r$ est le disque fermé correspondant, et l'inégalité stricte donne le disque ouvert. De même, $|z - a| = |z - b|$, avec $a \neq b$, caractérise la médiatrice du segment d'extrémités $M(a)$ et $M(b)$. L'erreur la plus répandue est d'écrire $|a + \mathrm{i}b| = a + b$, ou $|z|^2 = z^2$: cette dernière égalité est fausse dès que z n'est pas réel, comme le montre $z = \mathrm{i}$.

Théorème 3 : Inégalité triangulaire :
Pour tous complexes z et z',

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|,$$

avec égalité si et seulement si $z' = 0$ ou s'il existe un réel $\lambda \geqslant 0$ tel que $z = \lambda z'$. On en déduit

$$\big|\,|z| - |z'|\,\big| \leqslant |z - z'|.$$

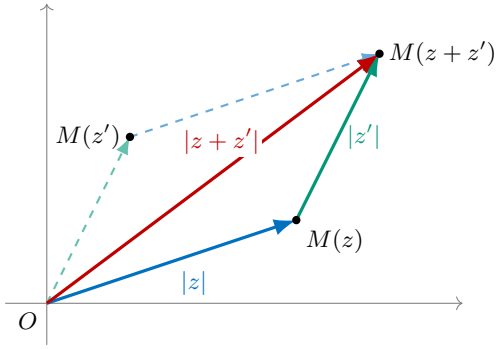
∘ Démonstration : On développe le carré du module grâce à la proposition 11 :

$$|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) = |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + \overline{z}z' = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{z'}),$$

puisque $\overline{z}z'$ est le conjugué de $z\overline{z'}$. Or $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leqslant |z\overline{z'}| = |z|\,|z'|$, donc $|z+z'|^2 \leqslant (|z|+|z'|)^2$, et l'on conclut en prenant la racine carrée de ces réels positifs.

Cas d'égalité. L'égalité a lieu si et seulement si $\mathrm{Re}\, w = |w|$, avec $w = z\overline{z'}$. Or, pour $w = x + \mathrm{i}y$, l'égalité $x = \sqrt{x^2+y^2}$ équivaut à $y = 0$ et $x \geqslant 0$: l'égalité a donc lieu si et seulement si $z\overline{z'}$ est un réel positif. Si $z' = 0$, c'est le cas. Sinon, $z\overline{z'} = \mu \geqslant 0$ équivaut à $z = \frac{\mu}{\overline{z'}} = \frac{\mu}{|z'|^2}\, z'$, ce qui est de la forme $\lambda z'$ avec $\lambda \geqslant 0$; réciproquement, si $z = \lambda z'$ avec $\lambda \geqslant 0$, alors $z\overline{z'} = \lambda |z'|^2 \geqslant 0$.

Seconde inégalité. En écrivant $z = (z-z') + z'$, on obtient $|z| \leqslant |z-z'| + |z'|$, soit $|z| - |z'| \leqslant |z-z'|$; en échangeant les rôles de z et z', on obtient aussi $|z'| - |z| \leqslant |z-z'|$. □



La somme $z+z'$ est le quatrième sommet du parallélogramme construit sur z et z'. Dans le triangle formé par O, $M(z)$ et $M(z+z')$, la longueur du côté rouge est au plus la somme des longueurs des deux autres : c'est le sens géométrique, et l'origine du nom, de l'inégalité triangulaire. L'égalité n'a lieu que si le triangle est aplati, les deux vecteurs ayant même direction et même sens.

Remarques :

- Par une récurrence immédiate, on obtient, pour tous complexes $z_1, \dots, z_n$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

  C'est sous cette forme que l'inégalité sert à majorer une somme dont on ne sait pas calculer la valeur exacte.

- L'inégalité triangulaire donne une *majoration* du module d'une somme, jamais une égalité. L'erreur la plus répandue est d'écrire $|z+z'| = |z| + |z'|$, ou encore $|z-z'| \leqslant |z| - |z'|$, ce qui est faux : pour $z = 0$ et $z' = 1$, le membre de droite est négatif. La bonne majoration est $|z-z'| \leqslant |z| + |z'|$, que l'on obtient en appliquant le théorème à z et $-z'$.

4.4 Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

4.4.1 L'ensemble $\mathbb{U}$

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Son image dans le plan complexe est le cercle trigonométrique. D'après la proposition 11, le produit de deux éléments de $\mathbb{U}$ est dans $\mathbb{U}$, et tout élément z de $\mathbb{U}$ est inversible, d'inverse $\frac{1}{z} = \overline{z}$, qui appartient encore à $\mathbb{U}$. On dira au chapitre 11 que $\mathbb{U}$ est un *groupe* pour la multiplication.

Définition : Pour tout réel t, on pose

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t.$$

Proposition 12 : *(Exponentielle d'une somme.)* Pour tous réels a, b, t, t' :

(i) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$, $\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$, $\quad$ et $\quad \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$;

(ii) l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$, et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t'} \iff t \equiv t'\ [2\pi]$.

◦ Démonstration : (i) On développe, puis on reconnaît les formules d'addition du théorème 1 :

$$e^{ia}\,e^{ib} = (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i(\sin a\cos b + \cos a\sin b) = \cos(a+b) + i\sin(a+b).$$

Ensuite, $|e^{it}|^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, donc $\frac{1}{e^{it}} = \overline{e^{it}} = \cos t - i\sin t = \cos(-t) + i\sin(-t)$. (ii) C'est la traduction de la propriété admise (ii) : le point d'affixe e^{it} est le point $M(t)$ du cercle trigonométrique. □

Remarques :

- La notation e^{it} est pour l'instant une simple écriture, mais elle est justifiée par la propriété (i), identique à celle de l'exponentielle réelle, $e^{x+y} = e^x e^y$. On verra au chapitre 5 que la fonction $t \mapsto e^{it}$ a pour dérivée $t \mapsto i\,e^{it}$, ce qui prolonge la formule $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$, et la section 4.8 définira e^z pour tout complexe z.
- Pour $t = \pi$, on obtient la célèbre égalité $e^{i\pi} = -1$, ainsi que $e^{2i\pi} = 1$ et $e^{i\pi/2} = i$.
- Par récurrence, (i) donne $(e^{it})^n = e^{int}$ pour tout entier naturel n, puis pour tout entier relatif, en passant à l'inverse.

4.4.2 Formules d'Euler et de Moivre

Proposition 13 : Pour tout réel t et tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$\textit{(Euler)} \qquad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$\textit{(Moivre)} \qquad (\cos t + i\sin t)^n = \cos(nt) + i\sin(nt).$$

◦ Démonstration : Les formules d'Euler sont les formules $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ de la proposition 10, appliquées à $z = e^{it}$. La formule de Moivre est la dernière remarque, écrite sans la notation exponentielle. □

♡ **Méthode : Pour exprimer $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$:**

- ▶ On développe $(\cos t + i\sin t)^n$ par la formule du binôme.
- ▶ On identifie partie réelle et partie imaginaire.

Pour $n = 3$, avec $c = \cos t$ et $s = \sin t$,

$$(c+is)^3 = c^3 + 3ic^2 s - 3cs^2 - is^3, \qquad \text{donc} \qquad \cos(3t) = c^3 - 3cs^2 = 4\cos^3 t - 3\cos t,$$

en remplaçant s^2 par $1 - c^2$, et de même $\sin(3t) = 3c^2 s - s^3 = 3\sin t - 4\sin^3 t$. On retrouve la formule utilisée pour calculer $\cos\frac{\pi}{3}$ à la proposition 2.

4.4.3 Technique de l'angle moitié

Proposition 14 : Pour tous réels t, p et q :

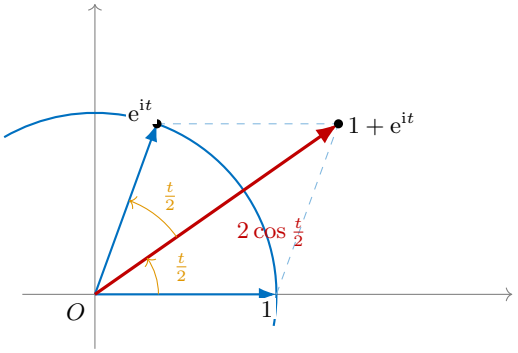
$$1 + e^{it} = 2\cos\frac{t}{2}\,e^{it/2} \qquad 1 - e^{it} = -2i\sin\frac{t}{2}\,e^{it/2}$$

$$e^{ip} + e^{iq} = 2\cos\frac{p-q}{2}\,e^{i(p+q)/2} \qquad e^{ip} - e^{iq} = 2i\sin\frac{p-q}{2}\,e^{i(p+q)/2}$$

◦ Démonstration : On met en facteur l'exponentielle de l'angle moyen, puis on applique les formules d'Euler :

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i(p+q)/2}\left(e^{i(p-q)/2} + e^{-i(p-q)/2}\right) = 2\cos\frac{p-q}{2}\,e^{i(p+q)/2},$$

et de même pour la différence, avec la formule d'Euler du sinus. Les deux premières formules sont le cas $p = 0$, $q = t$, où l'on a aussi utilisé la parité du cosinus et l'imparité du sinus. □



Le parallélogramme construit sur 1 et e^{it} est un losange, puisque ses côtés ont pour longueur 1. Sa diagonale, en rouge, est donc la bissectrice de l'angle de mesure t : elle fait un angle $\frac{t}{2}$ avec l'axe des réels, et sa longueur vaut $2\cos\frac{t}{2}$ lorsque $t \in]-\pi, \pi[$. C'est exactement la formule $1+e^{it} = 2\cos\frac{t}{2}\, e^{it/2}$.

Exemple : En prenant les parties réelles et imaginaires des deux dernières formules de la proposition 14, on retrouve les formules de factorisation que le programme demande de savoir retrouver :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \qquad \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

La troisième a déjà servi à résoudre l'équation $\cos a = \cos b$ dans la proposition 4.

Proposition 15 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et t un réel tel que $t \not\equiv 0\ [2\pi]$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cos\left(\frac{nt}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}\sin(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left(\frac{nt}{2}\right).$$

Si $t \equiv 0\ [2\pi]$, ces sommes valent respectivement $n+1$ et 0.

∘ Démonstration : On calcule la somme complexe $S = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \sum_{k=0}^{n}(e^{it})^k$, dont les deux sommes cherchées sont la partie réelle et la partie imaginaire. Comme $t \not\equiv 0\ [2\pi]$, on a $e^{it} \neq 1$, et la somme géométrique, puis la proposition 14 au numérateur et au dénominateur, donnent

$$S = \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} = \frac{-2i\sin\frac{(n+1)t}{2}\, e^{i(n+1)t/2}}{-2i\sin\frac{t}{2}\, e^{it/2}} = \frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\, e^{int/2},$$

le dénominateur $\sin\frac{t}{2}$ étant non nul puisque $\frac{t}{2} \not\equiv 0\ [\pi]$. On prend la partie réelle et la partie imaginaire. Si $t \equiv 0\ [2\pi]$, tous les cosinus valent 1 et tous les sinus 0. □

Remarque : La méthode compte plus que la formule : on remplace une somme de cosinus par la partie réelle d'une somme d'exponentielles, que l'on sait calculer, et l'angle moitié fait apparaître des sinus. L'erreur la plus répandue est d'écrire

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kt) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}\right) = \frac{1-\cos((n+1)t)}{1-\cos t},$$

où la première égalité est juste et la seconde fausse : la partie réelle d'un quotient n'est pas le quotient des parties réelles.

4.4.4 Linéarisation

Linéariser une expression de la forme $\cos^p t \sin^q t$, c'est l'écrire comme une somme de termes $\cos(kt)$ et $\sin(kt)$. C'est le procédé inverse du précédent, et il sert à calculer des primitives au chapitre 6.

♡ **Méthode : Pour linéariser** :
- ▶ On remplace $\cos t$ et $\sin t$ par leurs expressions d'Euler.
- ▶ On développe par la formule du binôme.
- ▶ On regroupe les exponentielles conjuguées par les formules d'Euler, lues de droite à gauche.

Exemples :

- Pour $\cos^3 t$, on obtient
$$\cos^3 t = \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})^3}{8} = \frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t}}{8} = \frac{2\cos(3t)+6\cos t}{8} = \frac{\cos(3t)+3\cos t}{4},$$
ce qui est la formule de $\cos(3t)$ obtenue plus haut, lue dans l'autre sens.
- Pour $\sin^4 t$, le facteur $(2\mathrm{i})^4 = 16$ est réel, et les signes alternent :
$$\sin^4 t = \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})^4}{16} = \frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}-4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+6-4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t}}{16} = \frac{\cos(4t)-4\cos(2t)+3}{8}.$$
On contrôle en $t=0$, où les deux membres sont nuls, et en $t=\frac{\pi}{2}$, où ils valent 1.

4.5 Forme trigonométrique

Proposition 16 : Tout nombre complexe non nul z s'écrit $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Dans une telle écriture, $r=|z|$ est déterminé de façon unique, et θ est unique modulo 2π : pour $r,r'>0$ et θ,θ' réels,
$$r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \iff \big(r=r' \text{ et } \theta\equiv\theta'\ [2\pi]\big).$$

∘ Démonstration : *Existence.* Le complexe $\frac{z}{|z|}$ est de module 1, donc, par la proposition 12, il s'écrit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pour un réel θ, et $z=|z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. *Unicité.* Si $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$, on prend les modules : $r=r'$, puisque $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|=1$. On simplifie alors par $r\neq 0$, et la proposition 12 donne $\theta\equiv\theta'\ [2\pi]$. La réciproque est claire. □

Définition : L'écriture $z=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r>0$ est une **forme trigonométrique** de $z\neq 0$. Tout réel θ tel que $z=|z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est un **argument** de z ; on note $\arg z$ l'un quelconque d'entre eux, les autres lui étant congrus modulo 2π. Le nombre 0 n'a pas d'argument.

Proposition 17 : Pour tous complexes non nuls z et z' :
$$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'\ [2\pi] \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'\ [2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z\ [2\pi] \qquad \arg\overline{z} \equiv -\arg z\ [2\pi].$$

∘ Démonstration : Si $z=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z'=r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$, alors $zz'=rr'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$ par la proposition 12, avec $rr'>0$: c'est une forme trigonométrique de zz', et $\theta+\theta'$ en est un argument. De même, $\frac{1}{z}=\frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ et $\overline{z}=r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, et le quotient s'en déduit. □

Remarques :

- L'argument n'est défini qu'à 2π près : les formules de la proposition sont des *congruences*, et non des égalités. L'erreur la plus répandue est de les écrire avec un signe $=$, puis d'en tirer des conclusions fausses sur un argument choisi dans un intervalle, comme $]-\pi,\pi]$: par exemple, $\frac{3\pi}{4}$ est un argument de $z=-1+\mathrm{i}$, mais $\frac{3\pi}{2}$, qui n'est pas dans $]-\pi,\pi]$, est un argument de $z^2=-2\mathrm{i}$.
- Dans une forme trigonométrique, le facteur r doit être strictement positif. L'écriture $-2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ n'en est pas une ; on la corrige en écrivant $-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, d'où $-2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}=2\,\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}$.

- La proposition dit que $z \mapsto \arg z$ transforme les produits en sommes, comme le logarithme du chapitre 5 ; c'est ce qui rend la forme trigonométrique si commode pour les produits et les puissances, alors que la forme algébrique est adaptée aux sommes.

♡ **Méthode : Pour mettre $z = a + ib$ sous forme trigonométrique** :
- ▶ On calcule le module $r = |z|$.
- ▶ On reconnaît dans $\frac{a}{r} + \mathrm{i}\frac{b}{r}$ le cosinus et le sinus d'un angle connu.

Exemples :

- On a $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ et $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$. On en déduit $(1+\mathrm{i})^n = 2^{n/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/4}$, ce qui explique les valeurs $(1+\mathrm{i})^4 = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -4$ et $(1+\mathrm{i})^8 = 16$ de la section 4.3. En comparant la partie réelle de cette expression à celle que donne la formule du binôme, où seuls les termes d'indice pair $k = 2p$ sont réels, avec $\mathrm{i}^{2p} = (-1)^p$, on obtient
$$\sum_{0 \leqslant 2p \leqslant n} (-1)^p \binom{n}{2p} = 2^{n/2} \cos\frac{n\pi}{4}.$$
Pour $n = 4$, on vérifie que $1 - 6 + 1 = -4 = 4\cos\pi$.
- On a $|\sqrt{3} - \mathrm{i}| = 2$ et $\sqrt{3} - \mathrm{i} = 2\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\Big) = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$.
- Pour $t \in]-\pi, \pi[$, la proposition 14 donne $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = 2\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}$, et c'est une forme trigonométrique, puisque $\cos\frac{t}{2} > 0$. Mais pour $t \in]\pi, 3\pi[$, on a $\cos\frac{t}{2} < 0$, et la forme trigonométrique est $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = -2\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{t}{2}+\pi)}$, de module $-2\cos\frac{t}{2}$: il faut toujours vérifier le signe du facteur réel obtenu par l'angle moitié.

Proposition 18 : Soit a et b deux réels non tous deux nuls. Il existe un réel φ tel que, pour tout réel t,
$$a\cos t + b\sin t = A\cos(t-\varphi), \qquad \text{où} \qquad A = \sqrt{a^2+b^2}.$$
On peut prendre pour φ un argument de $a + ib$.

∘ Démonstration : Écrivons $a + ib = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, avec $A = |a+ib|$. Alors $a - ib = A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$, et
$$a\cos t + b\sin t = \mathrm{Re}\,\big((a-\mathrm{i}b)(\cos t + \mathrm{i}\sin t)\big) = \mathrm{Re}\,\big(A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big) = A\cos(t-\varphi).$$
□

Exemple : On résout l'équation $\cos t + \sqrt{3}\sin t = \sqrt{2}$. Comme $1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$, le membre de gauche vaut $2\cos(t - \frac{\pi}{3})$, et l'équation équivaut à $\cos(t - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$. La proposition 4 donne alors $t - \frac{\pi}{3} \equiv \pm\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$:
$$\text{les solutions sont les réels } \quad t \equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi] \quad \text{et} \quad t \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi].$$
En physique, cette transformation montre que la superposition de deux oscillations de même pulsation, $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$, est encore une oscillation de cette pulsation, d'amplitude A et de phase φ : c'est le principe du calcul des interférences.

4.6 Équations algébriques

4.6.1 Factorisation par $z - a$

On appelle ici **fonction polynomiale** à coefficients complexes une application $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forme
$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$
où $a_0, \ldots, a_n$ sont des complexes. Une **racine** de P est un complexe a tel que $P(a) = 0$. Le chapitre 13 étudiera les polynômes en tant qu'objets algébriques ; on se contente ici d'un résultat de factorisation.

Proposition 19 : Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ une fonction polynomiale, avec $n \geqslant 1$, et a une racine de P. Il existe des complexes $b_0, \dots, b_{n-1}$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = (z-a)\,Q(z), \qquad \text{où} \qquad Q(z) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j z^j, \qquad b_j = \sum_{k=j+1}^{n} a_k\, a^{k-1-j}.$$

∘ Démonstration : Comme $P(a) = 0$, on a $P(z) = P(z) - P(a) = \sum_{k=1}^{n} a_k(z^k - a^k)$, le terme d'indice 0 étant nul. La factorisation de $z^k - a^k$ (proposition 9) donne

$$P(z) = (z-a) \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} a_k\, a^{k-1-j} z^j.$$

La somme double porte sur les couples (k, j) tels que $0 \leqslant j < k \leqslant n$; on l'intervertit comme une somme triangulaire du chapitre 3, en sommant d'abord sur $k \in [\![j+1\,, n]\!]$, puis sur $j \in [\![0\,, n-1]\!]$, ce qui fait apparaître les coefficients b_j. □

Exemple : La fonction $P(z) = z^3 - 1$ admet la racine 1, et la proposition redonne la factorisation $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$. Les deux autres racines de P sont celles du facteur du second degré, que l'on va maintenant savoir trouver.

4.6.2 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition : Une **racine carrée** du nombre complexe w est un complexe z tel que $z^2 = w$.

Proposition 20 : Tout nombre complexe non nul w possède exactement deux racines carrées, opposées l'une de l'autre. Si $w = a + \mathrm{i}b$ avec a, b réels, ce sont les complexes $z = x + \mathrm{i}y$ tels que

$$x^2 - y^2 = a, \qquad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad 2xy = b.$$

Si $w = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$, ce sont les complexes $\pm\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$.

∘ Démonstration : *Nombre de racines.* Si z_0 est une racine carrée de w, alors

$$z^2 = w \iff z^2 - z_0^2 = 0 \iff (z-z_0)(z+z_0) = 0.$$

Or un produit de deux complexes est nul si et seulement si l'un des facteurs l'est, puisqu'un complexe non nul est inversible. Les racines carrées de w sont donc z_0 et $-z_0$, qui sont distinctes puisque $z_0 \neq 0$. Il reste à établir l'existence.

Système. Si $z^2 = w$, alors $x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy = a + \mathrm{i}b$, d'où la première et la troisième équation par identification, et $|z|^2 = |w|$, qui est la deuxième. Réciproquement, ces équations donnent $z^2 = (x^2 - y^2) + 2\mathrm{i}xy = w$.

Existence. En ajoutant et en retranchant les deux premières équations, on pose

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \qquad \text{et} \qquad y = \varepsilon\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}, \qquad \varepsilon \in \{-1, 1\},$$

ce qui a un sens puisque $|a| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$. Alors $x^2 - y^2 = a$ et $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$, et

$$4x^2y^2 = (x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)^2 = (a^2+b^2) - a^2 = b^2,$$

donc $2xy = \pm b$; on choisit le signe ε pour obtenir $2xy = b$. Enfin, $\left(\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\right)^2 = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = w$ par la proposition 12. □

Exemple : On cherche les racines carrées de $w = -3+4\mathrm{i}$, dont le module vaut 5. Le système s'écrit $x^2-y^2=-3$, $x^2+y^2=5$ et $2xy=4$. On en tire $x^2=1$ et $y^2=4$, et $xy>0$ impose que x et y soient de même signe :

$$\text{les racines carrées de } -3+4\mathrm{i} \text{ sont } 1+2\mathrm{i} \text{ et } -1-2\mathrm{i}.$$

On vérifie que $(1+2\mathrm{i})^2 = 1+4\mathrm{i}-4 = -3+4\mathrm{i}$. L'équation $2xy=b$ n'est pas superflue : sans elle, on trouverait quatre candidats, dont deux faux, $1-2\mathrm{i}$ et $-1+2\mathrm{i}$.

Remarque : On s'interdit d'écrire $\sqrt{w}$ pour un complexe w qui n'est pas un réel positif : aucune des deux racines carrées n'est privilégiée, et la règle $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ cesse d'être vraie. Le « calcul » $-1 = \mathrm{i}^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$, qui a troublé les mathématiciens jusqu'à Euler, montre ce que coûte cette notation.

4.6.3 Équations du second degré

Théorème 4 : Équations du second degré :
Soit a, b, c trois complexes avec $a\neq 0$, et $\Delta = b^2-4ac$ le **discriminant** de l'équation $az^2+bz+c=0$.

- Si $\Delta\neq 0$, et si δ est une racine carrée de Δ, l'équation a exactement deux solutions :
$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution, $-\frac{b}{2a}$, dite **racine double**.

Dans tous les cas, en comptant deux fois une racine double, $z_1+z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1z_2 = \dfrac{c}{a}$.

∘ Démonstration : On met le trinôme sous forme canonique, comme au lycée :

$$az^2+bz+c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right) = a(z-z_1)(z-z_2),$$

où δ est une racine carrée de Δ, qui existe par la proposition 20, et vaut 0 si $\Delta=0$. Un produit de complexes étant nul si et seulement si l'un des facteurs l'est, et a étant non nul, les solutions sont z_1 et z_2, distinctes si et seulement si $\delta\neq 0$. En développant $a(z-z_1)(z-z_2) = az^2-a(z_1+z_2)z+az_1z_2$ et en comparant au trinôme initial, ou par un calcul direct, on obtient la somme et le produit. □

Remarques :

- Si a, b, c sont réels et $\Delta<0$, on prend $\delta = \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}$, et les deux solutions $\frac{-b\pm\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ sont conjuguées. Cela ne fait que prolonger le cours du lycée, où l'on concluait qu'il n'y avait pas de solution *réelle*.
- Réciproquement, deux complexes z_1 et z_2 ont pour somme s et pour produit p si et seulement s'ils sont les solutions, éventuellement confondues, de l'équation $z^2-sz+p=0$, puisque $(z-z_1)(z-z_2) = z^2-(z_1+z_2)z+z_1z_2$. C'est ainsi que l'on résout le problème de Cardan cité en épigraphe : deux nombres de somme 10 et de produit 40 sont les solutions de $z^2-10z+40=0$, de discriminant -60, c'est-à-dire $5+\mathrm{i}\sqrt{15}$ et $5-\mathrm{i}\sqrt{15}$.
- Le théorème établit le résultat admis dans le corrigé de l'exercice 7 de la feuille du chapitre 2 : l'équation $z^2-wz+1=0$ a au moins une solution pour tout complexe w. Plus généralement, le *théorème de d'Alembert-Gauss*, énoncé au chapitre 13, affirme que toute fonction polynomiale non constante à coefficients complexes possède une racine ; le second degré en est le premier cas.

Exemple : On résout l'équation $z^2-3z+3-\mathrm{i}=0$. Son discriminant vaut

$$\Delta = 9-4(3-\mathrm{i}) = -3+4\mathrm{i},$$

dont une racine carrée est $\delta = 1+2\mathrm{i}$, d'après l'exemple précédent. Les solutions sont

$$z_1 = \frac{3+1+2\mathrm{i}}{2} = 2+\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{3-1-2\mathrm{i}}{2} = 1-\mathrm{i}.$$

On contrôle avec la somme et le produit : $z_1+z_2=3$ et $z_1z_2 = 2-2\mathrm{i}+\mathrm{i}+1 = 3-\mathrm{i}$. Les solutions ne sont pas conjuguées, ce qui n'a rien d'anormal, puisque les coefficients ne sont pas tous réels.

4.7 Racines n-ièmes

Dans toute la section, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

4.7.1 Racines n-ièmes de l'unité

Définition : Une **racine n-ième** du nombre complexe w est un complexe z tel que $z^n = w$.
On note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Proposition 21 : L'ensemble $\mathbb{U}_n$ a exactement n éléments :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n} \mid k \in [\![0\,,n-1]\!] \right\}.$$

Pour $n \geqslant 2$, la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ est nulle.

∘ Démonstration : Si $z^n = 1$, alors $|z|^n = 1$, donc $|z| = 1$ puisque $|z|$ est un réel positif, et z s'écrit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Alors $z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, et

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}0} \iff n\theta \equiv 0\ [2\pi] \iff \theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n}\right] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{2k\pi}{n}.$$

Écrivons la division euclidienne $k = qn + r$ avec $r \in [\![0\,,n-1]\!]$: alors $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}q\pi}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}r\pi/n} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}r\pi/n}$, ce qui établit l'égalité d'ensembles. Les n nombres obtenus sont distincts, car pour $0 \leqslant r < r' \leqslant n-1$, on a $0 < \frac{2(r'-r)\pi}{n} < 2\pi$, et cette différence n'est pas un multiple de 2π. Enfin, avec $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n} \neq 1$ pour $n \geqslant 2$, la somme est géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0.$$

□

Remarques :

- Pour $n = 2$, $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$; pour $n = 4$, $\mathbb{U}_4 = \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$. Pour $n = 3$, on note traditionnellement $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, de sorte que $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$, avec $j^2 = \overline{j}$ et $1 + j + j^2 = 0$. On retrouve ainsi les deux racines non réelles de $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$.
- Dans le plan complexe, les éléments de $\mathbb{U}_n$ sont, pour $n \geqslant 3$, les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique, dont 1 est un sommet. La nullité de leur somme exprime que le centre de gravité de ces sommets est l'origine.

4.7.2 Racines n-ièmes d'un complexe non nul

On admet, jusqu'au chapitre 8 où on le démontrera par le théorème des valeurs intermédiaires, que tout réel $r > 0$ possède une unique racine n-ième réelle strictement positive, notée $r^{1/n}$ ou $\sqrt[n]{r}$.

Proposition 22 : Soit $w = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ un complexe non nul, avec $r > 0$. Les racines n-ièmes de w sont les n complexes distincts

$$z_k = r^{1/n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)/n}, \qquad k \in [\![0\,,n-1]\!].$$

Si z_0 est l'une d'entre elles, ce sont les complexes $z_0\,u$ avec $u \in \mathbb{U}_n$.

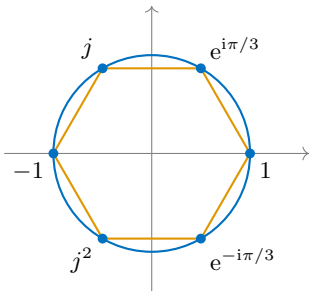
∘ Démonstration : Le complexe $z_0 = r^{1/n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/n}$ vérifie $z_0^n = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = w$, et il est non nul. Pour tout complexe z, on a alors

$$z^n = w \iff z^n = z_0^n \iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \iff \frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n,$$

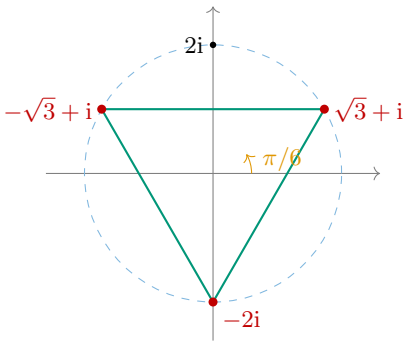
et la proposition 21 donne les n racines annoncées, distinctes puisque les éléments de $\mathbb{U}_n$ le sont. Le même raisonnement vaut à partir de n'importe quelle racine z_0. □

Exemples :

- Les racines cubiques de $8\mathrm{i} = 8\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$ sont les complexes $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/6+2k\pi/3)}$, pour $k \in \{0,1,2\}$, c'est-à-dire
$$\sqrt{3}+\mathrm{i}, \qquad -\sqrt{3}+\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad -2\mathrm{i}.$$
On vérifie la dernière : $(-2\mathrm{i})^3 = -8\mathrm{i}^3 = 8\mathrm{i}$.
- Les racines quatrièmes de $-4 = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ sont les complexes $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4+k\pi/2)}$, soit $1+\mathrm{i}$, $-1+\mathrm{i}$, $-1-\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$: on retrouve $(1+\mathrm{i})^4 = -4$, et les trois autres s'en déduisent en multipliant par i, -1 et $-\mathrm{i}$, les éléments de $\mathbb{U}_4$.



$\mathbb{U}_6$



racines cubiques de 8i

À gauche, les six racines sixièmes de l'unité forment un hexagone régulier, qui contient $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ et $\mathbb{U}_2 = \{1,-1\}$. À droite, les trois racines cubiques de 8i, en rouge, forment un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon $2 = 8^{1/3}$: on obtient la première avec l'argument $\frac{\pi}{2} \div 3 = \frac{\pi}{6}$, et les autres en tournant de $\frac{2\pi}{3}$.

Remarque : Un complexe non nul a n racines n-ièmes, et non une seule. L'erreur la plus répandue est d'oublier les multiples de $\frac{2\pi}{n}$, en divisant l'argument par n sans diviser aussi le module de la congruence, exactement comme dans la remarque de la section 4.2.1. Pour la même raison que pour les racines carrées, on n'écrit jamais $w^{1/n}$ lorsque w n'est pas un réel positif.

4.8 Exponentielle complexe

On utilise la fonction exponentielle réelle et le logarithme népérien, connus depuis le lycée, dont le chapitre 5 reprendra l'étude : $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$ pour tous réels x et y, $\mathrm{e}^x > 0$, et ln est la bijection réciproque de $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$.

Définition : Pour tout nombre complexe z, on pose
$$\exp(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z}.$$

Lorsque z est réel, on retrouve l'exponentielle réelle, et lorsque $z = it$ est imaginaire pur, on retrouve le nombre e^{it} de la section 4.4 : la notation est cohérente.

Proposition 23 : Pour tous complexes z et z' :

(i) $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,z}$ et $\mathrm{Im}\,z$ est un argument de e^z ; en particulier, $\mathrm{e}^z \neq 0$;

(ii) $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{z'}$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$ et $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$;

(iii) $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff z - z' \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$, où $2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z} = \{2\mathrm{i}k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

∘ Démonstration : (i) L'écriture $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z}$ est une forme trigonométrique, puisque $\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,z} > 0$. (ii) Les parties réelles et imaginaires s'ajoutent, et l'on utilise la propriété de l'exponentielle réelle et la proposition 12 :
$$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Re}\,z'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{Im}\,z+\mathrm{Im}\,z')} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,z'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z'} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{z'}.$$

Avec $z' = -z$, on obtient $e^z e^{-z} = e^0 = 1$. Le conjugué de $e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z}$ est $e^{\operatorname{Re} z} e^{-i \operatorname{Im} z} = e^{\overline{z}}$. (iii) D'après l'unicité de la forme trigonométrique (proposition 16), $e^z = e^{z'}$ équivaut à $e^{\operatorname{Re} z} = e^{\operatorname{Re} z'}$ et $\operatorname{Im} z \equiv \operatorname{Im} z' \ [2\pi]$, c'est-à-dire à $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z'$, par injectivité de l'exponentielle réelle, et à l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z' = 2k\pi$. C'est exactement dire que $z - z' = 2ik\pi$. □

Proposition 24 : *(Résolution de $e^z = a$.)* Soit a un nombre complexe. Si $a = 0$, l'équation $e^z = a$ n'a pas de solution. Si $a \neq 0$ et si α est un argument de a, ses solutions sont les complexes

$$z = \ln|a| + i(\alpha + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

∘ Démonstration : Le cas $a = 0$ résulte de la proposition 23. Si $a \neq 0$, le complexe $z_0 = \ln|a| + i\alpha$ vérifie $e^{z_0} = |a| e^{i\alpha} = a$, et la proposition 23 (iii) donne $e^z = a \iff e^z = e^{z_0} \iff z - z_0 \in 2i\pi\mathbb{Z}$. □

Exemples :

- Les solutions de $e^z = -1$ sont les complexes $i(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire les multiples impairs de $i\pi$.
- Comme $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$, les solutions de $e^z = 1 + i$ sont les complexes $\frac{\ln 2}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Remarques :

- L'exponentielle complexe n'est pas injective : elle prend la même valeur en tous les points de $z + 2i\pi\mathbb{Z}$. L'erreur la plus répandue est de « simplifier » une égalité $e^z = e^{z'}$ en $z = z'$, comme on le ferait pour des réels. C'est aussi la raison pour laquelle on ne définit pas de logarithme sur $\mathbb{C}^*$ en première année : l'équation $e^z = a$ a une infinité de solutions, et aucune n'est privilégiée.
- Le seul cas d'égalité $e^z = e^{z'} \Rightarrow z = z'$ que l'on peut affirmer est celui où z et z' sont réels. La propriété $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, elle, reste vraie sans restriction : c'est elle que l'on retiendra, et c'est elle qui sera au cœur de la résolution des équations différentielles linéaires du chapitre 6, où l'on cherchera des solutions de la forme $t \mapsto e^{rt}$ avec r complexe.

4.9 Interprétation géométrique

4.9.1 Angles orientés

La géométrie du lycée présente les angles orientés de manière intuitive. Les nombres complexes permettent d'en donner une définition précise.

Définition : Soit $\vec{w}$ et $\vec{w}\,'$ deux vecteurs non nuls du plan, d'affixes w et w'. On appelle **mesure de l'angle orienté** $(\vec{w}, \vec{w}\,')$ tout argument du complexe $\dfrac{w'}{w}$.

D'après la proposition 17, $\arg \frac{w'}{w} \equiv \arg w' - \arg w \ [2\pi]$: c'est l'angle dont il faut tourner la direction de $\vec{w}$ pour obtenir celle de $\vec{w}\,'$, défini à 2π près. On en déduit la relation de Chasles pour les angles, $(\vec{w}, \vec{w}\,') + (\vec{w}\,', \vec{w}\,'') \equiv (\vec{w}, \vec{w}\,'') \ [2\pi]$, qui traduit l'égalité $\frac{w'}{w} \times \frac{w''}{w'} = \frac{w''}{w}$.

Proposition 25 : Soit A, B, C trois points d'affixes a, b, c, avec $A \neq B$ et $A \neq C$. Alors

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{AC}{AB} \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \ [2\pi].$$

En conséquence :

- les points A, B, C sont alignés si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}$ est réel ;
- les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur.

∘ Démonstration : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour affixes $b - a$ et $c - a$; la première formule résulte de la proposition 11 et de l'interprétation du module comme une distance, la seconde est la définition

de l'angle orienté. Les points sont alignés si et seulement si une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est 0 ou π, c'est-à-dire si et seulement si le quotient, qui est non nul, s'écrit $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = r$ ou $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -r$ avec $r > 0$, ce qui revient à dire qu'il est réel. De même, les droites sont perpendiculaires si et seulement si une mesure de l'angle est $\pm\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si et seulement si le quotient est de la forme $\pm r\mathrm{i}$ avec $r > 0$. □

Exemples :

- Le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$: les côtés AB et AC sont de même longueur, et l'angle en A mesure $\frac{\pi}{3}$. Ainsi, les points d'affixes 0, 1 et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ forment un triangle équilatéral.
- On cherche les complexes z tels que les points d'affixes 1, z et z^2 soient distincts et alignés. Ils sont distincts si et seulement si $z \notin \{-1, 0, 1\}$, et, pour un tel z,

$$\frac{z^2-1}{z-1} = z + 1 \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}.$$

Les complexes cherchés sont donc les réels différents de -1, 0 et 1. De même, les droites joignant le point d'affixe 1 aux deux autres sont perpendiculaires si et seulement si $z+1$ est imaginaire pur, c'est-à-dire si $\mathrm{Re}\, z = -1$, avec $z \neq -1$.

4.9.2 Similitudes directes

On identifie désormais le plan à $\mathbb{C}$, et une application du plan dans lui-même à une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, appelée son *écriture complexe*. Par exemple, la translation de vecteur d'affixe b a pour écriture complexe $z \mapsto z+b$, et l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ a pour écriture complexe $z \mapsto \omega + k(z-\omega)$.

Définition : Soit Ω un point d'affixe ω et θ un réel. La **rotation** de centre Ω et d'angle θ est l'application $z \mapsto \omega + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega)$. On appelle **similitude directe** toute application du plan dont l'écriture complexe est de la forme

$$z \mapsto az + b, \qquad \text{avec} \qquad a \in \mathbb{C}^* \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{C}.$$

La définition de la rotation est cohérente avec la proposition 25 : si M' est l'image de $M \neq \Omega$, alors $\frac{z'-\omega}{z-\omega} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, de sorte que $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Théorème 5 : Classification des similitudes directes :
Soit $f : z \mapsto az + b$ une similitude directe, avec $a \in \mathbb{C}^*$.

- Si $a = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, f a un unique point fixe Ω, d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$, et

$$f(z) - \omega = a\,(z-\omega) \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

L'application f est alors la composée de la rotation de centre Ω et d'angle $\arg a$ et de l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$, qui commutent. On dit que f est la similitude de centre Ω, de **rapport** $|a|$ et d'**angle** $\arg a$.

Dans tous les cas, f multiplie les distances par $|a|$ et conserve les angles orientés.

∘ Démonstration : Le cas $a = 1$ est la définition d'une translation. Si $a \neq 1$, l'équation $f(\omega) = \omega$ s'écrit $a\omega + b = \omega$, et a pour unique solution $\omega = \frac{b}{1-a}$. En soustrayant membre à membre $f(z) = az + b$ et $\omega = a\omega + b$, on obtient $f(z) - \omega = a(z-\omega)$. Écrivons $a = |a|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. L'homothétie $h : z \mapsto \omega + |a|(z-\omega)$ et la rotation $r : z \mapsto \omega + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega)$ vérifient

$$h\big(r(z)\big) = \omega + |a|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega) = f(z) \qquad \text{et} \qquad r\big(h(z)\big) = \omega + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,|a|(z-\omega) = f(z).$$

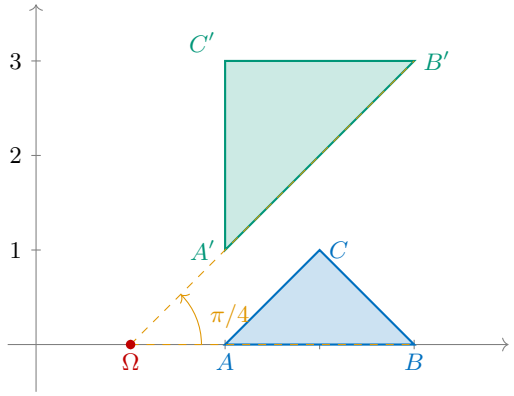
Enfin, pour des points d'affixes z_1, z_2, z_3 avec $z_1 \neq z_2$ et $z_1 \neq z_3$, on a $f(z_2) - f(z_1) = a(z_2 - z_1)$, donc $|f(z_2) - f(z_1)| = |a|\,|z_2 - z_1|$, et

$$\frac{f(z_3)-f(z_1)}{f(z_2)-f(z_1)} = \frac{a(z_3-z_1)}{a(z_2-z_1)} = \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1},$$

ce qui, par la proposition 25, est la conservation des angles orientés. □

Exemple : On considère la similitude $f : z \mapsto (1+\mathrm{i})z - \mathrm{i}$. Son coefficient $a = 1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ est différent de 1, et son point fixe a pour affixe $\omega = \frac{-\mathrm{i}}{1-(1+\mathrm{i})} = \frac{-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}} = 1$. C'est donc la similitude de centre $\Omega(1)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Elle envoie les points $A(2)$, $B(4)$ et $C(3+\mathrm{i})$ sur

$$A' = 1+(1+\mathrm{i})(2-1) = 2+\mathrm{i}, \qquad B' = 1+(1+\mathrm{i})(4-1) = 4+3\mathrm{i}, \qquad C' = 1+(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i}) = 2+3\mathrm{i}.$$



Le triangle vert $A'B'C'$ est l'image du triangle bleu ABC par la similitude de centre Ω, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$: le segment $[\Omega B]$, de longueur 3, est tourné de $\frac{\pi}{4}$ et devient $[\Omega B']$, de longueur $3\sqrt{2}$. Les deux triangles ont la même forme et la même orientation, mais pas la même taille.

Remarques :

- Lorsque a est un réel différent de 1, la similitude est l'homothétie de centre Ω et de rapport a ; lorsque $|a| = 1$ et $a \neq 1$, c'est la rotation de centre Ω et d'angle $\arg a$. L'erreur la plus répandue est de lire le centre sur l'écriture $z \mapsto az+b$, en croyant qu'il a pour affixe b : c'est l'image de l'origine, et non le point fixe.
- L'application $z \mapsto \overline{z}$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des réels. Elle conserve les distances, puisque $|\overline{z_2} - \overline{z_1}| = |z_2 - z_1|$, mais elle change chaque angle orienté en son opposé, puisque le quotient de la proposition 25 est remplacé par son conjugué : elle n'est pas une similitude directe. Les applications $z \mapsto a\overline{z} + b$, appelées similitudes indirectes, n'appartiennent pas au programme.
- La composée de deux similitudes directes est une similitude directe, de rapport le produit des rapports et d'angle la somme des angles, puisque $a(a'z+b')+b = aa'z + (ab'+b)$, et toute similitude directe est une bijection, de réciproque $z \mapsto \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$. Au chapitre 11, on dira que les similitudes directes forment un groupe pour la composition.

4.10 Bilan

Tout le chapitre repose sur deux formules, la formule d'addition $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, qui donne $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$, et la relation $|z|^2 = z\overline{z}$. Les autres résultats en découlent, et il vaut mieux savoir les retrouver que les apprendre.

Résultat	**Formule**	**Méthode**
formules d'addition	$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	longueur d'une corde
module	$\lvert z\rvert^2 = z\overline{z},\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{\lvert z\rvert^2}$	conjugué du dénominateur
inégalité triangulaire	$\lvert z+z'\rvert \leqslant \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$	développer $\lvert z+z'\rvert^2$
Euler	$\cos t = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2},\ \sin t = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}$	linéarisation
Moivre	$(\cos t + \mathrm{i}\sin t)^n = \cos(nt) + \mathrm{i}\sin(nt)$	binôme, puis identification
angle moitié	$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = 2\cos\dfrac{t}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}$	factoriser par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}$
second degré	$z = \dfrac{-b \pm \delta}{2a},\ \delta^2 = \Delta$	racine carrée par le système
racines n-ièmes	$\mathbb{U}_n = \{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n} \mid 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$	forme trigonométrique
exponentielle	$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff z - z' \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$	module et argument
géométrie	$\dfrac{c-a}{b-a}$: rapport $\dfrac{AC}{AB}$, angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$	réel : alignés ; imaginaire pur : orthogonaux

Le chapitre 5 dérivera la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ et étudiera les fonctions à valeurs complexes, le chapitre 6 utilisera la linéarisation pour le calcul de primitives et le second degré pour les équations différentielles, et le chapitre 13 reviendra sur les racines des polynômes, avec le théorème de d'Alembert-Gauss.