Chapitre 5

Fonctions usuelles et dérivation pratique

5.1 Introduction historique

> *Rien n'est plus fastidieux, chers collègues mathématiciens, dans la pratique des arts mathématiques, que les grandes pertes de temps subies dans l'ennui des longues multiplications et divisions, de la recherche des rapports et de l'extraction des racines carrées et cubiques [...]*
>
> John Napier - *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, 1614

Les fonctions de ce chapitre ne sont pas nées comme des fonctions, mais comme des outils de calcul. Le logarithme en est l'exemple le plus frappant : il a été inventé pour soulager les astronomes, un siècle avant que l'on sache le dériver, et c'est seulement en le comparant à l'exponentielle qu'on a compris ce qu'il était.

5.1.1 Multiplier en additionnant

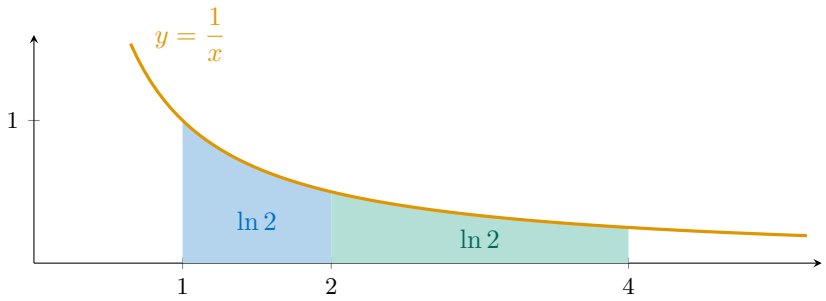
L'idée de **John Napier** est de mettre en regard une progression géométrique et une progression arithmétique. Dans le tableau ci-dessous, on lit 8×128 en ajoutant les nombres placés au-dessous, $3 + 7 = 10$, puis en lisant le nombre placé au-dessus de 10 : le produit vaut 1024.

puissance de 2	1	2	4	**8**	16	32	64	**128**	256	512	**1024**
exposant	0	1	2	**3**	4	5	6	**7**	8	9	**10**

Pour que la méthode serve, il faut des progressions si fines que tout nombre y figure presque : c'est le travail de vingt ans que publie Napier en 1614, au moment où **Jost Bürgi** construit indépendamment des tables analogues. **Henry Briggs** propose de prendre 10 pour base, et publie en 1624 les logarithmes décimaux des entiers jusqu'à 20 000 et de 90 000 à 100 000, avec quatorze décimales. Pendant trois siècles, la règle à calcul et les tables de logarithmes seront l'outil quotidien des ingénieurs.

5.1.2 Une aire qui calcule des logarithmes

En 1647, **Grégoire de Saint-Vincent** observe que les aires situées sous l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ au-dessus d'intervalles $[a\,,b]$ et $[ka\,,kb]$ sont égales ; deux ans plus tard, **Alphonse Antoine de Sarasa** en conclut que l'aire comptée depuis 1 se comporte comme un logarithme, puisqu'elle transforme les produits en sommes. **Nicolaus Mercator** en tire en 1668 la série de $\ln(1+x)$, et **Leonhard Euler**, en 1748, renverse le point de vue en définissant le logarithme comme la réciproque de l'exponentielle : c'est l'ordre que suivra ce chapitre. La figure illustre la propriété de Saint-Vincent avec $k = 2$.



5.2 Généralités sur les fonctions

Dans tout le chapitre, les fonctions sont des applications au sens du chapitre 2, définies sur une partie de $\mathbb{R}$. L'objectif est pratique : manier les fonctions classiques, les dériver et les étudier. Les notions de limite et de continuité, utilisées ici comme au lycée, seront définies au chapitre 8, et les théorèmes de dérivation démontrés au chapitre 9.

5.2.1 Ensemble de définition et représentation graphique

Définition : Une **fonction réelle d'une variable réelle** est une application $f : D \to \mathbb{R}$, où D est une partie de $\mathbb{R}$, appelée **ensemble de définition** de f. Lorsque f est donnée par une expression, son ensemble de définition est, sauf mention contraire, l'ensemble des réels pour lesquels l'expression a un sens. La **représentation graphique**, ou **courbe**, de f dans un repère du plan est l'ensemble

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

Remarque : Le graphe du chapitre 2 et la courbe sont un même objet : le premier est une partie de $D \times \mathbb{R}$, la seconde est sa traduction dans le plan muni d'un repère. Une partie du plan est la courbe d'une fonction si et seulement si toute droite verticale la coupe en au plus un point ; un cercle, par exemple, n'est pas une courbe de fonction.

Proposition 1 : *(Transformations élémentaires.)* Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, a et b deux réels, et $\lambda \neq 0$. Dans un repère orthonormé :

(i) la courbe de $x \mapsto f(x) + b$ se déduit de Γ_f par la translation de vecteur $b\,\vec{\jmath}$;

(ii) la courbe de $x \mapsto f(x + a)$ se déduit de Γ_f par la translation de vecteur $-a\,\vec{\imath}$;

(iii) la courbe de $x \mapsto f(\lambda x)$ se déduit de Γ_f par l'affinité d'axe (Oy) et de rapport $\frac{1}{\lambda}$, qui envoie (x, y) sur $(\frac{x}{\lambda}, y)$;

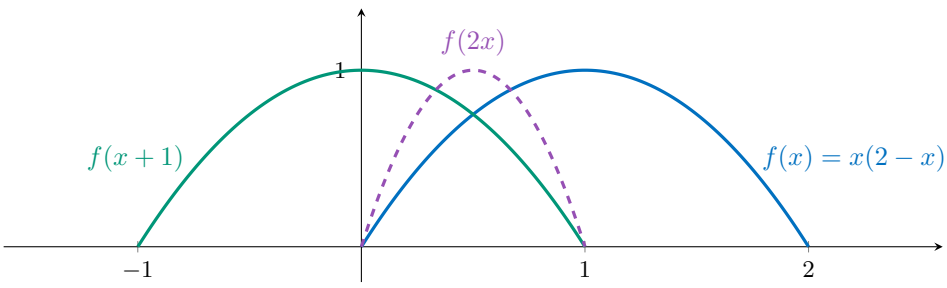
(iv) la courbe de $x \mapsto \lambda f(x)$ se déduit de Γ_f par l'affinité d'axe (Ox) et de rapport λ ;

(v) les courbes de $x \mapsto f(-x)$ et $x \mapsto -f(x)$ sont les symétriques de Γ_f par rapport à (Oy) et à (Ox).

∘ Démonstration : Traitons (ii) ; les autres points se démontrent de la même façon. Notons $g(x) = f(x+a)$, définie sur $D - a = \{x - a \mid x \in D\}$. Pour tout point (x, y) du plan,

$$(x, y) \in \Gamma_g \iff y = f(x + a) \iff (x + a, y) \in \Gamma_f,$$

ce qui signifie que Γ_g est l'image de Γ_f par la translation $(X, Y) \mapsto (X - a, Y)$. □



La courbe bleue de f est translatée d'une unité vers la gauche, et non vers la droite, pour donner celle de $x \mapsto f(x + 1)$; elle est comprimée horizontalement d'un facteur 2 pour donner celle de $x \mapsto f(2x)$, définie sur $[0\,,1]$. L'erreur la plus répandue est de déplacer la courbe dans le sens du signe de a : le point d'abscisse x de la nouvelle courbe correspond au point d'abscisse $x + a$ de l'ancienne.

5.2.2 Parité, périodicité

Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$.

- On suppose D symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire $-x \in D$ pour tout $x \in D$. La fonction f est **paire** si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D$, et **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D$.
- Soit $T > 0$. On suppose que $x + T$ et $x - T$ appartiennent à D pour tout $x \in D$. La fonction f est **T-périodique** si $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in D$.

D'après la proposition 1, la courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe (Oy), celle d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine, et celle d'une fonction T-périodique est invariante par la translation de vecteur $T\vec{\imath}$. Ces propriétés **réduisent le domaine d'étude** : pour une fonction paire ou impaire, il suffit d'étudier f sur $D \cap [0, +\infty[$; pour une fonction T-périodique, sur l'intersection de D avec un intervalle de longueur T ; et pour une fonction à la fois paire et T-périodique, sur $D \cap [0, \frac{T}{2}]$, comme le cosinus sur $[0, \pi]$.

Remarques :

- Une fonction impaire définie en 0 y vaut 0, puisque $f(0) = -f(0)$.
- « Non paire » ne signifie pas « impaire ». La fonction $x \mapsto x + 1$ n'est ni paire ni impaire, et la seule fonction à la fois paire et impaire sur D est la fonction nulle. L'erreur la plus répandue est d'oublier de vérifier que l'ensemble de définition est symétrique : la fonction $x \mapsto x^2$, définie sur $[-1, 2]$, n'est pas paire.
- Toute fonction f définie sur un ensemble symétrique s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{impaire}}.$$

Pour l'exponentielle, cette décomposition fera apparaître les fonctions hyperboliques de la section 5.7.

5.2.3 Opérations, monotonie, fonctions bornées

Si f et g sont définies sur D, on définit $f + g$, fg, λf point par point, et $\frac{f}{g}$ sur l'ensemble des $x \in D$ tels que $g(x) \neq 0$. La composée $g \circ f$ du chapitre 2 est définie sur l'ensemble des x de l'ensemble de définition de f tels que $f(x)$ appartienne à celui de g.

Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f est **croissante** si, pour tous x, y de D, $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$, et **strictement croissante** si $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$; on définit de même les fonctions (strictement) décroissantes, et une fonction est (strictement) **monotone** si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante. On dit que f est **majorée** s'il existe un réel M tel que $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in D$, **minorée** s'il existe m tel que $f(x) \geqslant m$ pour tout $x \in D$, et **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Proposition 2 : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ avec $f(D) \subset D'$.

(i) Si f et g sont monotones de même sens, $g \circ f$ est croissante ; si elles sont monotones de sens contraires, $g \circ f$ est décroissante. Le résultat vaut aussi avec des monotonies strictes.

(ii) Une fonction strictement monotone est injective.

(iii) La fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

∘ Démonstration : (i) Supposons par exemple f croissante et g décroissante. Si $x \leqslant y$, alors $f(x) \leqslant f(y)$, puis $g(f(x)) \geqslant g(f(y))$. Les autres cas sont identiques. (ii) Si $x \neq y$, par exemple $x < y$, alors $f(x) < f(y)$ ou $f(x) > f(y)$ selon le sens de monotonie ; dans les deux cas $f(x) \neq f(y)$. (iii) Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout x, alors $|f(x)| \leqslant \max(|m|, |M|)$. Réciproquement, si $|f(x)| \leqslant K$, alors $-K \leqslant f(x) \leqslant K$. □

Remarques :

- La somme de deux fonctions croissantes est croissante, mais le produit de deux fonctions croissantes ne l'est pas toujours : $x \mapsto x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, son carré ne l'est pas. Le produit de deux fonctions croissantes *positives* est croissant.
- Géométriquement, f est bornée si et seulement si sa courbe est contenue dans une bande horizontale $\mathbb{R} \times [-K\,, K]$. Ainsi sin et cos sont bornées, alors que tan n'est ni majorée ni minorée sur $]-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}[$.

5.3 Dérivation

5.3.1 Nombre dérivé, fonction dérivée

Dans cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Définition : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est **dérivable en** a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite finie lorsque h tend vers 0, $h \neq 0$ et $a+h \in I$. Cette limite est le **nombre dérivé** $f'(a)$, et la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

est la **tangente** à la courbe de f au point d'abscisse a. Si f est dérivable en tout point de I, la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est la **dérivée** de f, que l'on note aussi $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ ou $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$.

La notation de **Leibniz** rappelle que le nombre dérivé est la limite d'un quotient d'accroissements, $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Les règles suivantes sont connues depuis le lycée ; elles seront démontrées au chapitre 9.

Proposition 3 : *(Opérations, admises à ce stade.)* Soit f et g deux fonctions dérivables sur I et λ un réel. Alors $\lambda f + g$ et fg sont dérivables sur I, et $\frac{f}{g}$ l'est sur tout intervalle où g ne s'annule pas :

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g' \qquad (fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Si f est dérivable sur I et g dérivable sur un intervalle J contenant $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'.$$

Remarque : La formule de dérivation d'une composée, écrite avec les notations de Leibniz, prend la forme mnémotechnique $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pour $z = g(y)$ et $y = f(x)$, comme si l'on simplifiait par $\mathrm{d}y$. L'erreur la plus répandue est d'oublier le facteur f' : la dérivée de $x \mapsto \sin(x^2)$ est $x \mapsto 2x\cos(x^2)$, et non $x \mapsto \cos(x^2)$.

5.3.2 Dérivée et variations

Théorème 1 : Dérivée et monotonie (admis) :
Soit f une fonction dérivable sur un *intervalle* I.

(i) f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I ;

(ii) f est croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur I ;

(iii) si $f' \geqslant 0$ sur I et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, f est strictement croissante sur I.

On a les énoncés analogues pour les fonctions décroissantes.

Le sens direct de (ii) découle de la définition : si f est croissante, les taux d'accroissement sont positifs, et leur limite aussi. Les réciproques, qui sont les points utiles, reposent sur le théorème des accroissements finis, que démontrera le chapitre 9 : la difficulté est de passer d'une information locale, le signe de la dérivée en chaque point, à une information globale.

Remarques :

- L'hypothèse d'intervalle est indispensable. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ a une dérivée négative sur $\mathbb{R}^*$, mais elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$, puisque $-1 < 1$ alors que $\frac{1}{-1} < \frac{1}{1}$. De même, la fonction égale à 1 sur $]0, +\infty[$ et à -1 sur $]-\infty, 0[$ a une dérivée nulle sans être constante : elle l'est seulement sur chacun des deux intervalles.
- La réciproque de (iii) est fausse dans le sens qu'on croit parfois : la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors que sa dérivée s'annule en 0. Une dérivée strictement positive est une condition suffisante, non nécessaire.

5.3.3 Branches infinies et asymptotes

Pour tracer une courbe, il faut savoir comment elle se comporte lorsque x ou $f(x)$ devient grand en valeur absolue : on parle de **branche infinie**. Les limites sont utilisées ici comme au lycée ; le chapitre 8 les définira.

Définition : Soit f une fonction et Γ_f sa courbe.

- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers un réel a, éventuellement d'un seul côté, la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à Γ_f.
- Si $f(x)$ tend vers un réel ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à Γ_f en $+\infty$ (ou $-\infty$).
- Soit $a \neq 0$ et b deux réels. Si $f(x) - (ax+b)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à Γ_f en $+\infty$ (ou $-\infty$).

Dans les trois cas, la distance verticale entre la courbe et la droite tend vers 0, ou bien, pour l'asymptote verticale, la courbe s'approche de la droite en s'éloignant indéfiniment. Les exemples sont déjà nombreux : la tangente a les asymptotes verticales $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (chapitre 4), et l'on verra que le logarithme a l'asymptote verticale $x = 0$, l'arc tangente les asymptotes horizontales $y = \pm\frac{\pi}{2}$, la tangente hyperbolique les asymptotes $y = \pm 1$.

♡ **Méthode : Pour chercher une asymptote oblique en** $+\infty$, lorsque $f(x)$ tend vers $\pm\infty$:

- ▶ On étudie la limite de $\frac{f(x)}{x}$; si elle existe et vaut un réel $a \neq 0$, on passe à l'étape suivante.
- ▶ On étudie la limite de $f(x) - ax$; si elle existe et vaut un réel b, la droite $y = ax + b$ est asymptote.
- ▶ On étudie le *signe* de $f(x) - (ax+b)$, qui donne la **position relative** : la courbe est au-dessus de l'asymptote là où ce signe est positif, au-dessous là où il est négatif.

Ces étapes sont nécessaires : si $f(x) - (ax + b) = \varepsilon(x)$ tend vers 0, alors $\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b+\varepsilon(x)}{x}$ tend vers a, et $f(x) - ax = b + \varepsilon(x)$ tend vers b. Elles sont suffisantes par définition.

Exemple : Pour $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$, la division euclidienne de $x^2 + 1$ par $x - 1$ donne

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1}.$$

La droite $y = x + 1$ est donc asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$, puisque $\frac{2}{x-1}$ tend vers 0 ; la courbe est au-dessus pour $x > 1$ et au-dessous pour $x < 1$. La droite $x = 1$ est asymptote verticale. Lorsque l'expression de f s'y prête, cette écriture directe est plus rapide que la méthode en trois étapes.

Définition : On suppose que $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. On dit que Γ_f a une **branche parabolique**

- de direction (Oy) si $\frac{f(x)}{x}$ tend vers $\pm\infty$;
- de direction (Ox) si $\frac{f(x)}{x}$ tend vers 0 ;
- de direction la droite $y = ax$ si $\frac{f(x)}{x}$ tend vers $a \neq 0$ et $f(x) - ax$ tend vers $\pm\infty$.

Remarques :

- Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto x^2$ ont en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy), les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \ln x$ une branche parabolique de direction (Ox) : leur courbe monte indéfiniment, mais de plus en plus lentement. Les croissances comparées de la section 5.5 justifieront ces affirmations pour l'exponentielle et le logarithme.
- L'erreur la plus répandue est de conclure à une asymptote dès que $\frac{f(x)}{x}$ a une limite finie a. Pour $f(x) = x + \ln x$, on a $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{\ln x}{x} \to 1$, mais $f(x) - x = \ln x$ tend vers $+\infty$: la courbe a une branche parabolique de direction $y = x$, et s'écarte indéfiniment de toute droite parallèle à celle-ci.
- Le chapitre 10 donnera, avec les développements limités, une méthode qui fournit en un seul calcul la pente a, l'ordonnée à l'origine b et la position relative.

5.3.4 Étude d'une fonction

♡ **Méthode : Pour étudier une fonction f et tracer sa courbe**, on procède dans l'ordre suivant :

- *Ensemble de définition.* On détermine D, et l'on repère ses bornes, qui sont les points où il faudra étudier des limites.
- *Réduction du domaine d'étude.* On cherche une parité ou une périodicité, ou plus généralement une symétrie, et l'on note ce qu'elle permettra de reconstituer : symétrie par rapport à (Oy), à l'origine, ou translation.
- *Limites et branches infinies.* On calcule les limites de f aux bornes de l'ensemble d'étude, on en déduit les asymptotes verticales et horizontales, puis l'on cherche les asymptotes obliques ou les branches paraboliques, avec la position relative de la courbe et de ses asymptotes.
- *Variations.* On calcule la dérivée, on la factorise au maximum, on étudie son signe et l'on dresse le tableau de variations, en y reportant les limites et les extremums.
- *Points et tangentes remarquables.* On calcule les valeurs aux points où la dérivée s'annule, qui donnent des tangentes horizontales, les intersections avec les axes, et la tangente en quelques points bien choisis, comme l'origine.
- *Tracé.* On trace d'abord les asymptotes et les tangentes remarquables, on place les points remarquables, puis l'on dessine la courbe sur l'ensemble d'étude en respectant le tableau de variations et les positions relatives, et l'on complète par les symétries de la deuxième étape.

Le tracé sert aussi de contrôle : une courbe qui ne peut pas être tracée en accord avec tous les résultats signale une erreur de calcul.

Exemple : **Étude complète de** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$**.**

1. Ensemble de définition. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

2. Réduction. D est symétrique, et $f(-x) = -f(x)$: f est impaire. On l'étudie sur l'ensemble

$$D_+ = [0\,,1[\cup]1\,,+\infty[,$$

et la courbe sera complétée par la symétrie de centre O.

3. Limites et branches infinies. Quand x tend vers 1, le numérateur tend vers 1 et le dénominateur x^2-1 tend vers 0, négativement à gauche et positivement à droite : $f(x)$ tend vers $-\infty$ à gauche de 1 et vers $+\infty$ à droite. La droite $x = 1$ est asymptote verticale. En $+\infty$, on écrit

$$f(x) = x + \frac{x}{x^2-1}, \qquad \text{avec} \qquad \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x - 1/x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 :$$

la droite $y = x$ est asymptote oblique. La différence $f(x) - x = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$ est positive pour $x > 1$ et négative pour $0 < x < 1$: la courbe est au-dessus de l'asymptote sur $]1\,,+\infty[$, au-dessous sur $]0\,,1[$, et elle la coupe en l'origine.

4. Variations. La formule de dérivation d'un quotient donne, après factorisation,

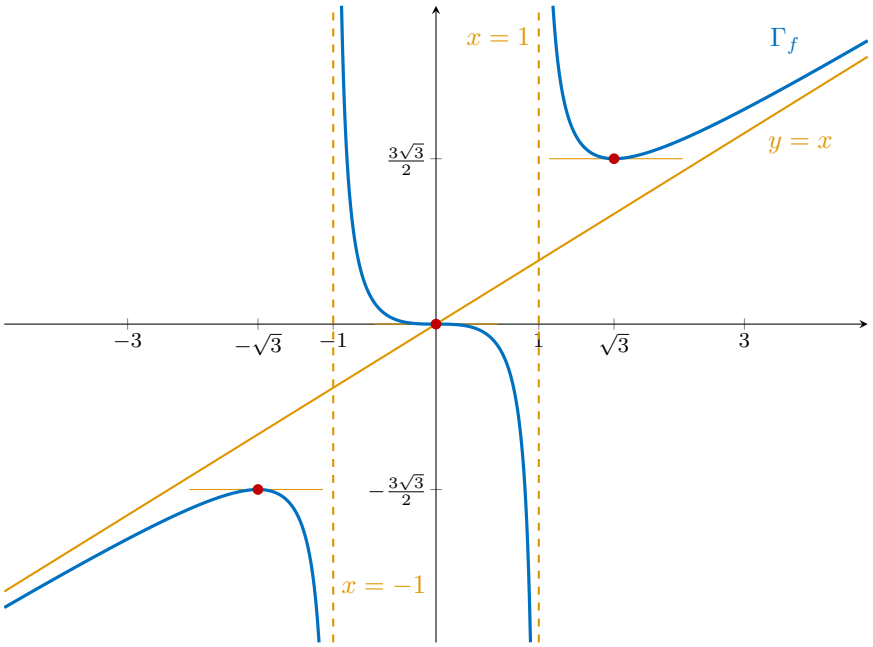
$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2},$$

qui est du signe de $x^2 - 3$ et s'annule en 0 et en $\sqrt{3}$. On calcule $f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}60$.

x	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 ↘		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

5. Points et tangentes remarquables. La tangente en $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ est horizontale, puisqu'il s'agit d'un minimum local. En l'origine, $f'(0) = 0$: la tangente est l'axe des abscisses, bien que 0 ne soit pas un extremum, la fonction étant décroissante sur $]-1,1[$; la courbe y traverse sa tangente, comme celle de $x \mapsto -x^3$. L'origine est le seul point de la courbe sur les axes.

6. Tracé. On trace les asymptotes $x = \pm 1$ et $y = x$, les tangentes horizontales, et les points $(0,0)$, $\left(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, puis la courbe sur D_+, que l'on complète par symétrie centrale.



La courbe, en bleu, a trois branches. Sur $]1,+\infty[$, elle descend de l'asymptote verticale $x = 1$ jusqu'au minimum $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, où la tangente est horizontale, puis remonte en se rapprochant de l'asymptote oblique $y = x$ par au-dessus. Sur $]-1,1[$, elle décroît, traverse l'asymptote oblique en l'origine avec une tangente horizontale, et plonge vers les deux asymptotes verticales. La branche de gauche se déduit de celle de droite par la symétrie de centre O, conformément à l'imparité. Chacun des résultats de l'étude se lit sur la figure, et aucun n'est superflu : sans la position relative, on ne saurait pas de quel côté de la droite $y = x$ placer les branches extérieures.

Exemple : **Une inégalité démontrée par l'étude d'une fonction.** Montrons que l'on a, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6}.$$

On pose $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$, qui définit une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \qquad \text{et} \qquad g''(x) = x - \sin x.$$

La proposition 5 du chapitre 4 donne $g''(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$; donc g' est croissante sur $[0,+\infty[$, et $g'(x) \geqslant g'(0) = 0$; donc g est croissante, et $g(x) \geqslant g(0) = 0$. Avec l'inégalité $\sin x \leqslant x$ du chapitre 4, on obtient l'encadrement

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x \qquad \text{pour tout } x \geqslant 0,$$

qui donne par exemple $0{,}0998 \leqslant \sin(0{,}1) \leqslant 0{,}1$. On verra au chapitre 10 que ces polynômes sont les débuts du développement limité du sinus.

5.3.5 Fonction réciproque

Dans toute cette sous-section, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On appelle **première bissectrice** la droite Δ d'équation $y = x$, qui partage en deux angles égaux le quart de plan des points à coordonnées positives, et l'on note s l'application du plan dans lui-même qui échange les deux coordonnées d'un point :

$$s : (x, y) \longmapsto (y, x).$$

Proposition 4 : *(Courbe d'une bijection réciproque.)*

(i) L'application s est une involution : $s \circ s = \mathrm{id}$. En particulier, s est bijective et $s^{-1} = s$.

(ii) L'application s est la symétrie orthogonale d'axe Δ : elle fixe chaque point de Δ, et pour tout point M hors de Δ, la droite Δ est la médiatrice du segment $[M\, s(M)]$.

(iii) Soit $f : I \to J$ une bijection entre deux parties de $\mathbb{R}$. Alors $s(\Gamma_f) = \Gamma_{f^{-1}}$: la courbe de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à Δ.

∘ Démonstration : (i) Pour tout point (x, y), on a $s(s(x, y)) = s(y, x) = (x, y)$. L'application $g = s$ vérifie donc $g \circ s = \mathrm{id}$ et $s \circ g = \mathrm{id}$, et le théorème 1 du chapitre 2 montre que s est bijective, de réciproque s.

(ii) Soit $M = (x, y)$ et $M' = s(M) = (y, x)$. Si $M \in \Delta$, alors $x = y$ et $M' = M$. Sinon $x \neq y$, donc $M' \neq M$, et la médiatrice de $[MM']$ est une droite. Pour tout point $P = (t, t)$ de Δ, la formule de la distance dans un repère orthonormé donne

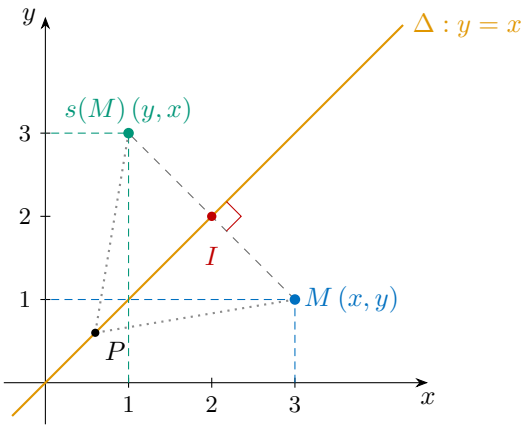
$$PM^2 = (x - t)^2 + (y - t)^2 = (y - t)^2 + (x - t)^2 = PM'^2.$$

Tout point de Δ est donc équidistant de M et de M' : la droite Δ est contenue dans la médiatrice de $[MM']$, qui est une droite, et ces deux droites sont égales.

(iii) Pour tout point (x, y) du plan,

$$(x, y) \in \Gamma_{f^{-1}} \iff \big(x \in J \text{ et } y = f^{-1}(x)\big) \iff \big(y \in I \text{ et } x = f(y)\big) \iff (y, x) \in \Gamma_f.$$

Comme $(y, x) = s(x, y)$, on a donc $\Gamma_{f^{-1}} = s^{-1}(\Gamma_f)$, qui est $s(\Gamma_f)$ d'après le point (i). □



Le point M et son image $s(M)$ ont leurs coordonnées échangées ; le milieu I du segment qui les joint est sur Δ, ce segment est perpendiculaire à Δ, et tout point P de Δ est à la même distance de M et de $s(M)$, comme dans la démonstration du point (ii).

Remarques :

- Le point (iii) donne une forme géométrique à l'observation faite au chapitre 2 après le théorème 1 : le point (x, y) appartient au graphe de f si et seulement si (y, x) appartient à celui de f^{-1}. Ce que le point (ii) ajoute, c'est que cet échange de coordonnées est un pliage de la feuille le long de Δ ; c'est ce qui permet de tracer $\Gamma_{f^{-1}}$ sans aucun calcul dès que Γ_f est connue.
- L'hypothèse d'un repère orthonormé n'intervient qu'en (ii), à travers la formule de la distance, mais elle est indispensable. Si l'on prend 1 cm pour unité en abscisse et 2 cm en ordonnée, le point $M = (1, 0)$ est dessiné à 1 cm de O et son image $s(M) = (0, 1)$ à 2 cm : le point O de Δ n'est pas équidistant des deux, et s n'est plus une symétrie orthogonale. L'erreur la plus répandue est alors de croire à un mauvais calcul, lorsqu'une calculatrice dont la fenêtre n'est pas orthonormée montre des courbes de exp et de ln qui ne paraissent pas symétriques.

Théorème 2 : Bijection réciproque d'une fonction dérivable (admis) :
Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I. Alors $J = f(I)$ est un intervalle, f induit une bijection de I sur J, et sa réciproque f^{-1} est strictement monotone, de même sens que f. Si de plus f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Le fait que $f(I)$ soit un intervalle est le théorème des valeurs intermédiaires, que le chapitre 8 démontrera, et la dérivabilité de f^{-1} sera établie au chapitre 9. En revanche, *une fois la dérivabilité admise*, la formule s'obtient en dérivant l'égalité $f(f^{-1}(y)) = y$ par la formule de dérivation d'une composée : $f'(f^{-1}(y)) \times (f^{-1})'(y) = 1$.

Remarques :

- La formule a une interprétation géométrique simple : la symétrie s envoie une droite de pente $p \neq 0$ sur une droite de pente $\frac{1}{p}$. La tangente à $\Gamma_{f^{-1}}$ au point $(f(a), a)$ est donc la symétrique de la tangente à Γ_f au point $(a, f(a))$, et sa pente est $\frac{1}{f'(a)}$.
- Lorsque $f'(a) = 0$, la tangente à Γ_f est horizontale, et sa symétrique est verticale : f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$. C'est le cas de la fonction $x \mapsto x^3$ en 0, dont la réciproque $y \mapsto y^{1/3}$ a une tangente verticale à l'origine.

5.3.6 Dérivées successives

Définition : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On pose $f^{(0)} = f$ et, si $f^{(n)}$ est dérivable sur I, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$: c'est la **dérivée n-ième** de f, notée aussi $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$. La fonction f est **de classe $\mathcal{C}^n$** si elle est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue, et **de classe $\mathcal{C}^\infty$** si elle est dérivable à tout ordre.

Exemple : La fonction $f : x \mapsto x|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Hors de 0, elle vaut $\pm x^2$, de dérivée $2|x|$; en 0, le taux d'accroissement $\frac{h|h|}{h} = |h|$ tend vers 0. Donc $f' : x \mapsto 2|x|$, qui est continue : f est de classe $\mathcal{C}^1$. En revanche, f' n'est pas dérivable en 0, puisque $\frac{2|h|}{h}$ vaut 2 ou -2 selon le signe de h : f n'est pas deux fois dérivable. La courbe de f est pourtant d'apparence très régulière, ce qui montre que l'œil ne distingue pas les classes de régularité.

5.4 Exponentielle et logarithme

5.4.1 La fonction exponentielle

Théorème 3 : Définition de l'exponentielle :
Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On l'appelle la fonction **exponentielle**, et on la note exp.

∘ Démonstration : L'*existence* est **admise** : la difficulté contournée est de construire une telle fonction, ce que l'on fera en seconde année par la somme d'une série, ou au chapitre 18, après avoir défini le logarithme par une intégrale.

Unicité. Soit f une solution. La fonction $h : x \mapsto f(x)f(-x)$ est dérivable, de dérivée

$$h'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0\,;$$

d'après le théorème 1, elle est constante, égale à $h(0) = 1$. Ainsi $f(x)f(-x) = 1$, et f ne s'annule pas. Si g est une autre solution, la fonction $\frac{g}{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\frac{g'f - gf'}{f^2} = \frac{gf - gf}{f^2} = 0$; elle est constante, égale à $\frac{g(0)}{f(0)} = 1$, donc $g = f$. □

Proposition 5 : Pour tous réels x et y et tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \qquad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \qquad \exp(nx) = \big(\exp(x)\big)^n \qquad \exp(x) > 0.$$

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et l'on a $\exp(x) \geqslant 1 + x$ pour tout réel x, avec égalité seulement en 0. Enfin $\exp(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers 0 en $-\infty$.

∘ Démonstration : On fixe y. La fonction $g : x \mapsto \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$ est dérivable, égale à sa dérivée, et vaut 1 en 0 : par unicité, $g = \exp$, ce qui est la première formule. Avec $y = -x$, on obtient la deuxième, et la troisième s'en déduit par récurrence sur $n \geqslant 0$, puis par passage à l'inverse. Ensuite, $\exp(x) = \exp(\frac{x}{2})^2 > 0$, puisque l'exponentielle ne s'annule pas. Sa dérivée étant elle-même strictement positive, exp est strictement croissante. La fonction $u : x \mapsto \exp(x) - 1 - x$ a pour dérivée $\exp(x) - 1$, négative sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$; elle admet donc un minimum en 0, où elle vaut 0, et elle ne s'annule qu'en 0 par stricte monotonie de part et d'autre. Enfin, $\exp(x) \geqslant 1 + x$ montre que $\exp(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, et $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$ tend alors vers 0 en $-\infty$. □

On note $\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2{,}718$ et $\mathrm{e}^x = \exp(x)$. Cette notation est cohérente avec les puissances : d'après la proposition 5, $\exp(n) = \mathrm{e}^n$ pour tout entier n, et $\exp(\frac{p}{q})$ est l'unique réel positif dont la puissance q-ième vaut e^p. On vérifie aussi que, pour x imaginaire pur, la notation est celle du chapitre 4 : c'est l'objet de la section 5.8.

5.4.2 Le logarithme népérien

D'après le théorème 2, l'exponentielle, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $\exp(\mathbb{R})$. Cet intervalle est contenu dans $]0, +\infty[$, et il contient des réels aussi proches de 0 et aussi grands que l'on veut, d'après les limites de la proposition 5 : c'est $]0, +\infty[$.

Définition : Le **logarithme népérien** est la bijection réciproque de l'exponentielle :

$$\ln : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array} \right. \qquad \text{où, pour } x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}, \quad y = \ln x \iff x = \mathrm{e}^y.$$

Proposition 6 : Pour tous réels $x, y > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

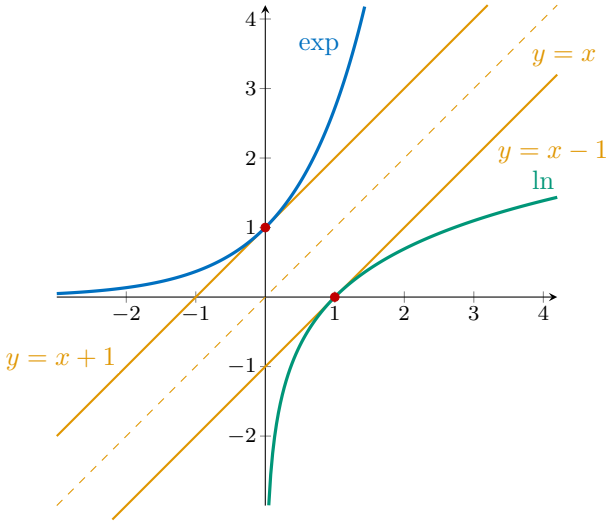
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \qquad \ln \frac{1}{x} = -\ln x \qquad \ln(x^n) = n \ln x \qquad \ln 1 = 0 \qquad \ln \mathrm{e} = 1.$$

La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $\ln'(x) = \frac{1}{x}$; elle est strictement croissante, de limites $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$. Enfin, pour tout $x > -1$, $\ln(1 + x) \leqslant x$, avec égalité seulement en 0.

∘ Démonstration : On a $\mathrm{e}^{\ln x + \ln y} = \mathrm{e}^{\ln x} \mathrm{e}^{\ln y} = xy$, donc $\ln(xy) = \ln x + \ln y$; les autres formules s'en déduisent comme pour l'exponentielle. Le théorème 2 donne la dérivabilité et

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

La stricte croissance et les limites traduisent celles de l'exponentielle. Enfin, pour $x > -1$, on applique l'inégalité $\mathrm{e}^t \geqslant 1 + t$ à $t = \ln(1 + x)$, ce qui donne $1 + x \geqslant 1 + \ln(1 + x)$, avec égalité si et seulement si $\ln(1 + x) = 0$, c'est-à-dire $x = 0$. □



Les courbes de exp et de ln sont symétriques par rapport à la droite $y = x$, comme l'affirme le point (iii) de la proposition 4. La tangente à l'exponentielle en $(0,1)$ est la droite $y = x+1$, et la courbe reste au-dessus : c'est l'inégalité $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$. Sa symétrique, $y = x-1$, est la tangente au logarithme en $(1,0)$, et la courbe reste au-dessous : c'est l'inégalité $\ln x \leqslant x-1$, qui est $\ln(1+x) \leqslant x$ après translation.

Remarques :

- Si u est dérivable sur I et ne s'annule pas, la fonction $\ln|u|$ est dérivable et $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$. En effet, sur $]-\infty, 0[$, $\ln|x| = \ln(-x)$ a pour dérivée $\frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$, et l'on compose. Le quotient $\frac{u'}{u}$ est la *dérivée logarithmique* de u ; elle transforme les produits en sommes, ce qui simplifie la dérivation d'un produit de nombreux facteurs.
- L'erreur la plus répandue est d'écrire $\ln(x+y) = \ln x + \ln y$, ou $\ln(x^2) = 2\ln x$ sans hypothèse de signe : pour $x < 0$, $\ln(x^2) = 2\ln|x|$.

5.4.3 Logarithmes de base a

Définition : Pour un réel $a > 0$, $a \neq 1$, le **logarithme de base a** est la fonction $\log_a : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln a}$ sur $]0, +\infty[$. Le **logarithme décimal** est $\log_{10}$, noté aussi log, et le logarithme en base 2 est $\log_2$.

Le logarithme de base a transforme encore les produits en sommes, et $\log_a(a^n) = n$: c'est le logarithme adapté à l'écriture des nombres en base a. Un entier $N \geqslant 1$ s'écrit avec k chiffres en base 10 si et seulement si $10^{k-1} \leqslant N < 10^k$, c'est-à-dire $k-1 \leqslant \log_{10} N < k$.

Exemple : On a $\log_{10}(2^{2026}) = 2026\log_{10} 2 \approx 609{,}89$: le nombre 2^{2026} s'écrit avec 610 chiffres en base 10, ce que l'on vérifie en le calculant. En informatique, le logarithme en base 2 mesure le nombre de bits : un entier $N \geqslant 1$ s'écrit avec k chiffres en base 2 si et seulement si $k-1 \leqslant \log_2 N < k$, et il en faut 20 pour écrire un million, puisque $2^{19} < 10^6 < 2^{20}$.

5.5 Fonctions puissances et croissances comparées

5.5.1 Puissances réelles

Définition : Pour $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}.$$

La fonction $x \mapsto x^\alpha$, définie sur $]0, +\infty[$, est la **fonction puissance** d'exposant α.

Pour $\alpha = n$ entier, $\mathrm{e}^{n\ln x} = (\mathrm{e}^{\ln x})^n = x^n$: la définition prolonge celle du chapitre 3. Pour $\alpha = \frac{1}{n}$, avec $n \geqslant 1$, le réel $x^{1/n} > 0$ vérifie $(x^{1/n})^n = \mathrm{e}^{\ln x} = x$: c'est la racine n-ième positive de x, dont l'existence avait été admise au chapitre 4. Elle repose désormais sur la bijectivité de l'exponentielle, qui elle-même repose sur le théorème des valeurs intermédiaires du chapitre 8. En particulier, $x^{1/2} = \sqrt{x}$.

Proposition 7 : Pour tous $x, y > 0$ et tous réels α, β :

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \qquad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \qquad \ln(x^\alpha) = \alpha \ln x.$$

La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$. Elle est strictement croissante si $\alpha > 0$, strictement décroissante si $\alpha < 0$, constante égale à 1 si $\alpha = 0$.

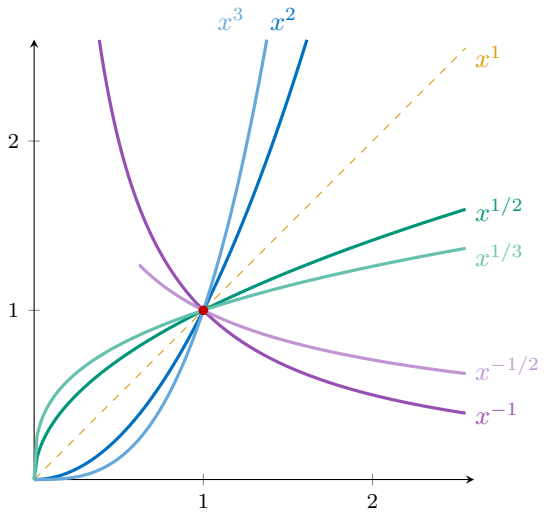
∘ Démonstration : Par définition, $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$. Les trois formules s'obtiennent en prenant le logarithme des deux membres : par exemple $\ln\left((x^\alpha)^\beta\right) = \beta\ln(x^\alpha) = \alpha\beta\ln x = \ln(x^{\alpha\beta})$, et ln est injective. Pour la dérivée, la formule de dérivation d'une composée donne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{\alpha\ln x}\right) = \frac{\alpha}{x}\,\mathrm{e}^{\alpha\ln x} = \alpha\, x^{-1} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1},$$

qui est du signe de α. □

Remarques :

- Pour $\alpha > 0$, x^α tend vers 0 en 0 : on *prolonge* la fonction en posant $0^\alpha = 0$. Le taux d'accroissement en 0, $\frac{h^\alpha}{h} = h^{\alpha-1}$, tend vers 0 si $\alpha > 1$, vaut 1 si $\alpha = 1$, et tend vers $+\infty$ si $0 < \alpha < 1$: la fonction prolongée est dérivable en 0 si et seulement si $\alpha \geqslant 1$, et sa courbe a une tangente verticale en l'origine lorsque $0 < \alpha < 1$, comme celle de la racine carrée.
- Seules les puissances *entières* sont définies pour $x < 0$. L'écriture $(-8)^{1/3}$ n'a pas de sens avec cette définition, même si -2 est l'unique réel dont le cube vaut -8 ; et l'erreur la plus répandue est d'appliquer les règles de calcul hors de leur domaine, comme dans $-1 = (-1)^{2\times\frac{1}{2}} = \big((-1)^2\big)^{1/2} = 1$.
- Pour $a > 0$, la fonction $x \mapsto a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$ est l'*exponentielle de base* a, de dérivée $x \mapsto \ln(a)\, a^x$; c'est la réciproque de $\log_a$. On ne confondra pas $x \mapsto x^\alpha$, où l'exposant est fixe, et $x \mapsto a^x$, où c'est la base qui est fixe.



Toutes les courbes passent par le point $(1,1)$. Sur $]0,1[$, les puissances d'exposant plus grand sont plus petites, et l'ordre s'inverse sur $]1,+\infty[$; les exposants supérieurs à 1 donnent des courbes tangentes à l'axe horizontal en 0, ceux compris entre 0 et 1 des courbes tangentes à l'axe vertical, et les exposants négatifs des courbes asymptotes aux deux axes.

5.5.2 Croissances comparées

Théorème 4 : Croissances comparées :
Pour tous réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha\, \mathrm{e}^{\beta x} = 0.$$

◦ Démonstration : *Première limite.* Pour $t > 0$, $\ln t \leqslant t - 1 < t$. On l'applique à $t = x^{\alpha/2}$: pour $x > 1$, $\frac{\alpha}{2}\ln x < x^{\alpha/2}$, d'où

$$0 < \frac{\ln x}{x^\alpha} < \frac{2}{\alpha}\cdot\frac{x^{\alpha/2}}{x^\alpha} = \frac{2}{\alpha}\, x^{-\alpha/2},$$

et le majorant tend vers 0 en $+\infty$, puisque $-\frac{\alpha}{2} < 0$. On conclut par encadrement, comme au lycée ; le chapitre 8 justifiera ce passage à la limite.

Les autres limites s'en déduisent par changement de variable. Avec $x = \frac{1}{t}$, $x^\alpha \ln x = -\frac{\ln t}{t^\alpha}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Avec $x = \frac{\ln t}{\beta}$, c'est-à-dire $t = \mathrm{e}^{\beta x}$, on a $\frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^{\beta x}} = \beta^{-\alpha}\left(\frac{\ln t}{t^{1/\alpha}}\right)^\alpha$, qui tend vers 0 ; son inverse tend vers $+\infty$. La dernière limite résulte de la troisième en remplaçant x par $-x$. □

Remarques :

- On retient le théorème en disant qu'en $+\infty$, « l'exponentielle l'emporte sur les puissances, qui l'emportent sur le logarithme ». Pour $x = 100$, on a $\ln x \approx 4{,}6$, $\sqrt{x} = 10$, $x = 100$ et $\mathrm{e}^x \approx 2{,}7 \times 10^{43}$.
- Ces résultats portent sur des *limites*, non sur des inégalités valables partout. L'erreur la plus répandue est de croire que $\mathrm{e}^x > x^{10}$ dès que $x > 1$: en réalité $x^{10} > \mathrm{e}^x$ sur l'intervalle compris entre 1,118 et 35,77 environ, et par exemple $10^{10} > \mathrm{e}^{10} \approx 22\,026$. L'exponentielle ne l'emporte qu'au-delà de 35,77.
- On en déduit des limites classiques, comme $x^x = \mathrm{e}^{x \ln x} \to 1$ quand $x \to 0^+$, ou $\frac{\ln x}{x} \to 0$ en $+\infty$, qui montre que la courbe du logarithme, bien que tendant vers $+\infty$, croît de plus en plus lentement. Le chapitre 10 précisera ces comparaisons avec les notations de Landau.

5.6 Fonctions circulaires réciproques

Les fonctions sin, cos et tan ne sont pas injectives, puisqu'elles sont périodiques. Pour les inverser, on les *restreint* à un intervalle sur lequel elles sont strictement monotones, et l'on applique le théorème 2.

5.6.1 Arc sinus et arc cosinus

Définition : La restriction du sinus à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est une bijection strictement croissante sur $[-1, 1]$; sa réciproque est l'**arc sinus**, $\mathrm{Arcsin} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La restriction du cosinus à $[0, \pi]$ est une bijection strictement décroissante sur $[-1, 1]$; sa réciproque est l'**arc cosinus**, $\mathrm{Arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$. Ainsi, pour $x \in [-1, 1]$:

$$y = \mathrm{Arcsin}\, x \iff \left(\sin y = x \quad \text{et} \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

$$y = \mathrm{Arccos}\, x \iff \left(\cos y = x \quad \text{et} \quad y \in [0, \pi]\right).$$

Proposition 8 :

(i) Pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\sin(\mathrm{Arcsin}\, x) = \cos(\mathrm{Arccos}\, x) = x, \qquad \cos(\mathrm{Arcsin}\, x) = \sin(\mathrm{Arccos}\, x) = \sqrt{1 - x^2},$$

$$\mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2}.$$

(ii) La fonction Arcsin est impaire, et $\mathrm{Arccos}(-x) = \pi - \mathrm{Arccos}\, x$.

(iii) Les fonctions Arcsin et Arccos sont dérivables sur $]-1, 1[$, et

$$\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \mathrm{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

∘ Démonstration : (i) Les premières égalités sont la définition d'une réciproque. Si $y = \mathrm{Arcsin}\, x$, alors $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc $\cos y \geqslant 0$ et $\cos^2 y = 1 - x^2$, d'où $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$; de même $\sin(\mathrm{Arccos}\, x) \geqslant 0$. Enfin, $\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arccos}\, x$ appartient à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et son sinus vaut $\cos(\mathrm{Arccos}\, x) = x$: c'est donc $\mathrm{Arcsin}\, x$.

(ii) Le réel $-\mathrm{Arcsin}\, x$ est dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et son sinus vaut $-x$: c'est $\mathrm{Arcsin}(-x)$. De même, $\pi - \mathrm{Arccos}\, x \in [0, \pi]$ a pour cosinus $-x$.

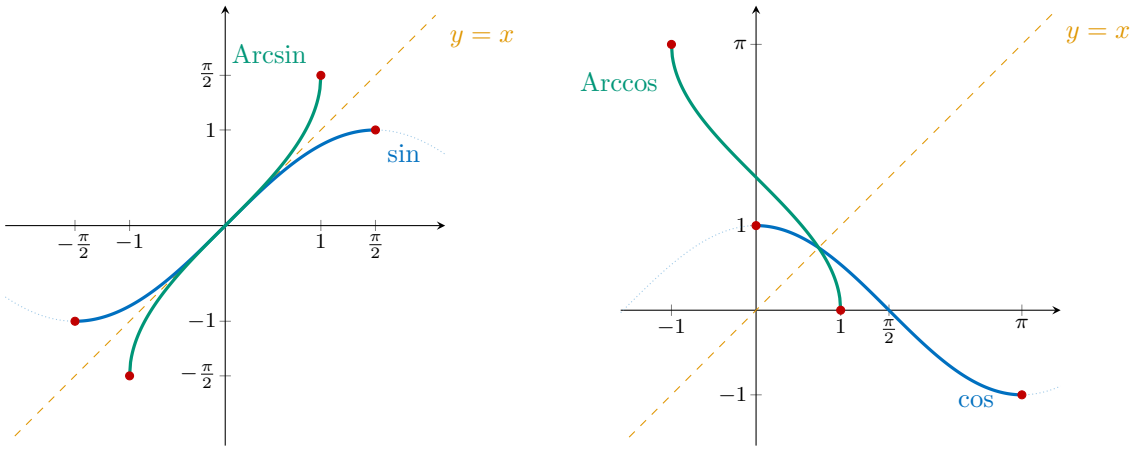
(iii) Le sinus a une dérivée cos qui ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; le théorème 2, appliqué sur cet intervalle ouvert, puis (i), donnent pour $x \in]-1, 1[$

$$\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\cos(\mathrm{Arcsin}\, x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

et la relation $\mathrm{Arccos} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}$ donne la seconde formule. □

Remarques :

- L'égalité $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$ est vraie pour tout $x \in [-1\,,1]$, mais l'égalité $\operatorname{Arcsin}(\sin y) = y$ n'est vraie que pour $y \in [-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$. L'erreur la plus répandue est d'écrire $\operatorname{Arcsin}(\sin \pi) = \pi$, alors que $\operatorname{Arcsin}(\sin \pi) = \operatorname{Arcsin} 0 = 0$. Plus généralement, $\operatorname{Arcsin}(\sin y)$ est l'unique réel de $[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$ ayant le même sinus que y.
- Aux points ± 1, la dérivée du sinus ou du cosinus restreint s'annule, et les courbes de Arcsin et Arccos y ont des tangentes verticales, comme le prévoit la seconde remarque du théorème 2.



À gauche, la courbe verte de l'arc sinus est la symétrique, par rapport à la droite $y = x$, de celle du sinus restreint à $[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$, en bleu ; le reste de la courbe du sinus, en pointillé, n'intervient pas. À droite, de même, la courbe de l'arc cosinus est la symétrique de celle du cosinus restreint à $[0\,,\pi]$. Les points marqués en rouge, extrémités des arcs restreints, ont des tangentes horizontales sur les courbes de sin et cos, et donc verticales sur celles des réciproques. On peut aussi déduire la courbe de l'arc cosinus de celle de l'arc sinus par la relation $\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x$, c'est-à-dire par une symétrie par rapport à la droite horizontale $y = \frac{\pi}{4}$.

5.6.2 Arc tangente

Définition : La restriction de la tangente à $]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}[$ est une bijection strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (chapitre 4, proposition 7) ; sa réciproque est l'**arc tangente**, $\operatorname{Arctan} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}[$:

$$y = \operatorname{Arctan} x \iff \left(\tan y = x \quad \text{et} \quad y \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[\right).$$

Proposition 9 : La fonction Arctan est impaire, strictement croissante, de limites $\pm\frac{\pi}{2}$ en $\pm\infty$, et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

De plus, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x}$ vaut $\dfrac{\pi}{2}$ pour $x > 0$ et $-\dfrac{\pi}{2}$ pour $x < 0$.

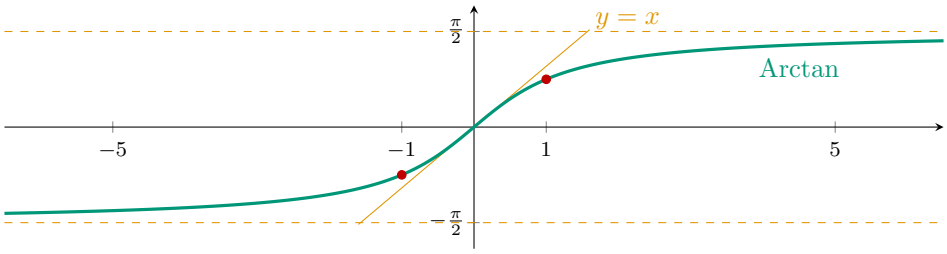
∘ Démonstration : La dérivée de la tangente, $1 + \tan^2$, ne s'annule pas ; le théorème 2 donne

$$\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\operatorname{Arctan} x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

L'imparité se démontre comme celle de l'arc sinus, et les limites traduisent les asymptotes verticales de la tangente. Pour la dernière formule, la fonction $g : x \mapsto \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+1/x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Comme $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle, le théorème 1 ne s'applique que sur chacun des intervalles $]0\,,+\infty[$ et $]-\infty\,,0[$: g y est constante, égale à $g(1) = 2\operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{2}$ sur le premier, et à $g(-1) = -\frac{\pi}{2}$ sur le second. □



La courbe de l'arc tangente est comprise entre ses deux asymptotes horizontales $y = \pm\frac{\pi}{2}$; elle a pour tangente en l'origine la droite $y = x$, de pente $\mathrm{Arctan}'(0) = 1$, et passe par les points $(\pm 1, \pm\frac{\pi}{4})$, marqués en rouge.

Exemple : **La formule de Machin.** Pour $a > 0$, un argument du complexe $a+\mathrm{i}b$ est $\mathrm{Arctan}\,\frac{b}{a}$, puisque $\tan\theta = \frac{b}{a}$ avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}[$. Le calcul $(5+\mathrm{i})^4(239-\mathrm{i}) = 114\,244\,(1+\mathrm{i})$, et la proposition 17 du chapitre 4 sur les arguments d'un produit, donnent

$$4\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5} - \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239} \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

Comme $0 < \mathrm{Arctan}\,t < t$ pour $t > 0$, d'après l'inégalité $x < \tan x$ du chapitre 4, le membre de gauche est compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{4}{5} < \pi$, et la congruence est une égalité :

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5} - \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239}.$$

John Machin l'utilise en 1706 pour calculer cent décimales de π ; les arcs tangentes de petits nombres se calculent en effet très rapidement, comme le montrera le chapitre 10.

5.7 Fonctions hyperboliques

Définition : Pour tout réel x, on pose

$$\mathrm{ch}\,x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \mathrm{sh}\,x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \mathrm{th}\,x = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}.$$

Ce sont le **cosinus**, le **sinus** et la **tangente hyperboliques**.

Proposition 10 :

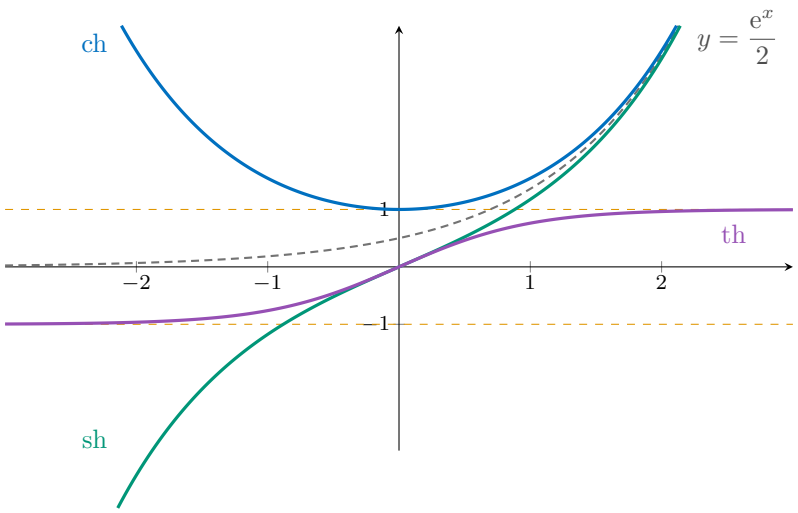
(i) ch est paire, sh et th sont impaires, et $\mathrm{e}^x = \mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x$ pour tout réel x.

(ii) Pour tout réel x, $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

(iii) Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$, $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$, $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2 = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$.

(iv) sh et th sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$; ch est strictement décroissante sur $]-\infty\,,0]$ et strictement croissante sur $[0\,,+\infty[$, de minimum $\mathrm{ch}\,0 = 1$; th a pour limites ± 1 en $\pm\infty$.

◦ Démonstration : (i) C'est la décomposition de l'exponentielle en parties paire et impaire, vue à la section 5.2. (ii) $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = (\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x)(\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x) = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^x = 1$. (iii) On dérive les exponentielles ; pour la tangente hyperbolique, la formule d'un quotient et (ii) donnent $\mathrm{th}' = \frac{\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2}{\mathrm{ch}^2} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2} = 1 - \mathrm{th}^2$. (iv) On a $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch} > 0$, et $\mathrm{sh}\,x$ est du signe de x, puisque $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^{-x}$ si et seulement si $x > 0$; d'où les variations de ch. Enfin $\mathrm{th}\,x = \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$ tend vers 1 en $+\infty$. □



La courbe du cosinus hyperbolique, en bleu, reste au-dessus de celle du sinus hyperbolique, en vert, puisque $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^{-x} > 0$; les deux se rapprochent de la courbe de $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{2}$, en tirets gris, lorsque x tend vers $+\infty$, puisque $\operatorname{ch} x - \frac{\mathrm{e}^x}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$ tend vers 0. La tangente hyperbolique, en violet, est comprise entre les asymptotes $y = \pm 1$.

Remarques :

- Le nom de ces fonctions vient de la relation $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$: le point $(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ décrit la branche droite de l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$, comme le point $(\cos t, \sin t)$ décrit le cercle $x^2 + y^2 = 1$. Les formules d'Euler du chapitre 4 montrent d'ailleurs que $\operatorname{ch} x = \cos(\mathrm{i}x)$ et $\operatorname{sh} x = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}x)$, si l'on prolonge cos et sin aux complexes par ces formules.
- Les signes diffèrent de ceux de la trigonométrie : $\operatorname{ch}' = +\operatorname{sh}$, alors que $\cos' = -\sin$, et $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$, alors que $\cos^2 + \sin^2 = 1$. L'erreur la plus répandue est de transposer sans précaution une formule trigonométrique.
- La courbe d'équation $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, avec $a > 0$, est la *chaînette*, forme prise par une chaîne pesante suspendue par ses extrémités ; Leibniz, Huygens et Jean Bernoulli l'ont déterminée en 1691, en réponse à un défi de Jacques Bernoulli. On la retrouvera en physique.

5.8 Fonctions à valeurs complexes

Définition : Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle I, et $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ ses parties réelle et imaginaire, de sorte que $f = u + \mathrm{i}v$. On dit que f est **dérivable** sur I si u et v le sont, et l'on pose

$$f' = u' + \mathrm{i}v'.$$

Proposition 11 : Soit f et g deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, et $\varphi : I \to \mathbb{C}$ dérivable.

(i) $\lambda f + g$, fg, et $\frac{f}{g}$ lorsque g ne s'annule pas, sont dérivables, avec les formules de la proposition 3.

(ii) La fonction $\mathrm{e}^{\varphi} : t \mapsto \exp(\varphi(t))$ est dérivable, et $(\mathrm{e}^{\varphi})' = \varphi' \mathrm{e}^{\varphi}$.

(iii) f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$.

∘ Démonstration : (i) Écrivons $f = u + \mathrm{i}v$ et $g = p + \mathrm{i}q$. Alors $fg = (up - vq) + \mathrm{i}(uq + vp)$, dont la dérivée, calculée partie par partie, vaut

$$(u'p + up' - v'q - vq') + \mathrm{i}(u'q + uq' + v'p + vp') = (u' + \mathrm{i}v')(p + \mathrm{i}q) + (u + \mathrm{i}v)(p' + \mathrm{i}q') = f'g + fg'.$$

Les autres formules s'établissent de même ; pour le quotient, on écrit $\frac{1}{g} = \frac{\overline{g}}{|g|^2}$, quotient de fonctions dont on connaît les dérivées. (ii) On écrit $\varphi = a + \mathrm{i}b$, de sorte que $\mathrm{e}^{\varphi} = \mathrm{e}^a \cos b + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^a \sin b$, et l'on dérive les deux parties :

$$(\mathrm{e}^{\varphi})' = \mathrm{e}^a(a' \cos b - b' \sin b) + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^a(a' \sin b + b' \cos b) = \mathrm{e}^a(a' + \mathrm{i}b')(\cos b + \mathrm{i}\sin b) = \varphi' \mathrm{e}^{\varphi}.$$

(iii) $f' = 0$ équivaut à $u' = v' = 0$, et l'on applique le théorème 1 à u et à v. □

Exemples :

- Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ a pour dérivée $t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}$. Avec $\lambda = \mathrm{i}$, on obtient $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, comme l'annonçait le chapitre 4 : la vitesse du point $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ qui parcourt le cercle trigonométrique est le vecteur $\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, obtenu par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire tangent au cercle. Ces exponentielles sont au cœur des équations différentielles du chapitre 6.
- Pour dériver $t \mapsto \mathrm{e}^t \cos t$, on la voit comme la partie réelle de $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$, dont la dérivée est

$$(1+\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} = \mathrm{e}^t(1+\mathrm{i})(\cos t + \mathrm{i}\sin t).$$

  En prenant la partie réelle, $(\mathrm{e}^t \cos t)' = \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t)$. Le procédé est surtout utile pour les dérivées successives : $(\mathrm{e}^t \cos t)^{(n)} = \mathrm{Re}\left((1+\mathrm{i})^n \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\right) = 2^{n/2}\,\mathrm{e}^t \cos\left(t + \frac{n\pi}{4}\right)$, d'après le chapitre 4.

Remarque : Tout ce qui repose sur l'ordre de $\mathbb{R}$ disparaît pour les fonctions à valeurs complexes : il n'y a pas de « fonction complexe croissante », et le théorème 1 ne garde que son point (i). On verra au chapitre 9 qu'une autre conséquence du théorème des accroissements finis, l'inégalité des accroissements finis, reste vraie, alors que l'égalité devient fausse : la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ prend la même valeur en 0 et en 2π sans que sa dérivée ne s'annule jamais.

5.9 Bilan

Le tableau rassemble les dérivées à connaître. Toutes se retrouvent à partir de celles de exp, de sin et de cos, par les règles de la proposition 3 et la formule de la réciproque.

Fonction	Définie sur	Dérivée	Origine
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	définition (théorème 3)
$\ln x$	$]0\,,+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$	réciproque de exp
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$	$]0\,,+\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathrm{e}^{\alpha \ln x}$
$\sin x$, $\cos x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$, $-\sin x$	chapitre 4
$\tan x$	$x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	quotient
$\mathrm{Arcsin}\, x$, $\mathrm{Arccos}\, x$	$[-1\,,1]$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1\,,1[$	réciproques de sin, cos restreints
$\mathrm{Arctan}\, x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	réciproque de tan restreinte
$\mathrm{ch}\, x$, $\mathrm{sh}\, x$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}\, x$, $\mathrm{ch}\, x$	exponentielles
$\mathrm{th}\, x$	$\mathbb{R}$	$1-\mathrm{th}^2 x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	quotient
$\mathrm{e}^{\varphi(t)}$, φ complexe	I	$\varphi'(t)\,\mathrm{e}^{\varphi(t)}$	parties réelle et imaginaire

Le chapitre 6 lira ce tableau de droite à gauche, pour calculer des primitives, et l'utilisera pour résoudre les équations différentielles linéaires ; les chapitres 8 et 9 démontreront les résultats admis ici, le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème des accroissements finis.