Chapitre 6

Primitives et équations différentielles linéaires

6.1 Introduction historique

> *L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non-seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue ; elle est encore un moyen assuré de former l'analyse elle-même [...]*
>
> Joseph Fourier - *Théorie analytique de la chaleur*, 1822

Retrouver une fonction dont on connaît la dérivée, puis une fonction dont on connaît une relation avec ses dérivées : trois dates marquent le passage d'un problème à l'autre.

6.1.1 1638 : une courbe connue par ses tangentes

Florimond de Beaune propose, par l'intermédiaire de Mersenne, de trouver une courbe définie par ses tangentes, ce qui revient à résoudre $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha}{y-x}$. C'est le premier « problème inverse des tangentes » : la pente est donnée en chaque point, la courbe est inconnue. **Descartes** y répond en 1639 par une méthode qui anticipe l'usage des séries.

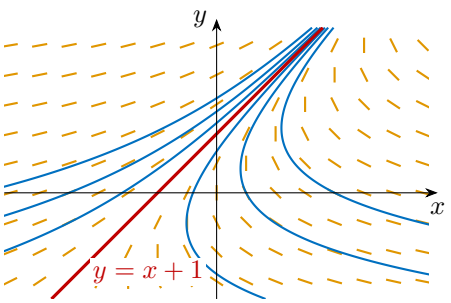
6.1.2 1684 : la première victoire du calcul différentiel

Leibniz publie le premier article de calcul différentiel, *Nova methodus pro maximis et minimis*, et le conclut en résolvant en quelques lignes le problème de Beaune, à l'aide du logarithme. Remonter de la dérivée à la fonction devient une opération à part entière, notée $\int$.

6.1.3 1739 : une équation algébrique cachée

Euler écrit à Jean Bernoulli qu'il a trouvé une façon remarquable d'intégrer d'un seul coup les équations d'ordre supérieur, et la publie en 1743 : pour une équation linéaire à coefficients constants, on cherche des solutions e^{rx}, et tout se ramène à une équation algébrique en r, l'équation caractéristique de la section 6.5.

Le chapitre suit ce chemin : primitives, puis équations du premier ordre, dont fait partie l'équation de Beaune si l'on échange x et y, puis du second ordre. La figure montre, pour $\alpha = 1$, les pentes $\frac{1}{y-x}$ imposées par l'équation (segments orange) et des courbes solutions qui les épousent ; la droite $y = x + 1$ en est une.



6.2 Primitives et intégrales

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et I un intervalle de $\mathbb{R}$ qui n'est ni vide ni réduit à un point. Les fonctions à valeurs complexes sont dérivées comme au chapitre 5, partie réelle et partie imaginaire séparément. La notion de fonction continue est employée au sens intuitif du lycée ; le chapitre 8 en donnera la définition précise.

6.2.1 Primitives d'une fonction

Définition : Soit $f : I \to \mathbb{K}$. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction $F : I \to \mathbb{K}$ dérivable sur I telle que

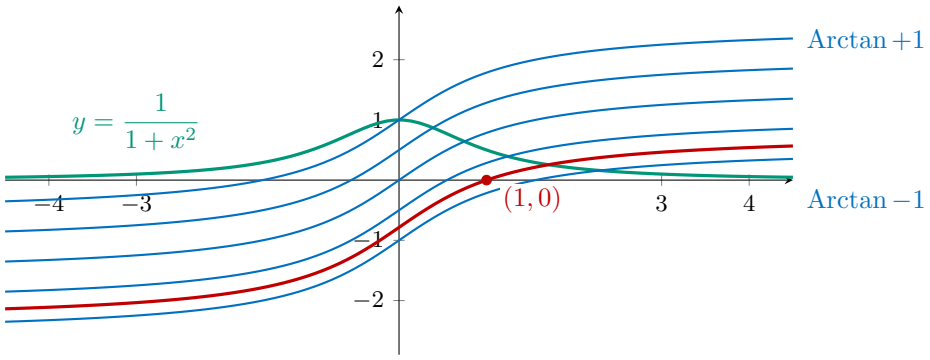
$$F' = f.$$

Proposition 1 : *(Ensemble des primitives.)* Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction qui admet une primitive F sur l'intervalle I. Les primitives de f sur I sont exactement les fonctions

$$F + c, \qquad c \in \mathbb{K}.$$

En particulier, pour tout $x_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique primitive de f qui vaut y_0 en x_0.

∘ Démonstration : Une fonction $F + c$ est dérivable, de dérivée $F' = f$. Réciproquement, si G est une primitive de f, alors $(G-F)' = f - f = 0$ sur l'intervalle I ; le théorème 1 du chapitre 5, ou la proposition 11 du même chapitre si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montre que $G - F$ est constante. Enfin $F + c$ vaut y_0 en x_0 si et seulement si $c = y_0 - F(x_0)$. □



Les primitives de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, dont la courbe est en vert, se déduisent toutes de Arctan par une translation verticale ; parmi elles, une seule passe par le point $(1, 0)$: c'est $x \mapsto \operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{4}$, en rouge.

Remarques :

- L'hypothèse que I est un *intervalle* est indispensable. Sur $\mathbb{R}^*$, qui n'en est pas un, la fonction égale à $\ln|x|$ pour $x < 0$ et à $\ln|x| + 1$ pour $x > 0$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui ne diffère pas de $x \mapsto \ln|x|$ par une constante. L'erreur la plus répandue est d'écrire « les primitives de $\frac{1}{x}$ sont les $\ln|x| + c$ » sans préciser l'intervalle.
- Une primitive d'une fonction à valeurs complexes s'obtient en primitivant séparément la partie réelle et la partie imaginaire, puisque la dérivation se fait ainsi.

6.2.2 Existence d'une primitive et intégrale

Théorème 1 : Existence de primitives (admis) :
Toute fonction continue sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, admet une primitive sur I.

La difficulté contournée est la construction même de l'intégrale, c'est-à-dire de l'aire sous une courbe, que le chapitre 18 mènera à bien par des sommes de rectangles. Admettre ce théorème permet de définir dès maintenant l'intégrale d'une fonction continue, de la manière suivante.

Définition : Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue, F une primitive de f sur I, et a, b deux points de I. L'**intégrale** de f de a à b est le nombre

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \big[F(t)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Il ne dépend pas de la primitive choisie, puisque deux primitives diffèrent d'une constante (proposition 1). La variable t est *muette* : on peut la remplacer par toute autre lettre.

Proposition 2 : Soit f, $g : I \to \mathbb{K}$ continues, a, b, c des points de I et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) Pour tout $x_0 \in I$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0.

(ii) *Linéarité et relation de Chasles :*

$$\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g \qquad \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \qquad \int_b^a f = -\int_a^b f.$$

(iii) *Positivité et croissance* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) : si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ sur $[a\,,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$; si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$ sur $[a\,,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

(iv) *Inégalité triangulaire* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) : si $a \leqslant b$, alors $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.

∘ Démonstration : Soit F et G des primitives de f et g. (i) La fonction $x \mapsto F(x) - F(x_0)$ est une primitive de f nulle en x_0, et c'est la seule d'après la proposition 1. (ii) $\lambda F + G$ est une primitive de $\lambda f + g$, d'où la linéarité ; et $F(c) - F(a) = \big(F(b) - F(a)\big) + \big(F(c) - F(b)\big)$. (iii) Si $f \geqslant 0$ sur $[a\,,b]$, alors F y est croissante (théorème 1 du chapitre 5), donc $F(b) \geqslant F(a)$; on applique ensuite ce résultat à $g - f$. (iv) On applique (iii) aux encadrements $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, la fonction $|f|$ étant continue. □

Remarques :

- Lorsque f est positive et $a \leqslant b$, l'intégrale est l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$: c'est le point de vue du lycée, que le chapitre 18 justifiera. Lorsque f change de signe, les aires situées sous l'axe comptent négativement ; ainsi $\int_0^{2\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = 0$.
- Le point (i) dit exactement que dériver une intégrale par rapport à sa borne supérieure redonne la fonction : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$. Plus généralement, si u est dérivable à valeurs dans I, la dérivée de $x \mapsto \int_{x_0}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(u(x)) - F(x_0)$ est $u'(x)\,f\big(u(x)\big)$.
- On note $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ une primitive quelconque de f, définie à une constante près ; cette notation commode ne désigne pas un nombre, et une égalité entre deux telles expressions s'entend à une constante additive près.

6.3 Calcul de primitives et d'intégrales

6.3.1 Primitives usuelles

Le tableau des dérivées du chapitre 5, lu de droite à gauche, donne les primitives suivantes. Chaque ligne se vérifie en dérivant la deuxième colonne, et vaut sur tout intervalle contenu dans l'ensemble indiqué.

$f(x)$	une primitive	sur	$f(x)$	une primitive	sur
x^α, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0,+\infty[$	$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$	$\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}$	$\mathbb{R}$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$
$\ln x$	$x\ln x - x$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x$	$]-1,1[$

Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, la primitive de x^α vaut sur $\mathbb{R}$ tout entier, et pour α entier négatif différent de -1, sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. La ligne de $\ln x$, qui ne se lit pas dans le tableau des dérivées, sera démontrée par intégration par parties (exemple de la section 6.3.4) ; celle de $\tan x$ se vérifie en dérivant $-\ln\lvert\cos x\rvert$, qui donne $\frac{\sin x}{\cos x}$. Celle de $e^{\lambda x}$ repose sur la proposition 11 du chapitre 5.

Proposition 3 : *(Reconnaître une dérivée composée.)* Soit $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Les fonctions de la colonne de gauche ont pour primitives sur I celles de la colonne de droite, sous la condition indiquée.

$$\begin{aligned}
u'\,u^\alpha &\longrightarrow \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} && (\alpha \neq -1,\ u>0)\\
\frac{u'}{u} &\longrightarrow \ln\lvert u\rvert && (u \text{ ne s'annule pas})\\
u'\,e^u &\longrightarrow e^u\\
\frac{u'}{1+u^2} &\longrightarrow \operatorname{Arctan} u\\
\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} &\longrightarrow \operatorname{Arcsin} u && (\lvert u\rvert<1)
\end{aligned}$$

∘ Démonstration : Chaque ligne est la formule de dérivation d'une composée (proposition 3 du chapitre 5), appliquée aux fonctions $x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\ln\lvert\cdot\rvert$, exp, Arctan et Arcsin. Pour la deuxième, u garde un signe constant sur l'intervalle I : sinon, le chapitre 8 montrera qu'elle s'annulerait, par le théorème des valeurs intermédiaires ; on peut donc dériver $\ln u$ ou $\ln(-u)$. □

Exemples :

- Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int^x \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, avec $u(t) = 1+t^2$: le numérateur est, au facteur $\frac{1}{2}$ près, la dérivée du dénominateur.
- Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int^x \sin t\,\cos^3 t\,dt = -\frac{\cos^4 x}{4}$, avec $u = \cos$ et $\alpha = 3$, puisque $u' = -\sin$.
- Sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int^x \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt = \operatorname{Arctan}(e^x)$, avec $u = \exp$. L'erreur la plus répandue, devant une telle fraction, est de chercher une primitive de numérateur et de dénominateur séparément ; il faut au contraire reconnaître la forme $\frac{u'}{1+u^2}$.

6.3.2 Exponentielles complexes et fonctions trigonométriques

♡ **Méthode :** Pour primitiver $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$, avec $(a,b) \neq (0,0)$:

- On les écrit comme partie réelle ou imaginaire de $x \mapsto \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}$.
- On primitive cette exponentielle complexe : une primitive est $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}}{a+\mathrm{i}b}$.
- On multiplie numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée $a - \mathrm{i}b$, puis on prend la partie réelle ou imaginaire.

Exemple : Avec $a = b = 1$, une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ est

$$\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(1-\mathrm{i})}{2}\,\mathrm{e}^x(\cos x + \mathrm{i}\sin x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2}\big((\cos x + \sin x) + \mathrm{i}(\sin x - \cos x)\big),$$

d'où, en séparant les parties réelle et imaginaire,

$$\int^x \mathrm{e}^t \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\cos x + \sin x) \qquad \int^x \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x).$$

Le passage par les complexes remplace deux intégrations par parties successives (section 6.3.4) par une seule division.

Remarque : Pour primitiver un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$, comme $\cos^2 x$ ou $\sin^3 x$, on le *linéarise* par les formules d'Euler du chapitre 4 : par exemple $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ a pour primitive $\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$.

6.3.3 Fractions du type $\frac{1}{ax^2+bx+c}$

♡ **Méthode :** Soit $a \neq 0$, b, c réels et $\Delta = b^2 - 4ac$. Pour primitiver $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ sur un intervalle où le dénominateur ne s'annule pas :

- Si $\Delta > 0$, on factorise $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ et l'on décompose $\dfrac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \dfrac{1}{x_1 - x_2}\left(\dfrac{1}{x-x_1} - \dfrac{1}{x-x_2}\right)$: la primitive fait intervenir $\ln\left|\dfrac{x-x_1}{x-x_2}\right|$.
- Si $\Delta = 0$, on écrit $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, de primitive $-\dfrac{1}{a(x-x_0)}$ pour l'inverse.
- Si $\Delta < 0$, on met le trinôme sous forme canonique $a\big((x + \frac{b}{2a})^2 + k^2\big)$ avec $k > 0$, et l'on utilise $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+k^2} = \frac{1}{k}\operatorname{Arctan}\frac{x}{k}$.

Exemples :

- Pour $\Delta > 0$: $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$, donc

$$\int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2} = \left[\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right]_3^4 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{4}{3}.$$

- Pour $\Delta < 0$: $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 2^2$, donc

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5} = \left[\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\frac{x+1}{2}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}1 = \frac{\pi}{8}.$$

Le résultat est un multiple de π : c'est la marque d'un discriminant négatif, comme les logarithmes sont la marque d'un discriminant positif.

Remarque : Une fraction $\frac{px+q}{ax^2+bx+c}$ se ramène à ce cas : on fait apparaître au numérateur la dérivée $2ax + b$ du dénominateur, ce qui donne un terme en $\frac{u'}{u}$, et il reste une constante sur le trinôme. Le chapitre 13 généralisera cette méthode à toutes les fractions rationnelles.

6.3.4 Intégration par parties

On dit qu'une fonction est **de classe $\mathcal{C}^1$** sur I si elle est dérivable sur I et si sa dérivée est continue, comme au chapitre 5.

Proposition 4 : *(Intégration par parties.)* Soit $u, v : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et a, b dans I. Alors

$$\int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)\,v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

∘ Démonstration : La fonction uv est dérivable, de dérivée $u'v + uv'$, qui est continue : uv est une primitive de $u'v + uv'$, donc $\int_a^b (u'v + uv') = \big[uv\big]_a^b$, et l'on conclut par linéarité. Les deux intégrales ont un sens, car $u'v$ et uv' sont continues. □

Exemples :

- Avec $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$, sur $[1\,,x]$: $\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t = \big[t\ln t\big]_1^x - \int_1^x \mathrm{d}t = x\ln x - x + 1$, ce qui démontre la ligne du tableau : $\int \ln t\,\mathrm{d}t = x\ln x - x$.
- De même, avec $u'(t) = 1$ et $v = \mathrm{Arctan}$:

$$\int_0^1 \mathrm{Arctan}\,t\,\mathrm{d}t = \big[t\,\mathrm{Arctan}\,t\big]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \Big[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

- Avec $u'(t) = \sin t$ et $v(t) = t$: $\int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t = \big[-t\cos t\big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos t\,\mathrm{d}t = \pi + 0 = \pi$.

Remarque : Le choix de u' et de v est guidé par un principe : on dérive le facteur qui se simplifie en dérivant (un polynôme, ln, Arctan), et l'on primitive celui dont on connaît une primitive. Si l'intégrale obtenue est plus compliquée que celle de départ, c'est généralement que les rôles sont inversés.

6.3.5 Changement de variable

Proposition 5 : *(Changement de variable.)* Soit $\varphi : [\alpha\,,\beta] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et f continue sur un intervalle J contenant $\varphi([\alpha\,,\beta])$. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

∘ Démonstration : Soit F une primitive de f sur J (théorème 1). La fonction $F \circ \varphi$ est dérivable, de dérivée $(f\circ\varphi)\,\varphi'$, qui est continue : c'est une primitive de l'intégrande du second membre, qui vaut donc $F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$, c'est-à-dire le premier membre. □

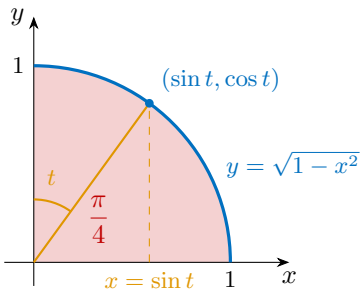
♡ **Méthode :** En pratique, pour effectuer un changement de variable :

- ► On pose $x = \varphi(t)$.
- ► On remplace $\mathrm{d}x$ par $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
- ► On change les bornes : quand t va de α à β, x va de $\varphi(\alpha)$ à $\varphi(\beta)$.

On peut aussi lire la formule de droite à gauche, en reconnaissant une expression $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ et en posant $x = \varphi(t)$.

Exemple : Calculons $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \sin t$, avec $t \in [0\,,\,\frac{\pi}{2}]$: alors $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, et $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$ puisque $\cos t \geqslant 0$ sur cet intervalle.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$



La courbe de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est un quart de cercle : l'intégrale calculée est l'aire du quart de disque unité, et le changement de variable $x = \sin t$ revient à repérer chaque point du cercle par son angle t, mesuré ici depuis l'axe des ordonnées.

Proposition 6 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ continue et a réel.

(i) Si f est paire, $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$; si f est impaire, $\int_{-a}^{a} f = 0$.

(ii) Si f est T-périodique, $\int_a^{a+T} f$ ne dépend pas de a, et vaut donc $\int_0^T f$.

∘ Démonstration : (i) Le changement de variable $x = -t$ donne

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(-t)\,(-\mathrm{d}t) = \int_0^a f(-t)\,\mathrm{d}t,$$

qui vaut $\int_0^a f$ si f est paire et $-\int_0^a f$ si elle est impaire ; on conclut par la relation de Chasles. (ii) Si F est une primitive de f, la fonction $a \mapsto F(a+T) - F(a)$ a pour dérivée $f(a+T) - f(a) = 0$: elle est constante sur $\mathbb{R}$. □

Remarque : La démonstration de (ii) illustre une idée qui reviendra : pour montrer qu'une expression ne dépend pas d'un paramètre, on la dérive par rapport à ce paramètre, en dérivant l'intégrale par rapport à ses bornes.

6.4 Équations différentielles linéaires du premier ordre

6.4.1 Vocabulaire

Définition : Soit a, $b : I \to \mathbb{K}$ continues. On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** l'équation

$$(E) : \quad y' + a(x)\,y = b(x),$$

dont l'inconnue est une fonction y. Une **solution** de (E) sur I est une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable telle que $y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x)$ pour tout $x \in I$. La fonction b est le **second membre**, et l'équation

$$(H) : \quad y' + a(x)\,y = 0$$

est l'**équation homogène associée**. Résoudre (E), c'est déterminer l'ensemble de toutes ses solutions.

Remarques :

- Le mot *linéaire* signifie que l'inconnue y et sa dérivée apparaissent au premier degré, sans produit entre elles ni fonction appliquée à y : $y' = y^2$ ou $y' = \sin y$ ne sont pas linéaires. Le chapitre 14 donnera à ce mot son sens algébrique précis.
- Une équation de la forme $\alpha(x)\,y' + \beta(x)\,y = \gamma(x)$ se ramène à (E) en divisant par $\alpha(x)$, mais seulement sur un intervalle où α ne s'annule pas. L'erreur la plus répandue est d'oublier cette restriction : $x\,y' - y = 0$ se résout séparément sur $]-\infty\,,0[$ et sur $]0\,,+\infty[$, et le raccordement en 0 est un problème à part, traité en exercice.

6.4.2 L'équation homogène

Théorème 2 : Solutions de l'équation homogène :
Soit $a : I \to \mathbb{K}$ continue et A une primitive de a sur I. Les solutions sur I de l'équation $y' + a(x)\,y = 0$ sont les fonctions

$$x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)}, \qquad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Lorsque a est à valeurs réelles, les solutions réelles sont celles pour lesquelles $\lambda \in \mathbb{R}$.

∘ Démonstration : La primitive A existe d'après le théorème 1. Soit $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable, et $z = y\,\mathrm{e}^{A}$, de sorte que $y = z\,\mathrm{e}^{-A}$. La fonction z est dérivable (proposition 11 du chapitre 5), et

$$z' = y'\,\mathrm{e}^{A} + y\,A'\,\mathrm{e}^{A} = \big(y' + a\,y\big)\,\mathrm{e}^{A}.$$

Comme e^{A} ne s'annule pas, y est solution de (H) si et seulement si $z' = 0$ sur l'intervalle I, c'est-à-dire si et seulement si z est une constante λ. Enfin, si a est réelle, A peut être choisie réelle, et $\lambda\,\mathrm{e}^{-A}$ est réelle si et seulement si λ l'est. □

Exemples :

- Lorsque a est une constante, $A(x) = ax$: les solutions de $y' + ay = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-ax}$, ce qui généralise le cas $y' = y$ qui a défini l'exponentielle au chapitre 5.
- Sur $]0\,,+\infty[$, l'équation $y' + \frac{1}{x}\,y = 0$ a pour solutions $x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\ln x} = \frac{\lambda}{x}$.
- Sur $\mathbb{R}$, l'équation $y' + 2xy = 0$ a pour solutions $x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-x^2}$: ce sont, au facteur près, les courbes en cloche du calcul des probabilités.

Remarque : L'idée de la démonstration est de multiplier par e^{A} pour faire apparaître la dérivée d'un produit. Le résultat explique pourquoi une solution de (H) qui s'annule en un point est identiquement nulle : $\lambda\,\mathrm{e}^{-A(x_0)} = 0$ impose $\lambda = 0$. Deux courbes solutions distinctes ne se coupent donc jamais.

6.4.3 Structure des solutions et principe de superposition

Proposition 7 : Soit a, b, b_1, $b_2 : I \to \mathbb{K}$ continues.

(i) *Structure :* si y_p est une solution particulière de (E), les solutions de (E) sont les fonctions $y_p + y_h$, où y_h parcourt les solutions de (H) :

$$y = y_p + \lambda\,\mathrm{e}^{-A}, \qquad \lambda \in \mathbb{K}.$$

(ii) *Superposition :* si y_1 est solution de $y' + a(x)y = b_1(x)$ et y_2 de $y' + a(x)y = b_2(x)$, alors, pour tous λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{K}$, la fonction $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de $y' + a(x)y = \lambda_1 b_1(x) + \lambda_2 b_2(x)$.

∘ Démonstration : Pour une fonction dérivable y, notons $L(y) = y' + a\,y$. On a, pour toutes fonctions dérivables y_1, y_2,

$$L(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 L(y_1) + \lambda_2 L(y_2),$$

ce qui donne (ii). Pour (i), $L(y) = b$ équivaut à $L(y) = L(y_p)$, soit $L(y - y_p) = 0$: $y - y_p$ est solution de (H), et l'on conclut par le théorème 2. □

Remarque : La solution générale est donc « une solution particulière plus la solution générale de l'équation homogène ». Cette structure, que l'on retrouvera pour les équations du second ordre, pour les systèmes linéaires du chapitre 3 et pour les suites récurrentes linéaires, est celle d'un espace affine, notion que le chapitre 14 dégagera.

6.4.4 Recherche d'une solution particulière

♡ **Méthode :** *(Variation de la constante.)* Pour trouver une solution particulière de (E) :

- On la cherche de la forme $y(x) = \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$, où $\lambda : I \to \mathbb{K}$ est dérivable.
- Le calcul de la démonstration du théorème 2 donne $y' + a\,y = \lambda'\,\mathrm{e}^{-A}$, si bien que y est solution de (E) si et seulement si
$$\lambda'(x) = b(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}.$$
- On prend pour λ une primitive de $b\mathrm{e}^{A}$, qui existe d'après le théorème 1.

Exemples :

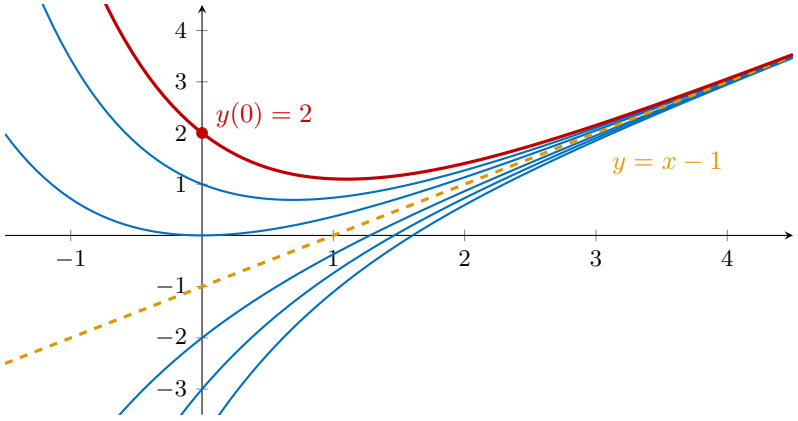
- Sur $\mathbb{R}$, résolvons $y' - 2xy = \mathrm{e}^{x^2}$. Ici $A(x) = -x^2$, les solutions de (H) sont les $\lambda\mathrm{e}^{x^2}$, et $\lambda' = \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{-x^2} = 1$ donne $\lambda(x) = x$.
$$y(x) = (x + \lambda)\,\mathrm{e}^{x^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$
- Sur $]0\,,+\infty[$, résolvons $y' + \frac{1}{x}\,y = 1$. Les solutions de (H) sont les $\frac{\lambda}{x}$, et $\lambda'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{\ln x} = x$ donne $\lambda(x) = \frac{x^2}{2}$, d'où la solution particulière $\frac{x}{2}$.
$$y(x) = \frac{x}{2} + \frac{\lambda}{x}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$
Toutes les solutions sont asymptotes à la droite $y = \frac{x}{2}$ en $+\infty$: l'effet de la condition initiale s'efface.

Remarque : Lorsque a est constante et que le second membre est un polynôme, une exponentielle $\mathrm{e}^{\mu x}$ ou une combinaison de $\cos(\omega x)$ et $\sin(\omega x)$, il est souvent plus rapide de chercher une solution particulière de la même forme. Par exemple, $y' + y = x$ admet une solution affine $y = \alpha x + \beta$: l'identification $\alpha + \alpha x + \beta = x$ donne $\alpha = 1$ et $\beta = -1$. Pour un second membre trigonométrique, on passe par l'exponentielle complexe, comme à la section 6.3.2.

6.4.5 Problème de Cauchy

Théorème 3 : Existence et unicité pour un problème de Cauchy :
Soit a, $b : I \to \mathbb{K}$ continues, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Il existe une unique solution y de (E) sur I telle que $y(x_0) = y_0$. En notant $A(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$, elle s'écrit
$$y(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t\right).$$

∘ Démonstration : La variation de la constante, avec $\lambda(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t$, fournit une solution particulière $y_p = \lambda\mathrm{e}^{-A}$, nulle en x_0. D'après la proposition 7, les solutions de (E) sont les $y_p + c\,\mathrm{e}^{-A}$, $c \in \mathbb{K}$, qui valent c en x_0 puisque $A(x_0) = 0$. La condition $y(x_0) = y_0$ impose donc $c = y_0$, et une seule solution convient. □



Les solutions de $y'+y=x$ forment une famille de courbes qui ne se coupent jamais ; toutes se rapprochent de la solution particulière $y=x-1$, en orange. Par chaque point du plan passe exactement une d'entre elles : la condition $y(0)=2$, par exemple, sélectionne la courbe rouge, $y=x-1+3\mathrm{e}^{-x}$.

Exemple : Charge d'un condensateur. Dans un circuit formé d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C, soumis à une tension constante E, la tension u aux bornes du condensateur vérifie $RC\,u'+u=E$, soit $u'+\frac{1}{\tau}u=\frac{E}{\tau}$ avec $\tau=RC$. La constante E est une solution particulière, et la solution telle que $u(0)=0$ est

$$u(t)=E\big(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\big).$$

Au bout d'un temps 5τ, on a $u=E(1-\mathrm{e}^{-5})\approx 0{,}993\,E$: c'est l'origine de la règle des physiciens selon laquelle le régime transitoire est terminé après cinq constantes de temps.

Remarque : L'équation de Beaune de l'introduction, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{y-x}$, n'est pas linéaire en y. Mais si l'on cherche x comme fonction de y, elle s'écrit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=y-x$, c'est-à-dire $x'+x=y$: c'est exactement l'équation de la figure précédente, les rôles des deux variables étant échangés. Ses solutions sont $x=y-1+\lambda\,\mathrm{e}^{-y}$; l'égalité $\mathrm{e}^{-y}=\frac{x-y+1}{\lambda}$ montre que y s'exprime par un logarithme, ce qui éclaire le rôle de cette fonction dans la solution de Leibniz.

6.5 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

6.5.1 Vocabulaire et équation caractéristique

Définition : Soit a, $b\in\mathbb{K}$ et $f:I\to\mathbb{K}$ continue. Une **solution** sur I de l'équation

$$(E):\quad y''+a\,y'+b\,y=f(x)$$

est une fonction $y:I\to\mathbb{K}$ deux fois dérivable telle que $y''(x)+a\,y'(x)+b\,y(x)=f(x)$ pour tout $x\in I$. L'**équation homogène associée** est $(H):\ y''+a\,y'+b\,y=0$. Le polynôme $P(r)=r^2+ar+b$ est le **polynôme caractéristique**, et l'équation $r^2+ar+b=0$ l'**équation caractéristique**.

Proposition 8 : Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ et $Q:I\to\mathbb{C}$ deux fois dérivable. Alors

$$\big(Q\,\mathrm{e}^{\lambda x}\big)''+a\big(Q\,\mathrm{e}^{\lambda x}\big)'+b\,Q\,\mathrm{e}^{\lambda x}=\big(Q''+P'(\lambda)\,Q'+P(\lambda)\,Q\big)\,\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

En particulier, $x\mapsto\mathrm{e}^{rx}$ est solution de (H) si et seulement si r est racine de l'équation caractéristique.

◦ Démonstration : On a $(Q\mathrm{e}^{\lambda x})'=(Q'+\lambda Q)\mathrm{e}^{\lambda x}$ et $(Q\mathrm{e}^{\lambda x})''=(Q''+2\lambda Q'+\lambda^2 Q)\mathrm{e}^{\lambda x}$. Le premier membre vaut donc

$$\big(Q''+(2\lambda+a)\,Q'+(\lambda^2+a\lambda+b)\,Q\big)\,\mathrm{e}^{\lambda x},$$

et l'on reconnaît $P'(\lambda)=2\lambda+a$ et $P(\lambda)$. Avec $Q=1$, on obtient $P(r)\,\mathrm{e}^{rx}$, qui est nul si et seulement si $P(r)=0$. □

C'est l'observation d'Euler rappelée dans l'introduction : chercher des solutions exponentielles transforme l'équation différentielle en une équation algébrique du second degré, que le chapitre 4 sait résoudre dans $\mathbb{C}$.

6.5.2 L'équation homogène

Théorème 4 : Solutions complexes de l'équation homogène :
Soit a, $b \in \mathbb{C}$, et $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique.

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2, et les solutions de (H) sur I sont
$$x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\,\mathrm{e}^{r_2 x}, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$
- Si $\Delta = 0$, elle a une racine double r_0, et les solutions de (H) sur I sont
$$x \longmapsto (\lambda + \mu x)\,\mathrm{e}^{r_0 x}, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

∘ Démonstration : Soit r_1 une racine de P et r_2 l'autre, éventuellement égale, de sorte que $r_1 + r_2 = -a$ et donc $P'(r_1) = 2r_1 + a = r_1 - r_2$. Soit $y : I \to \mathbb{C}$ deux fois dérivable, et $z = y\,\mathrm{e}^{-r_1 x}$, de sorte que $y = z\,\mathrm{e}^{r_1 x}$. D'après la proposition 8, avec $P(r_1) = 0$,
$$y'' + a\,y' + b\,y = \big(z'' + (r_1 - r_2)\,z'\big)\,\mathrm{e}^{r_1 x}.$$
Ainsi y est solution de (H) si et seulement si $w = z'$ est solution de l'équation du premier ordre $w' + (r_1 - r_2)\,w = 0$, c'est-à-dire, d'après le théorème 2, si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $z'(x) = c\,\mathrm{e}^{(r_2 - r_1)x}$.

- Si $r_1 \neq r_2$, les primitives de z' sont les $\frac{c}{r_2 - r_1}\mathrm{e}^{(r_2 - r_1)x} + \lambda$ (proposition 1) ; en posant $\mu = \frac{c}{r_2 - r_1}$, qui décrit $\mathbb{C}$ quand c le décrit, on obtient $y = \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\,\mathrm{e}^{r_2 x}$.
- Si $r_1 = r_2 = r_0$, alors $z' = c$, donc $z = \lambda + c\,x$, et $y = (\lambda + \mu x)\,\mathrm{e}^{r_0 x}$ avec $\mu = c$.

Chaque étape étant une équivalence, on obtient exactement les solutions annoncées. □

Théorème 5 : Solutions réelles lorsque a et b sont réels :
Soit a, $b \in \mathbb{R}$ et $\Delta = a^2 - 4b$. Les solutions réelles de (H) sur I sont :

- si $\Delta > 0$, de racines réelles $r_1 \neq r_2$: $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\,\mathrm{e}^{r_2 x}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$;
- si $\Delta = 0$, de racine double r_0 : $x \longmapsto (\lambda + \mu x)\,\mathrm{e}^{r_0 x}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$;
- si $\Delta < 0$, de racines complexes conjuguées $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$ avec $\beta > 0$:
$$x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\big(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)\big), \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

∘ Démonstration : Si $\Delta \geqslant 0$, les racines sont réelles, et la démonstration du théorème 4 se fait mot pour mot avec des fonctions et des constantes réelles. Supposons $\Delta < 0$, et notons $r = \alpha + \mathrm{i}\beta$.

Ces fonctions sont solutions. La fonction e^{rx} est solution de (H), et, a et b étant réels, sa partie réelle $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et sa partie imaginaire $\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)$ le sont aussi, puisque l'on dérive séparément les deux parties ; leurs combinaisons réelles aussi, par linéarité.

Il n'y en a pas d'autres. Soit y une solution réelle. C'est une solution complexe, donc, d'après le théorème 4, il existe des complexes λ_1, μ_1 tels que
$$y(x) = \lambda_1 \mathrm{e}^{rx} + \mu_1 \mathrm{e}^{\overline{r}x}.$$
Fixons $x_0 \in I$, et posons $\lambda_1' = \lambda_1 \mathrm{e}^{rx_0}$ et $\mu_1' = \mu_1 \mathrm{e}^{\overline{r}x_0}$. Ces deux nombres sont déterminés par $y(x_0)$ et $y'(x_0)$, car le système
$$\lambda_1' + \mu_1' = y(x_0), \qquad r\,\lambda_1' + \overline{r}\,\mu_1' = y'(x_0)$$
a une unique solution, puisque $r \neq \overline{r}$: on la calcule par substitution, comme au chapitre 3. Or $\overline{y} = y$ s'écrit aussi $y = \overline{\mu_1}\,\mathrm{e}^{rx} + \overline{\lambda_1}\,\mathrm{e}^{\overline{r}x}$; l'unicité donne $\mu_1 = \overline{\lambda_1}$. Ainsi $y = 2\,\mathrm{Re}\,(\lambda_1 \mathrm{e}^{rx})$, et en écrivant $2\lambda_1 = \lambda - \mathrm{i}\mu$ avec λ, μ réels, on obtient $y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\big(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)\big)$. □

Remarques :

- Lorsque $\Delta < 0$, on peut écrire $\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x) = C\cos(\beta x - \varphi)$, avec $C = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, comme au chapitre 4 : la solution est une oscillation de pulsation β, dont l'amplitude $C\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ varie exponentiellement.
- L'erreur la plus répandue est d'écrire $\mathrm{e}^{\alpha x}\big(\lambda\cos(\alpha x) + \mu\sin(\beta x)\big)$, ou d'oublier le facteur $\mathrm{e}^{\alpha x}$: la partie réelle de la racine donne l'exponentielle, la partie imaginaire donne la pulsation.

Exemples :

- L'équation $y''-3y'+2y=0$ a pour équation caractéristique $r^2-3r+2=(r-1)(r-2)=0$: ses solutions réelles sont les $\lambda\,\mathrm{e}^{x}+\mu\,\mathrm{e}^{2x}$.
- L'équation $y''+2y'+5y=0$ a pour racines caractéristiques $-1\pm 2\mathrm{i}$: ses solutions réelles sont les $\mathrm{e}^{-x}\big(\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x)\big)$. Celle qui vérifie $y(0)=1$ et $y'(0)=0$ s'obtient avec $\lambda=1$ et $-\lambda+2\mu=0$, soit
$$y(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(\cos(2x)+\frac{1}{2}\sin(2x)\right).$$
- L'équation $y''+\omega^2 y=0$, avec $\omega>0$, a pour racines $\pm\mathrm{i}\omega$, et pour solutions les fonctions $x\mapsto\lambda\cos(\omega x)+\mu\sin(\omega x)$. C'est l'équation de l'oscillateur harmonique de la physique.

6.5.3 Second membre et solution particulière

Proposition 9 : Soit a, $b\in\mathbb{K}$ et f, f_1, $f_2 : I\to\mathbb{K}$ continues.

(i) *Structure :* si y_p est une solution particulière de (E), les solutions de (E) sont les fonctions y_p+y_h, où y_h parcourt les solutions de (H).

(ii) *Superposition :* si y_1 et y_2 sont solutions des équations de seconds membres f_1 et f_2, alors $\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2$ est solution de l'équation de second membre $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$.

∘ Démonstration : La démonstration est celle de la proposition 7, avec $L(y)=y''+a\,y'+b\,y$, qui vérifie encore $L(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2)=\lambda_1 L(y_1)+\lambda_2 L(y_2)$. □

Proposition 10 : *(Second membre exponentiel.)* Soit A, $\lambda\in\mathbb{C}$. L'équation $y''+a\,y'+b\,y=A\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ admet la solution particulière
$$y_p(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{P(\lambda)}\,\mathrm{e}^{\lambda x} & \text{si } \lambda \text{ n'est pas racine de } P,\\[2mm] \dfrac{A}{P'(\lambda)}\,x\,\mathrm{e}^{\lambda x} & \text{si } \lambda \text{ est racine simple de } P,\\[2mm] \dfrac{A}{2}\,x^2\,\mathrm{e}^{\lambda x} & \text{si } \lambda \text{ est racine double de } P.\end{cases}$$

∘ Démonstration : On applique la proposition 8 à Q constant, puis à $Q(x)=cx$, puis à $Q(x)=cx^2$. Dans le premier cas, on obtient $P(\lambda)\,Q\,\mathrm{e}^{\lambda x}$. Dans le deuxième, si $P(\lambda)=0$, on obtient $P'(\lambda)\,c\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, et $P'(\lambda)\neq 0$ puisque la racine est simple. Dans le troisième, $P(\lambda)=P'(\lambda)=0$, et il reste $Q''\mathrm{e}^{\lambda x}=2c\,\mathrm{e}^{\lambda x}$. Chaque fois, on choisit la constante pour obtenir $A\,\mathrm{e}^{\lambda x}$. □

♡ **Méthode :** Pour les autres seconds membres usuels, avec a et b réels :

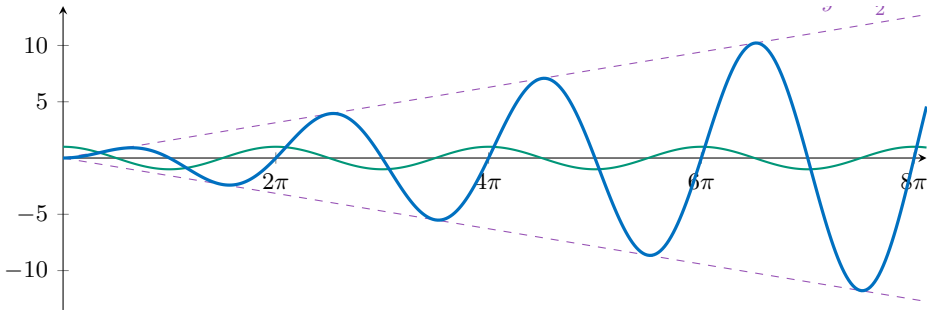
- ▶ Si $f(x)=B\cos(\omega x)$ ou $B\sin(\omega x)$, avec B, ω réels, on résout avec le second membre $B\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$ par la proposition 10, puis l'on prend la partie réelle ou la partie imaginaire de la solution obtenue.
- ▶ Si f est un polynôme de degré n, on cherche un polynôme de degré n si $b\neq 0$, de degré $n+1$ si $b=0$ et $a\neq 0$, de degré $n+2$ si $a=b=0$, et l'on identifie les coefficients.
- ▶ Si f est une somme de tels termes, on traite chacun séparément et l'on ajoute les solutions, par le principe de superposition.

Exemples :

- Pour $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{x}$, le nombre 1 est racine simple de $P(r)=r^2-3r+2$, et $P'(1)=-1$: la solution particulière est $-x\,\mathrm{e}^{x}$, et les solutions réelles sont les fonctions $x\mapsto\lambda\,\mathrm{e}^{x}+\mu\,\mathrm{e}^{2x}-x\,\mathrm{e}^{x}$. Chercher une solution de la forme $c\,\mathrm{e}^{x}$ aurait échoué, puisque e^{x} est déjà solution de l'équation homogène.
- Pour $y''+y'=x$, on a $b=0$ et $a\neq 0$: on cherche un polynôme de degré 2, $y=\alpha x^2+\beta x$, ce qui donne $2\alpha+2\alpha x+\beta=x$, puis $\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=-1$. La fonction $x\mapsto\frac{x^2}{2}-x$ est solution.

- Pour $y'' + y = \cos x$, le nombre i est racine simple de $P(r) = r^2 + 1$, avec $P'(\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}$. La proposition 10 donne la solution $\frac{x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$ de l'équation de second membre $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, dont la partie réelle est

$$y_p(x) = \frac{x \sin x}{2}.$$



La solution particulière, en bleu, oscille entre les droites $y = \pm\frac{x}{2}$, en violet, avec une amplitude qui croît sans limite, alors que le second membre $\cos x$, en vert, reste borné : c'est le phénomène de *résonance*, qui se produit lorsque la pulsation de l'excitation est celle des oscillations libres.

6.5.4 Problème de Cauchy

Théorème 6 : Existence et unicité pour un problème de Cauchy :
Soit a, $b \in \mathbb{K}$, $f : I \to \mathbb{K}$ continue, $x_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$. Il existe une unique solution y de (E) sur I telle que

$$y(x_0) = y_0 \qquad \text{et} \qquad y'(x_0) = y_1.$$

Si a, b, f, y_0 et y_1 sont réels, cette solution est réelle.

La démonstration qui suit est souvent admise à ce niveau ; elle ne demande pourtant que les outils du chapitre, et elle montre comment un problème du second ordre se ramène à deux problèmes du premier ordre.

∘ Démonstration : On se place dans $\mathbb{C}$, et l'on reprend les notations de la démonstration du théorème 4.

Existence d'une solution particulière. Avec $y = z\,\mathrm{e}^{r_1 x}$, la proposition 8 montre que y est solution de (E) dès que $w = z'$ vérifie $w' + (r_1 - r_2)\,w = f(x)\,\mathrm{e}^{-r_1 x}$. Le théorème 3 fournit une telle fonction w, continue puisque dérivable, et le théorème 1 une primitive z de w.

Ajustement des conditions initiales. D'après la proposition 9, les solutions sont les $y_p + y_h$. Si $\Delta \neq 0$, imposer $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$ revient au système d'inconnues $\lambda' = \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 x_0}$ et $\mu' = \mu\,\mathrm{e}^{r_2 x_0}$

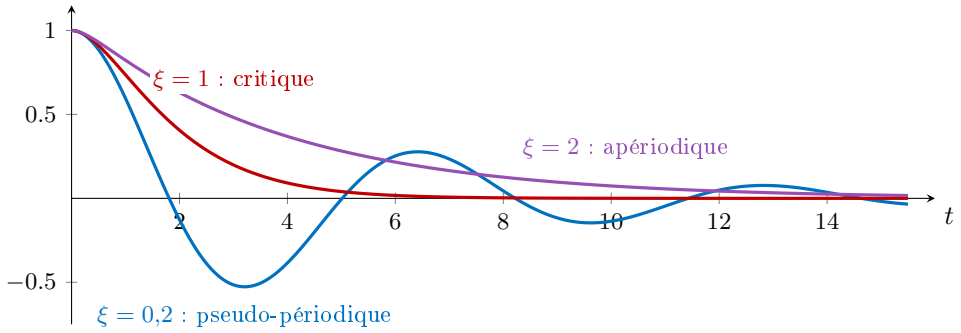
$$\lambda' + \mu' = y_0 - y_p(x_0), \qquad r_1\lambda' + r_2\mu' = y_1 - y_p'(x_0),$$

qui a une unique solution puisque $r_1 \neq r_2$, comme on le voit en substituant $\mu' = y_0 - y_p(x_0) - \lambda'$ dans la seconde équation. Si $\Delta = 0$, on obtient de même, pour $\lambda'' = (\lambda + \mu x_0)\mathrm{e}^{r_0 x_0}$ et $\mu'' = \mu\,\mathrm{e}^{r_0 x_0}$, le système $\lambda'' = y_0 - y_p(x_0)$ et $r_0\lambda'' + \mu'' = y_1 - y_p'(x_0)$, qui a aussi une unique solution.

Cas réel. Si les données sont réelles, la fonction $\overline{y}$ est solution du même problème, avec les mêmes conditions initiales, puisque

$$\overline{y}'' + a\,\overline{y}' + b\,\overline{y} = \overline{y'' + a\,y' + b\,y} = \overline{f} = f;$$

par unicité, $\overline{y} = y$. □



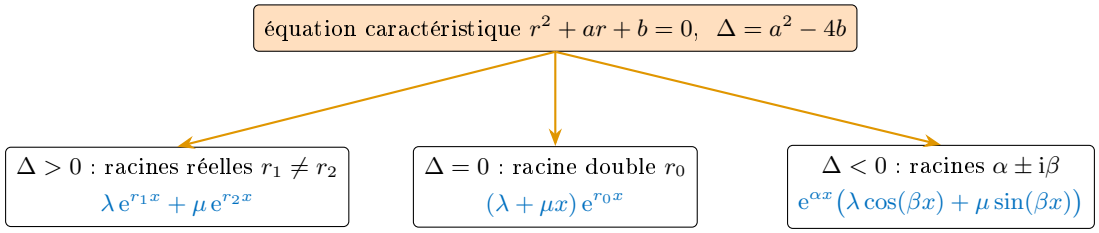
La figure représente la solution de $y'' + 2\xi\, y' + y = 0$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, pour trois valeurs du coefficient d'amortissement $\xi > 0$. Le discriminant $4(\xi^2 - 1)$ change de signe en $\xi = 1$: pour $\xi < 1$, les racines sont complexes et l'oscillateur oscille en s'amortissant ; pour $\xi > 1$, elles sont réelles et négatives, et il revient lentement à l'équilibre sans osciller ; le régime critique $\xi = 1$, en rouge, est celui du retour le plus rapide sans oscillation, que recherchent les amortisseurs.

Remarque : La méthode de la démonstration, qui ramène une équation du second ordre à deux équations du premier ordre successives, est l'analogue de la factorisation $P(r) = (r-r_1)(r-r_2)$: en notant D l'opération de dérivation, l'équation s'écrit $(D - r_1)(D - r_2)y = f$. Le chapitre 14 donnera un sens précis à ce calcul sur des opérateurs, et le chapitre 15 montrera que l'ensemble des solutions de (H) est un espace vectoriel de dimension 2.

6.6 Bilan

Le tableau rassemble les résultats du chapitre sur les équations différentielles ; dans chaque cas, la solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène, et une solution est déterminée par ses conditions initiales.

équation	solutions de (H)	solution particulière	conditions initiales
$y' + a(x)\, y = b(x)$	$\lambda\, \mathrm{e}^{-A(x)}$, $A' = a$	variation de la constante	$y(x_0)$
$y'' + ay' + by = f(x)$	selon Δ (arbre ci-dessous)	proposition 10 et méthode	$y(x_0)$ et $y'(x_0)$



L'arbre se lit de haut en bas : le signe du discriminant de l'équation caractéristique décide de la forme des solutions réelles de l'équation homogène, les constantes λ et μ étant réelles. Dans $\mathbb{C}$, seuls les deux premiers cas subsistent, $\Delta \neq 0$ et $\Delta = 0$.

Le chapitre 18 construira l'intégrale sans admettre le théorème 1, ce qui achèvera les démonstrations de ce chapitre, et en tirera la formule de Taylor avec reste intégral ; les chapitres 14 et 15 donneront aux ensembles de solutions leur structure d'espace affine et d'espace vectoriel.