Chapitre 7

Nombres réels et suites numériques

7.1 Introduction historique

J'ai alors ressenti plus vivement que jamais le manque d'un fondement véritablement scientifique de l'arithmétique.

Richard Dedekind - *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Vieweg, 1872

7.1.1 Zurich, automne 1858 : un théorème sans démonstration

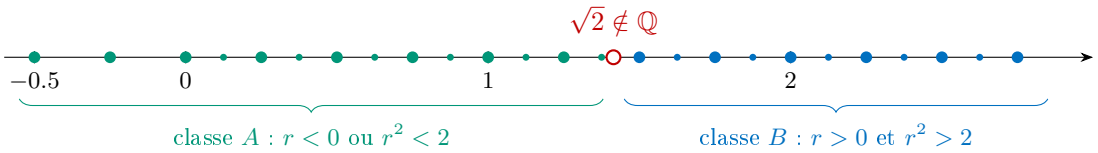
Chargé d'enseigner pour la première fois le calcul différentiel à l'École polytechnique de Zurich, **Richard Dedekind** bute sur un énoncé que tout le monde admet : une grandeur qui croît constamment, sans dépasser une certaine borne, tend nécessairement vers une valeur limite. Pour le justifier devant ses élèves, il doit, raconte-t-il dans la préface de 1872, chercher refuge dans l'évidence géométrique : le point mobile s'arrête quelque part sur la droite. Mais rien, dans l'arithmétique des nombres rationnels, ne garantit que ce « quelque part » soit un nombre.

7.1.2 Le 24 novembre 1858 : une coupure dans les rationnels

Dedekind trouve la réponse en observant comment un point de la droite partage les rationnels en deux classes, tout élément de la première étant inférieur à tout élément de la seconde. Certaines de ces « coupures » n'ont pas de frontière rationnelle : c'est le cas de celle qui sépare les rationnels négatifs ou de carré inférieur à 2 de tous les autres. Dedekind décide de *définir* un nombre réel comme une coupure ; la même année 1872, **Georg Cantor** publie une construction concurrente, fondée sur les suites.

7.1.3 Le parti pris de ce chapitre

Nous ne referons aucune de ces constructions. Nous admettrons qu'il existe un ensemble $\mathbb{R}$ qui prolonge $\mathbb{Q}$ et qui possède la *propriété de la borne supérieure*, traduction de cette absence de trous, et nous en déduirons tout le reste, à commencer par le théorème qui arrêtait Dedekind, le théorème de la limite monotone de la section 7.5. Sur la figure, les rationnels de la première classe sont en vert, ceux de la seconde en bleu ; la frontière $\sqrt{2}$, en rouge, n'est pas rationnelle.



7.2 Les nombres réels

7.2.1 Les ensembles de nombres

Définition : Un **nombre décimal** est un réel de la forme $\frac{k}{10^n}$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$; on note $\mathbb{D}$ leur ensemble. Un **nombre rationnel** est un réel de la forme $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$; on note $\mathbb{Q}$ leur ensemble. Un réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**. On a les inclusions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Toutes ces inclusions sont strictes : -1 n'est pas un entier naturel, $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ est décimal mais pas entier, $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal puisque $\frac{10^n}{3}$ n'est jamais entier, 3 ne divisant pas 10^n, et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel (théorème 1 du chapitre 1).

La construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ est hors programme ; on en admet l'existence et les propriétés suivantes. L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui obéissent aux règles de calcul habituelles, et d'une relation d'ordre total $\leqslant$ compatible avec ces opérations : si $x \leqslant y$, alors $x+z \leqslant y+z$ pour tout réel z, et $xz \leqslant yz$ pour tout réel $z \geqslant 0$. Le chapitre 11 dira que $\mathbb{R}$ est un *corps totalement ordonné*. Ces règles ne suffisent pas à distinguer $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$, qui les vérifie aussi : ce qui les sépare est l'axiome de la borne supérieure, énoncé plus loin.

La **valeur absolue** d'un réel x est $|x| = \max(x, -x)$; c'est le module de x vu comme nombre complexe (chapitre 4), et $|x-a|$ est la distance entre x et a sur la droite.

Proposition 1 : Pour tous réels x, y, a et tout réel $\varepsilon \geqslant 0$:

(i) $|xy| = |x|\,|y|$, et $|x| \leqslant \varepsilon \iff -\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$;

(ii) *inégalités triangulaires :* $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ et $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leqslant |x-y|$;

(iii) $|x-a| \leqslant \varepsilon \iff x \in [a-\varepsilon\,, a+\varepsilon]$.

∘ Démonstration : (i) Le premier point est le cas réel de $|zz'| = |z|\,|z'|$ (chapitre 4). Ensuite, $|x| \leqslant \varepsilon$ signifie $x \leqslant \varepsilon$ et $-x \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$. (ii) La première inégalité est le théorème 3 du chapitre 4. Elle donne $|x| = |(x-y)+y| \leqslant |x-y| + |y|$, soit $|x| - |y| \leqslant |x-y|$, et de même $|y| - |x| \leqslant |x-y|$ en échangeant les rôles. (iii) On applique (i) à $x-a$. □

7.2.2 Borne supérieure

On reprend le vocabulaire du chapitre 2, dans l'ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leqslant)$. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Un réel M est un **majorant** de A si $a \leqslant M$ pour tout $a \in A$; la partie A est **majorée** si elle possède un majorant. On définit de même un **minorant** et une partie **minorée** ; une partie à la fois majorée et minorée est **bornée**. Le **plus grand élément** de A, ou **maximum**, est un majorant de A qui appartient à A ; il est unique s'il existe, et noté $\max A$.

Définition : Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On appelle **borne supérieure** de A le plus petit élément, s'il existe, de l'ensemble des majorants de A. On la note $\sup A$. On définit de même la **borne inférieure** de A, plus grand des minorants, notée $\inf A$.

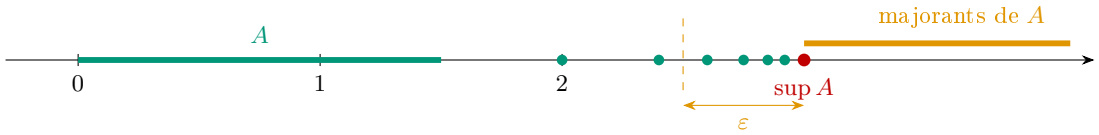
Remarques :

- La borne supérieure est unique lorsqu'elle existe, comme tout plus petit élément. Si A a un maximum, celui-ci est sa borne supérieure : c'est un majorant, et tout majorant M vérifie $\max A \leqslant M$ puisque $\max A \in A$.
- La réciproque est fausse, et c'est tout l'intérêt de la notion : $[0\,,1[$ n'a pas de maximum (chapitre 2), mais sa borne supérieure vaut 1. En effet, 1 est un majorant, et un réel $M < 1$ n'en est pas un, puisque $\max\left(0, \frac{M+1}{2}\right)$ est un élément de $[0\,,1[$ strictement supérieur à M.

Proposition 2 : *(Caractérisation de la borne supérieure.)* Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et M un réel. Alors $M = \sup A$ si et seulement si

$$\forall a \in A,\ a \leqslant M \qquad \text{et} \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ M - \varepsilon < a.$$

∘ Démonstration : La première condition dit que M est un majorant. La seconde dit qu'aucun réel $M-\varepsilon$ strictement inférieur à M n'est un majorant ; comme tout réel $M' < M$ s'écrit $M-\varepsilon$ avec $\varepsilon = M-M' > 0$, elle dit que tout majorant M' vérifie $M' \geqslant M$. Les deux conditions réunies expriment donc exactement que M est le plus petit des majorants. □



Les majorants forment la demi-droite orange, dont l'origine est la borne supérieure ; quel que soit $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]\sup A - \varepsilon\,, \sup A]$ contient des éléments de A, en vert, bien que $\sup A$ n'appartienne pas ici à A.

Théorème 1 : Propriété de la borne supérieure (axiome) :
Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.
Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.

La première assertion est admise : c'est un axiome, qui serait un théorème si l'on construisait $\mathbb{R}$ par les coupures de Dedekind ou par les suites de Cauchy. La seconde s'en déduit : si A est non vide et minorée, la partie $-A = \{-a \mid a \in A\}$ est non vide et majorée, et l'on vérifie que $-\sup(-A)$ est le plus grand minorant de A, puisque m minore A si et seulement si $-m$ majore $-A$.

Remarques :

- L'axiome est faux dans $\mathbb{Q}$. La partie $A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}$ est non vide et majorée par 2, mais elle n'a pas de borne supérieure *rationnelle* : la proposition 5 montrera que sa borne supérieure dans $\mathbb{R}$ est $\sqrt{2}$, qui n'est pas rationnel. C'est la coupure de l'introduction.
- Les deux hypothèses sont nécessaires : $\mathbb{N}$ est non vide mais non majorée (proposition 3), et la partie vide est majorée par n'importe quel réel, si bien que l'ensemble de ses majorants, $\mathbb{R}$ tout entier, n'a pas de plus petit élément.
- L'erreur la plus répandue est de croire que la borne supérieure appartient à la partie. Il faut retenir le réflexe inverse : $\sup A$ est un majorant *qui peut être approché* par des éléments de A.

7.2.3 Propriété d'Archimède, partie entière, racine carrée

Proposition 3 : *(Propriété d'Archimède.)* Pour tout réel $a > 0$ et tout réel x, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $na > x$. En particulier, $\mathbb{N}$ n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$.

∘ Démonstration : Raisonnons par l'absurde, et supposons que $na \leqslant x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La partie $\{na \mid n \in \mathbb{N}\}$ est alors non vide et majorée par x : elle a une borne supérieure M. Comme $a > 0$, le réel $M - a$ n'est pas un majorant, d'après la proposition 2 : il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $na > M - a$. Mais alors $(n+1)\,a > M$, alors que $(n+1)\,a$ appartient à la partie que M majore. C'est absurde. Avec $a = 1$, on obtient que tout réel x est strictement dépassé par un entier. □

Cette propriété, admise au chapitre 1, était déjà au cœur de la méthode d'exhaustion d'Archimède : une quantité strictement positive, aussi petite soit-elle, finit par dépasser toute grandeur donnée si on l'ajoute assez de fois à elle-même.

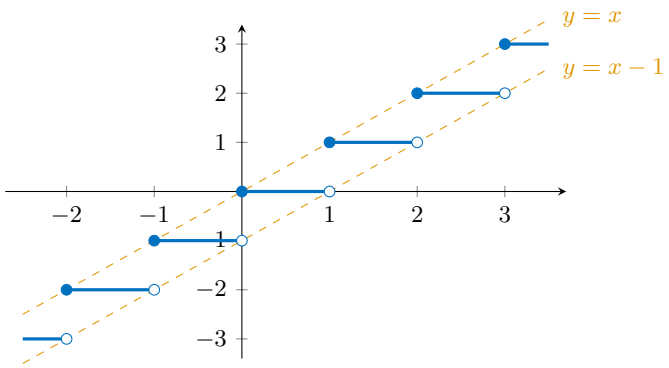
Proposition 4 : *(Partie entière.)* Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif n tel que

$$n \leqslant x < n+1.$$

On l'appelle la **partie entière** de x et on le note $\lfloor x \rfloor$; on a donc $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

∘ Démonstration : *Existence.* Supposons d'abord $x \geqslant 0$. D'après la proposition 3, la partie $\{k \in \mathbb{N} \mid k > x\}$ n'est pas vide ; elle a un plus petit élément m (proposition 4 du chapitre 1), et $m \geqslant 1$ puisque $0 \leqslant x$. Alors $m - 1 \leqslant x$, par minimalité de m, et $x < m$: l'entier $n = m - 1$ convient. Si $x < 0$, soit p l'entier obtenu pour $-x$, tel que $p \leqslant -x < p+1$: si $x = -p$, l'entier $n = -p$ convient ; sinon $-p - 1 < x < -p$, et $n = -p - 1$ convient.

Unicité. Si $n \leqslant x < n+1$ et $n' \leqslant x < n'+1$, alors $n < n'+1$ et $n' < n+1$, d'où $|n-n'| < 1$; deux entiers dont la différence est strictement inférieure à 1 en valeur absolue sont égaux. □



Le graphe de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est un escalier dont chaque marche contient son extrémité gauche, en point plein, mais pas son extrémité droite, en point vide ; il est compris entre les droites $y = x-1$ et $y = x$, ce qui traduit l'encadrement $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

Remarques :

- L'erreur la plus répandue concerne les négatifs : $\lfloor 3{,}7 \rfloor = 3$, mais $\lfloor -3{,}7 \rfloor = -4$, et non -3, puisque $-4 \leqslant -3{,}7 < -3$. La partie entière n'est pas la troncature de l'écriture décimale.
- Les intervalles $[k\,, k+1[$, pour $k \in \mathbb{Z}$, forment une partition de $\mathbb{R}$, comme l'annonçait le chapitre 1 : $\lfloor x \rfloor$ est l'indice de l'unique intervalle qui contient x.

Proposition 5 : *(Racine carrée.)* Pour tout réel $x \geqslant 0$, il existe un unique réel $y \geqslant 0$ tel que $y^2 = x$. On le note $\sqrt{x}$.

∘ Démonstration : *Unicité.* Si y et y' sont positifs et $y^2 = y'^2$, alors $(y-y')(y+y') = 0$: ou bien $y = y'$, ou bien $y + y' = 0$, ce qui impose $y = y' = 0$.

Existence. La partie $A = \{t \geqslant 0 \mid t^2 \leqslant x\}$ contient 0, et elle est majorée par $1 + x$, car un réel $t > 1 + x$ vérifie $t^2 > t > x$. Soit $y = \sup A \geqslant 0$. Montrons que $y^2 = x$ en excluant les deux inégalités strictes.

• Supposons $y^2 < x$, et soit h un réel tel que $0 < h \leqslant 1$ et $h < \frac{x-y^2}{2y+1}$. Alors $h^2 \leqslant h$, et

$$(y+h)^2 = y^2 + h(2y+h) \leqslant y^2 + h(2y+1) < x.$$

Ainsi $y + h \in A$, ce qui contredit le fait que y majore A.

• Supposons $y^2 > x$. Alors $y > 0$, et le réel $h = \frac{y^2-x}{2y}$ vérifie $0 < h < y$. On a

$$(y-h)^2 = y^2 - 2yh + h^2 > y^2 - 2yh = x.$$

Pour tout $t \in A$, on a donc $t^2 \leqslant x < (y-h)^2$, d'où $t < y - h$, puisque t et $y - h$ sont positifs : $y - h$ est un majorant de A strictement inférieur à y, ce qui est absurde.

Il reste $y^2 = x$. □

Remarque : Cette démonstration tient la promesse du chapitre 4, où l'existence de $\sqrt{x}$ avait été admise. Elle montre aussi que la partie $\{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}$ a pour borne supérieure $\sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$: la même méthode, appliquée aux seuls rationnels, montre qu'aucun rationnel ne peut être sa borne supérieure. Le chapitre 8 donnera une démonstration plus rapide, par le théorème des valeurs intermédiaires, qui repose lui-même sur la borne supérieure.

7.2.4 Approximations décimales et densité

Définition : Soit x un réel et $n \in \mathbb{N}$. Les décimaux

$$d_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \qquad \text{et} \qquad d_n + 10^{-n}$$

sont les **valeurs décimales approchées de x à la précision 10^{-n}**, respectivement **par défaut** et **par excès**. Elles vérifient $d_n \leqslant x < d_n + 10^{-n}$.

L'encadrement s'obtient en divisant par 10^n l'inégalité $\lfloor 10^n x\rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x\rfloor + 1$. Par exemple, pour $x = \pi$ et $n = 3$, on a $10^3\pi \approx 3141{,}59$, d'où $d_3 = 3{,}141$ et $3{,}141 \leqslant \pi < 3{,}142$: ce sont les trois premières décimales de l'écriture de π.

Définition : Une partie A de $\mathbb{R}$ est **dense dans $\mathbb{R}$** si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide : pour tous réels $a < b$, l'intervalle $]a\,,b[$ contient au moins un élément de A.

Théorème 2 : Densité de $\mathbb{D}$, de $\mathbb{Q}$ et des irrationnels :
Les parties $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$: tout intervalle ouvert non vide contient un décimal, un rationnel et un irrationnel.

∘ Démonstration : Soit $a < b$. D'après la proposition 3, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n(b-a) > 1$; comme $10^n \geqslant n$, on a $10^{-n} < b - a$. Posons $d = \frac{\lfloor 10^n a\rfloor + 1}{10^n}$, qui est décimal. Comme $\lfloor 10^n a\rfloor \leqslant 10^n a < \lfloor 10^n a\rfloor + 1$, on a

$$a < d \leqslant a + 10^{-n} < b.$$

Ainsi $\mathbb{D}$ est dense, et $\mathbb{Q}$, qui contient $\mathbb{D}$, l'est aussi. Pour les irrationnels, on applique ce qui précède à l'intervalle $]a-\sqrt{2}\,,b-\sqrt{2}[$: il contient un rationnel r, et $r+\sqrt{2}$ appartient à $]a\,,b[$. Ce réel est irrationnel, sinon $\sqrt{2} = (r+\sqrt{2}) - r$ serait rationnel. □

Remarque : Un intervalle ouvert non vide contient en fait une infinité de rationnels et d'irrationnels : on applique le théorème à $]a\,,b[$, puis à $]a\,,r_1[$ où r_1 est le rationnel trouvé, et ainsi de suite. Rationnels et irrationnels sont inextricablement mêlés sur la droite ; le chapitre 8 en tirera des fonctions déroutantes, comme l'indicatrice de $\mathbb{Q}$, qui n'est continue en aucun point.

7.2.5 Intervalles et droite achevée

Proposition 6 : *(Caractérisation des intervalles.)* Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si

$$\forall (a,b) \in X^2,\quad a \leqslant b \implies [a\,,b] \subset X.$$

∘ Démonstration : Un intervalle vérifie évidemment cette propriété. Réciproquement, soit X une partie non vide qui la vérifie, la partie vide étant un intervalle. Notons $\alpha = \inf X$ si X est minorée et $\alpha = -\infty$ sinon, et de même $\beta = \sup X$ ou $\beta = +\infty$. Tout élément de X est entre α et β. Inversement, soit x tel que $\alpha < x < \beta$. Comme $x > \alpha$, le réel x ne minore pas X : il existe $a \in X$ tel que $a < x$; de même, il existe $b \in X$ tel que $b > x$. Alors $x \in [a\,,b] \subset X$. Ainsi $]\alpha\,,\beta[\subset X \subset [\alpha\,,\beta]$, les crochets étant ouverts du côté d'une borne infinie : X est l'un des intervalles d'extrémités α et β. □

Cette caractérisation, qui ne mentionne pas les extrémités, servira au chapitre 8 pour démontrer le théorème des valeurs intermédiaires : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

On appelle **droite achevée** l'ensemble

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

ordonné en convenant que $-\infty < x < +\infty$ pour tout réel x. Lorsqu'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ n'est pas majorée, on convient de poser $\sup A = +\infty$; lorsqu'elle n'est pas minorée, on pose $\inf A = -\infty$: toute partie non vide de $\mathbb{R}$ a alors une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$. Les éléments $\pm\infty$ ne sont pas des réels, et l'on ne calcule pas avec eux sans les règles précises de la section 7.4.

7.3 Généralités sur les suites réelles

Définition : Une **suite réelle** est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On note u_n l'image de n, appelée **terme d'indice n**, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplement (u_n), la suite elle-même. On parle aussi de suite définie à partir d'un rang n_0 lorsqu'elle n'est définie que sur $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_0\}$.

Il ne faut pas confondre la suite (u_n), qui est une application, avec le terme u_n, qui est un nombre, ni avec l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de ses valeurs, qui oublie l'ordre et les répétitions. Une suite peut être définie de trois façons.

- *Explicitement*, par une formule $u_n = f(n)$: par exemple $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

- *Par récurrence*, en donnant u_0 et une relation $u_{n+1} = f(u_n)$; il faut alors s'assurer que chaque terme reste dans l'ensemble où f est définie, ce que la section 7.9 étudiera.
- *Implicitement*, u_n étant l'unique solution d'une équation qui dépend de n. Par exemple, pour $n \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto x^n + x$ est dérivable et strictement croissante sur $[0\,,1]$, de 0 à 2 : d'après le théorème 2 du chapitre 5, elle réalise une bijection de $[0\,,1]$ sur $[0\,,2]$, et l'équation $x^n + x = 1$ a une unique solution $u_n \in [0\,,1]$.

Définition : Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n \leqslant M$ pour tout n, **minorée** s'il existe m tel que $u_n \geqslant m$ pour tout n, et **bornée** si elle est majorée et minorée. Elle est **croissante** si $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n, **décroissante** si $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout n, **monotone** si elle est croissante ou décroissante ; on parle de suite **strictement** croissante ou décroissante avec des inégalités strictes. Elle est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang.

Remarques :

- Une suite (u_n) est bornée si et seulement si $(|u_n|)$ est majorée. En effet, si $m \leqslant u_n \leqslant M$, alors $|u_n| \leqslant \max(|m|, |M|)$; réciproquement, $|u_n| \leqslant K$ donne $-K \leqslant u_n \leqslant K$ (proposition 1). C'est presque toujours sous la forme $|u_n| \leqslant K$ que l'on démontre qu'une suite est bornée.
- On dit qu'une propriété est vraie **à partir d'un certain rang** s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel qu'elle soit vraie pour tout $n \geqslant N$. Si deux propriétés sont vraies, l'une à partir du rang N_1 et l'autre à partir du rang N_2, elles sont simultanément vraies à partir du rang $\max(N_1, N_2)$: ce « maximum des rangs », rencontré au chapitre 1, est l'argument le plus utilisé du chapitre.

♡ **Méthode : Pour étudier la monotonie d'une suite**, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$; lorsque tous les termes sont strictement positifs, on peut aussi comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. Pour une suite définie par $u_n = f(n)$, il suffit que f soit monotone sur $[0\,,+\infty[$.

Exemple : La suite définie par $u_n = \frac{n!}{n^n}$ pour $n \geqslant 1$ est à termes strictement positifs, et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1 :$$

elle est strictement décroissante. La différence $u_{n+1} - u_n$ aurait conduit à un calcul inextricable : le quotient est adapté aux produits et aux puissances.

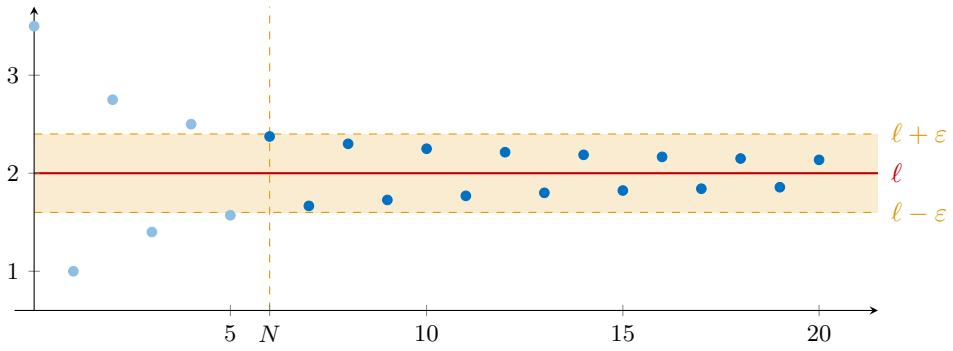
7.4 Limite d'une suite

7.4.1 Définitions

Définition : Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un réel. On dit que (u_n) **tend vers** ℓ, ou **converge vers** ℓ, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On dit que (u_n) **tend vers** $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant A$, et **vers** $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant A$.



Pour la suite $u_n = 2 + (-1)^n \frac{3}{n+2}$ et $\varepsilon = 0{,}4$, tous les termes d'indice $n \geqslant N = 6$, en bleu foncé, sont dans la bande orange de demi-largeur ε autour de $\ell = 2$; les premiers termes, plus pâles, peuvent en sortir. Si l'on rétrécit la bande, il faut aller plus loin pour trouver le rang N.

Remarques :

- Le rang N dépend de ε, ce que traduit l'ordre des quantificateurs, comme l'annonçait le chapitre 1. L'énoncé $\exists N,\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ dirait que $u_n = \ell$ pour tout $n \geqslant N$: il caractérise les suites stationnaires.
- On peut remplacer $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ par $|u_n - \ell| < \varepsilon$ sans changer la notion : la condition stricte pour ε entraîne la condition large, et la condition large pour $\frac{\varepsilon}{2}$ entraîne la condition stricte pour ε. Les inégalités larges sont celles qui se conservent par passage à la limite.
- La définition dit aussi que, pour tout $\varepsilon > 0$, seul un nombre *fini* de termes sont hors de l'intervalle $[\ell - \varepsilon\,, \ell + \varepsilon]$; modifier un nombre fini de termes d'une suite ne change donc pas sa limite.

Exemples :

- La suite $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$ tend vers 2. En effet, $|u_n - 2| = \frac{3}{n+2} \leqslant \frac{3}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Soit $\varepsilon > 0$; l'entier $N = \lfloor \frac{3}{\varepsilon} \rfloor + 1$ vérifie $N > \frac{3}{\varepsilon}$, donc, pour $n \geqslant N$, $|u_n - 2| \leqslant \frac{3}{n} \leqslant \frac{3}{N} < \varepsilon$. Pour $\varepsilon = 10^{-3}$, il faut aller jusqu'au rang $N = 3001$: on a $u_{1000} \approx 1{,}997$.
- La suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$: pour tout réel $A > 0$, on pose $N = \lfloor A^2 \rfloor + 1$, et pour $n \geqslant N$, $\sqrt{n} \geqslant \sqrt{N} > A$, la racine carrée étant croissante.
- La suite $(\frac{1}{n})_{n \geqslant 1}$ tend vers 0 : c'est la propriété d'Archimède, qui fournit pour tout $\varepsilon > 0$ un entier $N > \frac{1}{\varepsilon}$.

Théorème 3 : Unicité de la limite :
Si une suite tend vers ℓ et vers ℓ', éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\ell = \ell'$.

∘ Démonstration : Supposons ℓ et ℓ' réels et distincts, et posons $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{3} > 0$. Il existe des rangs N_1 et N_2 tels que $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N_1$ et $|u_n - \ell'| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N_2$. Pour $n = \max(N_1, N_2)$, l'inégalité triangulaire donne

$$3\varepsilon = |\ell - \ell'| \leqslant |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| \leqslant 2\varepsilon,$$

ce qui est absurde puisque $\varepsilon > 0$. Si ℓ est réel et $\ell' = +\infty$, on a $u_n \leqslant \ell + 1$ à partir d'un rang et $u_n \geqslant \ell + 2$ à partir d'un autre, ce qui est contradictoire au-delà du maximum des deux rangs ; les autres cas sont analogues. □

Cette unicité justifie la notation $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, ou encore $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$. Dans un énoncé, l'égalité

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

affirme à la fois que la suite admet une limite et que cette limite vaut ℓ ; on réserve la flèche à la conclusion d'un calcul. Une suite qui tend vers un réel est dite **convergente** ; une suite qui n'est pas convergente est **divergente**. Une suite divergente peut tendre vers $\pm\infty$, ou n'avoir aucune limite, comme $\big((-1)^n\big)$, nous le verrons à la section 7.6.

7.4.2 Propriétés des suites convergentes

Proposition 7 : Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel ℓ.

(i) La suite (u_n) est bornée.

(ii) Si $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang ; plus précisément, $u_n \geqslant \frac{\ell}{2}$ à partir d'un certain rang.

∘ Démonstration : (i) Avec $\varepsilon = 1$, il existe N tel que $|u_n| \leqslant |\ell| + 1$ pour $n \geqslant N$, d'après l'inégalité triangulaire. Les termes d'indice $n < N$ sont en nombre fini, d'où, pour tout n,

$$|u_n| \leqslant \max\big(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1\big).$$

(ii) Avec $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, on obtient $u_n \geqslant \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0$ à partir d'un certain rang. □

La réciproque de (i) est fausse : la suite $\big((-1)^n\big)$ est bornée mais diverge. Le point (ii) dit qu'une limite strictement positive « protège » le signe des termes ; il sert à diviser par u_n et à démontrer les inégalités de la section suivante.

Proposition 8 : *(Deux critères de convergence.)* Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles et ℓ un réel.

(i) Si $|u_n - \ell| \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

(ii) Si (u_n) est bornée et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.

∘ Démonstration : (i) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_1 tel que $|u_n - \ell| \leqslant v_n$ pour $n \geqslant N_1$, et N_2 tel que $v_n = |v_n - 0| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N_2$; pour $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, on a $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. (ii) Si $|u_n| \leqslant K$, avec $K > 0$, alors $|u_n v_n - 0| \leqslant K|v_n|$, et $K|v_n|$ tend vers 0 : on applique (i). □

Exemple : La suite $\left(\frac{\sin n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0, comme produit de la suite bornée $(\sin n)$ et de la suite $(\frac{1}{n})$, qui tend vers 0. On n'a pas besoin de savoir que $(\sin n)$ n'a pas de limite, ce qui est vrai mais difficile.

7.4.3 Opérations sur les limites

Théorème 4 : Opérations sur les limites finies :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent vers des réels ℓ et ℓ', et λ, μ deux réels. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda\ell + \mu\ell' \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell\ell'.$$

Si de plus $\ell' \neq 0$, alors $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

∘ Démonstration : *Combinaison linéaire.* L'inégalité triangulaire donne

$$\big|\lambda u_n + \mu v_n - (\lambda\ell + \mu\ell')\big| \leqslant |\lambda|\,|u_n - \ell| + |\mu|\,|v_n - \ell'|,$$

et le majorant tend vers 0 : il est inférieur à ε dès que chaque terme l'est à $\frac{\varepsilon}{2}$, ce qui a lieu au-delà du maximum de deux rangs. On conclut par la proposition 8 (i).

Produit. On fait apparaître les écarts en ajoutant et retranchant $u_n\ell'$:

$$|u_n v_n - \ell\ell'| = |u_n(v_n - \ell') + \ell'(u_n - \ell)| \leqslant |u_n|\,|v_n - \ell'| + |\ell'|\,|u_n - \ell|.$$

La suite (u_n) est bornée (proposition 7), donc le premier terme tend vers 0 (proposition 8 (ii)) ; le second aussi, et l'on conclut comme précédemment.

Quotient. D'après la proposition 1, $\big||v_n| - |\ell'|\big| \leqslant |v_n - \ell'|$, donc $|v_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell'| > 0$, et la proposition 7 (ii) donne $|v_n| \geqslant \frac{|\ell'|}{2} > 0$ à partir d'un certain rang. Pour ces indices,

$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| = \frac{|v_n - \ell'|}{|v_n|\,|\ell'|} \leqslant \frac{2}{\ell'^2}\,|v_n - \ell'|,$$

d'où $\frac{1}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\ell'}$, et l'on conclut par le produit de (u_n) et de $(\frac{1}{v_n})$. □

Lorsque l'une des limites est infinie, on dispose des règles suivantes, où ℓ désigne un réel ; le tableau donne, en fonction des limites de u_n et v_n quand n tend vers $+\infty$, celle de la suite indiquée en tête de colonne, toujours quand n tend vers $+\infty$; chacune se démontre en revenant aux définitions, et les cases marquées « F.I. » sont des **formes indéterminées**, pour lesquelles aucune règle générale n'existe.

u_n, v_n	$u_n + v_n$	u_n, v_n	$u_n v_n$	u_n	$\frac{1}{u_n}$
ℓ, $+\infty$	$+\infty$	$\ell > 0$, $+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	0
$+\infty$, $+\infty$	$+\infty$	$\ell < 0$, $+\infty$	$-\infty$	0, avec $u_n > 0$	$+\infty$
$-\infty$, $-\infty$	$-\infty$	$+\infty$, $\pm\infty$	$\pm\infty$	0, avec $u_n < 0$	$-\infty$
$+\infty$, $-\infty$	F.I.	0, $\pm\infty$	F.I.	0, signe changeant	pas de limite

Démontrons par exemple la première ligne. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, la suite (u_n) est minorée par un réel m (proposition 7) ; pour A réel, on a $v_n \geqslant A - m$ à partir d'un certain rang, d'où $u_n + v_n \geqslant A$. Le même argument montre plus généralement qu'une suite minorée plus une suite qui tend vers $+\infty$ tend vers $+\infty$.

Remarques :

- Une forme indéterminée n'est pas une absence de limite, mais une absence de *règle*. Avec $u_n = n$, les suites $v_n = -n+\ell$, $v_n = -n^2$ et $v_n = -n+(-1)^n$ donnent pour u_n+v_n la limite ℓ, la limite $-\infty$, et aucune limite : il faut chaque fois transformer l'expression, en factorisant le terme prépondérant.
- L'erreur la plus répandue est d'écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ avant d'avoir démontré que cette limite existe. On rédige : « d'après le théorème 4, la suite converge et sa limite vaut... », dans cet ordre.

7.4.4 Limites et inégalités

Théorème 5 : Passage à la limite dans une inégalité large :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

∘ Démonstration : La suite $w_n = v_n - u_n$ converge vers $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ (théorème 4), et $w_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang. Si l'on avait $\ell < 0$, la proposition 7 (ii), appliquée à $(-w_n)$ qui tend vers $-\ell > 0$, donnerait $w_n < 0$ à partir d'un autre rang ; au-delà du maximum des deux rangs, c'est contradictoire. Donc $\ell \geqslant 0$. □

L'inégalité stricte ne passe pas à la limite : $\frac{1}{n+1} > 0$ pour tout n, mais la limite est nulle. Il faut retenir qu'*on passe à la limite dans une inégalité large, et que les inégalités strictes deviennent larges.*

Théorème 6 : Existence d'une limite par comparaison :
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles.

- *Encadrement.* Si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang, et si (v_n) et (w_n) convergent vers *le même* réel ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.
- *Minoration.* Si $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- *Majoration.* Si $u_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

∘ Démonstration : *Encadrement.* Soit $\varepsilon > 0$. À partir d'un certain rang, obtenu comme maximum de trois rangs, on a à la fois $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, $\ell-\varepsilon \leqslant v_n$ et $w_n \leqslant \ell+\varepsilon$, d'où $\ell-\varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell+\varepsilon$. *Minoration.* Pour A réel, on a $u_n \geqslant v_n \geqslant A$ au-delà du maximum de deux rangs. La majoration s'en déduit en changeant les signes. □

Remarque : Le théorème 5 et le théorème 6 ne disent pas la même chose. Le premier *suppose* que les limites existent et les compare ; le second *démontre* qu'une limite existe. L'erreur la plus répandue est d'appliquer le théorème 5 à une suite dont on ne sait pas encore qu'elle converge.

7.4.5 Suites de référence

Proposition 9 : *(Suites géométriques.)* Soit q un réel.

(i) Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$; si $q = 1$, la suite est constante.

(ii) Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

(iii) Si $q \leqslant -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite.

∘ Démonstration : (i) On écrit $q = 1 + x$, avec $x > 0$. D'après la formule du binôme, comme l'annonçait le chapitre 3, $q^n \geqslant 1 + nx$, et $1 + nx \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$; on conclut par minoration. (ii) Le cas $q = 0$ est immédiat. Sinon, $\frac{1}{|q|} > 1$, donc $\frac{1}{|q|^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ d'après (i), et $|q^n - 0| = |q|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après le tableau

des opérations. (iii) On a $q^{2n} \geqslant 1$ et $q^{2n+1} \leqslant -1$ pour tout n. Une limite $+\infty$ ou un réel $\ell > 0$ imposerait $q^n > 0$ à partir d'un certain rang (proposition 7 (ii)), ce que les termes d'indice impair contredisent ; de même pour $-\infty$ ou $\ell < 0$, avec les termes d'indice pair. Enfin, la limite 0 est exclue, puisque $|q^n - 0| \geqslant 1$ pour tout n. □

Proposition 10 : *(Critère du quotient.)* Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. S'il existe un réel $k \in [0\,,1[$ et un rang N tels que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$ pour tout $n \geqslant N$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

∘ Démonstration : Une récurrence immédiate donne $0 < u_n \leqslant u_N\, k^{n-N}$ pour $n \geqslant N$, et le majorant tend vers 0 d'après la proposition 9 ; on conclut par encadrement. □

Théorème 7 : Croissances comparées de suites :
Pour tous réels $\alpha > 0$ et $q > 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

∘ Démonstration : *Première limite.* Pour tout réel $\beta > 0$, la suite $(n^{-\beta})$ tend vers 0 : pour $\varepsilon > 0$, on a $n^{-\beta} \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant \varepsilon^{-1/\beta}$. Comme au chapitre 5, l'inégalité $\ln t \leqslant t - 1 < t$, appliquée à $t = n^{\alpha/2}$, donne $0 \leqslant \frac{\ln n}{n^\alpha} \leqslant \frac{2}{\alpha}\, n^{-\alpha/2}$ pour $n \geqslant 1$, et l'on conclut par encadrement.

Deuxième limite. Soit p un entier tel que $p \geqslant \alpha$; pour $n \geqslant 1$, $0 < \frac{n^\alpha}{q^n} \leqslant \frac{n^p}{q^n} = u_n$, et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{q}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{q} < 1,$$

d'après le théorème 4 appliqué p fois. Avec $k = \frac{1}{2}\big(1 + \frac{1}{q}\big)$, qui vérifie $\frac{1}{q} < k < 1$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$ à partir d'un certain rang, et la proposition 10 donne $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Troisième et quatrième limites. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{q}{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ dès que $n + 1 \geqslant 2q$ pour $u_n = \frac{q^n}{n!}$, et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \leqslant \frac{1}{2}$ pour $u_n = \frac{n!}{n^n}$, puisque $(1 + \frac{1}{n})^n \geqslant 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$ par la formule du binôme. □

Remarque : On retient la hiérarchie $\ln n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n$, chaque suite étant négligeable devant la suivante. Pour $n = 20$, on a $\ln 20 \approx 3$, $20^2 = 400$, $2^{20} \approx 1{,}05 \times 10^6$, $20! \approx 2{,}4 \times 10^{18}$ et $20^{20} \approx 1{,}05 \times 10^{26}$. Le chapitre 10 donnera à ces comparaisons la forme des notations de Landau.

7.5 Suites monotones

7.5.1 Le théorème de la limite monotone

Théorème 8 : Théorème de la limite monotone :
Soit (u_n) une suite réelle croissante.

- Si (u_n) est majorée, elle converge, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Si (u_n) n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$.

De même, une suite décroissante converge vers sa borne inférieure si elle est minorée, et tend vers $-\infty$ sinon.

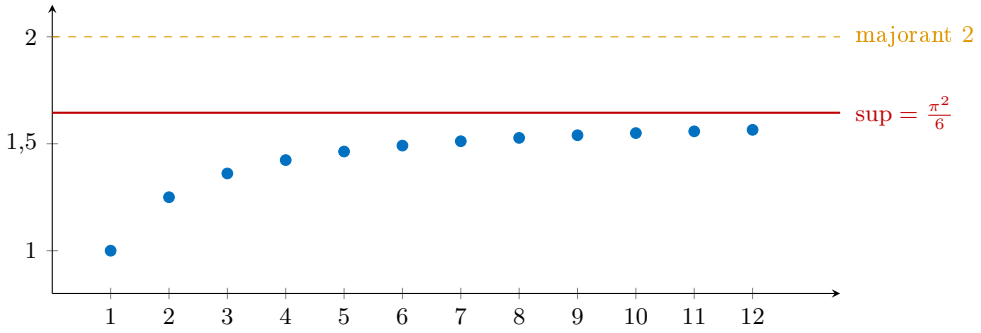
∘ Démonstration : Supposons (u_n) croissante et majorée. La partie $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majorée : elle a une borne supérieure ℓ (théorème 1). Soit $\varepsilon > 0$. D'après la proposition 2, il existe un rang N tel que $u_N > \ell - \varepsilon$. Pour $n \geqslant N$, la croissance et la définition de ℓ donnent

$$\ell - \varepsilon < u_N \leqslant u_n \leqslant \ell, \qquad \text{donc} \qquad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Si (u_n) n'est pas majorée, soit A un réel : il n'est pas un majorant, donc il existe N tel que $u_N > A$, et pour $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N > A$. Le cas décroissant s'obtient en appliquant ce qui précède à $(-u_n)$. □

C'est le théorème qui arrêtait Dedekind en 1858 : sa démonstration tient en quelques lignes, mais elle repose entièrement sur l'axiome de la borne supérieure, et il est faux dans $\mathbb{Q}$. La suite des valeurs décimales

approchées par défaut de $\sqrt{2}$, soit 1, 1,4, 1,41, 1,414..., est une suite croissante et majorée de rationnels, qui n'a pas de limite rationnelle.



Les sommes $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ croissent et restent sous le majorant 2, en orange, ce qui suffit à prouver qu'elles convergent ; leur limite est la borne supérieure, en rouge, dont la valeur $\frac{\pi^2}{6}$ ne sera établie qu'au chapitre 20.

Exemples :

- La majoration $S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$, démontrée par récurrence à l'exercice 19 de la feuille du chapitre 1, montre que (S_n), croissante puisque l'on ajoute des termes positifs, est majorée par 2 : elle converge, et sa limite est inférieure ou égale à 2 par passage à la limite.
- La suite $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est croissante, mais non majorée. En effet, chacun des n termes de $H_{2n} - H_n$ est au moins égal à $\frac{1}{2n}$:

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

d'où, par récurrence, $H_{2^p} \geqslant 1 + \frac{p}{2}$: la suite tend vers $+\infty$. Elle le fait pourtant très lentement, puisque $H_{1000} \approx 7{,}49$.

7.5.2 Suites adjacentes

Définition : Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Théorème 9 : Théorème des suites adjacentes :
Deux suites adjacentes, (u_n) croissante et (v_n) décroissante, convergent vers une même limite ℓ, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

∘ Démonstration : La suite $w_n = v_n - u_n$ est décroissante, comme différence d'une suite décroissante et d'une suite croissante, et elle tend vers 0. Elle est donc positive : si l'on avait $w_N < 0$ pour un rang N, on aurait $w_n \leqslant w_N$ pour $n \geqslant N$, et le passage à la limite donnerait $0 \leqslant w_N < 0$. Ainsi $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ pour tout n : la suite (u_n) est croissante et majorée par v_0, elle converge vers un réel ℓ (théorème 8). Alors $v_n = u_n + w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Enfin, ℓ est la borne supérieure de $\{u_n\}$ et la borne inférieure de $\{v_n\}$, d'où l'encadrement. □

Exemples :

- Les suites $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$, pour $n \geqslant 1$, sont adjacentes. La première est croissante, la différence $v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!}$ tend vers 0, et

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} = -\frac{1}{n(n+1)\,(n+1)!} < 0.$$

  Leur limite commune est e, ce que la formule de Taylor du chapitre 18 établira. Avec $n = 5$, on obtient déjà $2{,}7166 \leqslant \mathrm{e} \leqslant 2{,}7184$, et avec $n = 10$, un encadrement de longueur inférieure à 3×10^{-8} : la convergence est très rapide.

- Pour tout réel x, les valeurs décimales approchées par défaut d_n et par excès $d_n + 10^{-n}$ sont adjacentes. En effet, $10\,\lfloor 10^n x \rfloor$ est un entier inférieur à $10^{n+1}x$, donc à $\lfloor 10^{n+1}x \rfloor$, d'où $d_n \leqslant d_{n+1}$; on montre de même que $(d_n + 10^{-n})$ décroît, et la différence 10^{-n} tend vers 0. Leur limite est x, qui les sépare : *tout réel est limite d'une suite de décimaux.*

Remarque : Le théorème des suites adjacentes est l'outil des encadrements de plus en plus fins. Il donne à la fois l'existence d'une limite, souvent inaccessible directement, et une estimation explicite de l'erreur commise en l'approchant par u_n ou v_n, majorée par $v_n - u_n$. C'est la forme moderne de la méthode qu'Archimède employait pour encadrer π par les périmètres de polygones inscrits et circonscrits.

7.6 Suites extraites

Définition : Soit (u_n) une suite. On appelle **suite extraite** de (u_n), ou **sous-suite**, toute suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, appelée **extractrice**.

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), des termes d'indices pairs et impairs, sont extraites de (u_n), avec $\varphi(n) = 2n$ et $\varphi(n) = 2n+1$. Une extractrice vérifie $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout n, par récurrence : $\varphi(0) \geqslant 0$, et si $\varphi(n) \geqslant n$, alors $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$, donc $\varphi(n+1) \geqslant n+1$, ces nombres étant entiers.

Proposition 11 : Soit (u_n) une suite et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$ pour toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n).

(ii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

∘ Démonstration : On traite le cas où ℓ est réel, les cas infinis étant analogues. (i) Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N$. Pour $n \geqslant N$, on a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$, donc $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon$. (ii) Soit $\varepsilon > 0$, N_1 tel que $|u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N_1$, et N_2 tel que $|u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N_2$. Tout entier $m \geqslant \max(2N_1, 2N_2+1)$ s'écrit $2n$ avec $n \geqslant N_1$, ou $2n+1$ avec $n \geqslant N_2$: dans les deux cas, $|u_m - \ell| \leqslant \varepsilon$. □

♡ **Méthode : Pour montrer qu'une suite diverge**, il suffit d'en extraire deux suites qui ont des limites différentes, ou une suite qui n'a pas de limite.

Exemples :

- La suite $\left((-1)^n\right)$ diverge : ses termes d'indices pairs tendent vers 1, ceux d'indices impairs vers -1.
- La suite $\left(\cos \frac{n\pi}{3}\right)$ diverge : la suite extraite d'indices $6n$ est constante égale à 1, celle d'indices $6n+3$ constante égale à -1.
- La somme alternée $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ converge. En effet, $T_{2n+2} - T_{2n} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0$ et $T_{2n+3} - T_{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4} > 0$, et $T_{2n} - T_{2n+1} = \frac{1}{2n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: les suites (T_{2n+1}) et (T_{2n}) sont adjacentes, de limite commune ℓ, et la proposition 11 (ii) donne $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. L'exercice 25 de la feuille du chapitre 6 a montré que $\ell = \ln 2$.

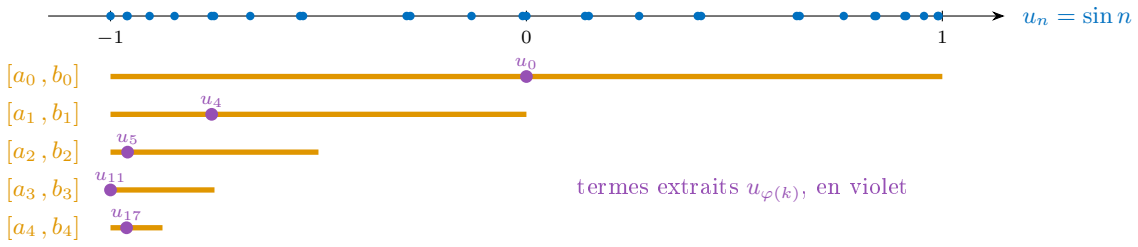
Théorème 10 : Théorème de Bolzano-Weierstrass :
De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

∘ Démonstration : On procède par *dichotomie*. Soit (u_n) une suite bornée, et $a_0 \leqslant b_0$ tels que $u_n \in [a_0\,,b_0]$ pour tout n. On construit par récurrence des segments $[a_k\,,b_k]$ et des indices $\varphi(k)$ tels que

$$b_k - a_k = \frac{b_0-a_0}{2^k}, \qquad u_{\varphi(k)} \in [a_k\,,b_k], \qquad \text{l'ensemble } I_k = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in [a_k\,,b_k]\} \text{ est infini.}$$

On prend $\varphi(0)=0$, et $I_0=\mathbb{N}$ est infini. Supposons la construction faite au rang k, et soit $c = \frac{a_k+b_k}{2}$. Les indices de I_k sont dans l'un au moins des deux ensembles $\{n \mid u_n \in [a_k\,,c]\}$ et $\{n \mid u_n \in [c\,,b_k]\}$, dont l'un est donc infini ; on choisit pour $[a_{k+1}\,,b_{k+1}]$ la moitié correspondante, la gauche si les deux conviennent. L'ensemble I_{k+1} étant infini, il contient un indice $\varphi(k+1) > \varphi(k)$.

Les suites (a_k) et (b_k) sont respectivement croissante et décroissante, et $b_k - a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$: elles sont adjacentes, de limite commune ℓ (théorème 9). Comme $a_k \leqslant u_{\varphi(k)} \leqslant b_k$, le théorème d'encadrement donne $u_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell$, et φ est strictement croissante par construction. □



Pour la suite $(\sin n)$, bornée par 1, la dichotomie retient à chaque étape la moitié gauche du segment précédent, qui contient une infinité de termes ; on y choisit un terme d'indice plus grand que le précédent, en violet. Les segments orange rétrécissent de moitié à chaque étape et forcent les termes extraits u_0, u_4, u_5, u_{11}, u_{17} à converger.

Remarques :

- Le théorème affirme l'existence d'une suite extraite convergente, sans en fournir de construction effective, puisqu'il faut savoir à chaque étape laquelle des deux moitiés contient une infinité de termes. Il n'en est pas moins l'un des outils les plus puissants de l'analyse : le chapitre 8 en déduira qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
- L'hypothèse « bornée » est nécessaire : aucune suite extraite de (n) ne converge, puisque toutes tendent vers $+\infty$.

7.7 Caractérisations séquentielles

Certaines propriétés des parties de $\mathbb{R}$ se traduisent par l'existence de suites ; cette traduction, dite *séquentielle*, permet de remplacer les quantificateurs par des passages à la limite.

Proposition 12 : *(Caractérisation séquentielle de la densité.)* Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

∘ Démonstration : Supposons A dense, et soit x un réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle $\left]x-\frac{1}{n+1}\,,x+\frac{1}{n+1}\right[$ contient un élément a_n de A ; alors $|a_n - x| \leqslant \frac{1}{n+1}$, d'où $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Réciproquement, soit $a<b$, $x = \frac{a+b}{2}$ et (a_n) une suite d'éléments de A qui tend vers x. Avec $\varepsilon = \frac{b-a}{4}$, on a $|a_n - x| \leqslant \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ à partir d'un certain rang : le terme a_n correspondant appartient à $]a\,,b[$. □

D'après le théorème 2, tout réel est donc limite d'une suite de rationnels, et aussi d'une suite d'irrationnels ; les valeurs décimales approchées en fournissent une suite explicite de décimaux.

Proposition 13 : *(Caractérisation séquentielle de la borne supérieure.)* Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$.

(i) Si X est majorée, il existe une suite d'éléments de X qui tend vers $\sup X$. Réciproquement, un majorant M de X qui est limite d'une suite d'éléments de X est égal à $\sup X$.

(ii) Si X n'est pas majorée, il existe une suite d'éléments de X qui tend vers $+\infty$.

On a des résultats analogues pour la borne inférieure.

∘ Démonstration : (i) Pour tout n, la proposition 2 avec $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ fournit $x_n \in X$ tel que

$$\sup X - \frac{1}{n+1} < x_n \leqslant \sup X,$$

et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup X$ par encadrement. Réciproquement, si M majore X et si $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$ avec $x_n \in X$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n tel que $|x_n - M| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $x_n > M - \varepsilon$: la proposition 2 donne $M = \sup X$. (ii) Pour tout n, le réel n ne majore pas X : il existe $x_n \in X$ tel que $x_n > n$, et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par minoration. □

Exemple : Soit $X = \left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. Le réel 1 majore X, et la suite $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ d'éléments de X tend vers 1 : donc $\sup X = 1$. Ce raisonnement est en général plus rapide que la vérification directe de la proposition 2 ; et comme $\frac{n}{n+1} < 1$ pour tout n, la borne supérieure n'est pas atteinte.

7.8 Suites complexes

Une **suite complexe** est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. Les notions qui ne font intervenir que la valeur absolue s'étendent en remplaçant celle-ci par le module : (u_n) est **bornée** s'il existe K tel que $|u_n| \leqslant K$ pour tout n, et elle **tend vers** $\ell \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

L'unicité de la limite, le caractère borné d'une suite convergente, la proposition 8, les opérations sur les limites finies et la proposition 11 restent vrais, avec les mêmes démonstrations, qui n'utilisaient que l'inégalité triangulaire et la multiplicativité du module.

Proposition 14 : Une suite complexe (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Re} u_n = \operatorname{Re} \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Im} u_n = \operatorname{Im} \ell$.

∘ Démonstration : Pour tout complexe z, on a $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$ et $|z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$, comme au chapitre 4. Avec $z = u_n - \ell$, la première inégalité et la proposition 8 donnent le sens direct, et la dernière, avec l'addition des limites, la réciproque. □

Remarques :

- Tout ce qui repose sur l'ordre n'a pas de sens dans $\mathbb{C}$: suites monotones, majorées, théorèmes 5, 6, 8 et 9. On les applique aux parties réelles et imaginaires, ou au module, qui sont des suites réelles.
- Le théorème de Bolzano-Weierstrass reste vrai : si (u_n) est bornée, on extrait de $(\operatorname{Re} u_n)$, qui est bornée, une suite convergente $(\operatorname{Re} u_{\varphi(n)})$; puis de $(\operatorname{Im} u_{\varphi(n)})$ une suite convergente $(\operatorname{Im} u_{\varphi(\psi(n))})$, et la suite $(u_{\varphi(\psi(n))})$ converge d'après la proposition 14, puisque $(\operatorname{Re} u_{\varphi(\psi(n))})$ est extraite d'une suite convergente.
- Pour $q \in \mathbb{C}$, la suite (q^n) tend vers 0 si $|q| < 1$, puisque $|q^n| = |q|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; elle diverge si $|q| > 1$, puisqu'elle n'est pas bornée ; si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, elle diverge aussi, car une limite ℓ vérifierait $\ell = q\ell$ en passant à la limite dans $q^{n+1} = q\,q^n$, d'où $\ell = 0$, ce qui est exclu puisque $|q^n| = 1$.

7.9 Suites particulières

7.9.1 Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques

Une suite (u_n), réelle ou complexe, est **arithmétique** de raison r si $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout n, et alors $u_n = u_0 + nr$; elle est **géométrique** de raison q si $u_{n+1} = q\,u_n$ pour tout n, et alors $u_n = u_0\,q^n$. Leurs sommes ont été calculées au chapitre 3, et la proposition 9 donne la limite de (q^n).

Proposition 15 : *(Suites arithmético-géométriques.)* Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $b \in \mathbb{C}$, et (u_n) une suite telle que $u_{n+1} = a\,u_n + b$ pour tout n. Le nombre $c = \frac{b}{1-a}$ est l'unique solution de l'équation $c = ac + b$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - c = a^n\,(u_0 - c).$$

∘ Démonstration : L'équation $c = ac+b$ équivaut à $(1-a)\,c = b$, qui a l'unique solution annoncée puisque $a \neq 1$. En soustrayant membre à membre $u_{n+1} = au_n + b$ et $c = ac + b$, on obtient $u_{n+1} - c = a(u_n - c)$: la suite $(u_n - c)$ est géométrique de raison a. □

♡ **Méthode : Pour étudier une suite arithmético-géométrique** :

- ► On cherche la suite constante solution, $c = \frac{b}{1-a}$.
- ► On remarque que l'écart $u_n - c$ est géométrique, de raison a, ce qui donne u_n.

Lorsque $|a| < 1$, la suite converge vers c, quel que soit u_0.

Exemple : La suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ a pour point fixe $c = \frac{3}{1-1/2} = 6$, d'où $u_n = 6 - \frac{5}{2^n}$. Elle croît vers 6, et l'écart est divisé par deux à chaque étape : il faut sept itérations pour que u_n soit à moins de 0,05 de sa limite, puisque $\frac{5}{2^7} \approx 0{,}039$. C'est le modèle de toutes les suites qui « s'approchent d'un équilibre », comme un placement à intérêts fixes avec retrait constant, ou la température d'un corps qui se refroidit par paliers.

7.9.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit a et b deux nombres complexes, avec $b \neq 0$. On cherche les suites complexes (u_n) telles que

$$(\mathcal{R}) : \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n.$$

Une telle suite est entièrement déterminée par u_0 et u_1, par récurrence double (chapitre 1) : deux suites qui vérifient $(\mathcal{R})$ et qui coïncident aux rangs 0 et 1 sont égales. Comme au chapitre 6, on cherche des solutions géométriques : la suite (r^n), avec $r \neq 0$, vérifie $(\mathcal{R})$ si et seulement si $r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$ pour tout n, c'est-à-dire si et seulement si r est racine de l'**équation caractéristique**

$$r^2 = a\,r + b.$$

Théorème 11 : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :

- Si l'équation caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2, les suites complexes vérifiant $(\mathcal{R})$ sont les suites
$$u_n = \lambda\,r_1^n + \mu\,r_2^n, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$
- Si elle a une racine double r_0, ce sont les suites $u_n = (\lambda + \mu n)\,r_0^n$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
- Si a et b sont réels et si les racines sont complexes conjuguées $\rho\,\mathrm{e}^{\pm i\theta}$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in]0\,,\pi[$, les suites *réelles* vérifiant $(\mathcal{R})$ sont les suites
$$u_n = \rho^n\big(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)\big), \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

∘ Démonstration : Les racines sont non nulles, puisque leur produit vaut $-b \neq 0$. Dans chaque cas, on montre deux choses : les suites proposées vérifient $(\mathcal{R})$, et l'on peut choisir λ et μ pour obtenir n'importe quelles valeurs de u_0 et u_1. Comme une solution est déterminée par ses deux premiers termes, ces suites sont alors toutes les solutions.

Racines distinctes. Les suites (r_1^n) et (r_2^n) vérifient $(\mathcal{R})$, et leurs combinaisons linéaires aussi, puisque la relation est linéaire. Le système $\lambda + \mu = u_0$, $\lambda r_1 + \mu r_2 = u_1$ a une unique solution, car en substituant $\lambda = u_0 - \mu$ dans la seconde équation, on obtient $\mu\,(r_2 - r_1) = u_1 - r_1 u_0$, avec $r_2 \neq r_1$.

Racine double. On a alors $r_0 = \frac{a}{2}$ et $b = -\frac{a^2}{4} = -r_0^2$, donc $a = 2r_0$. La suite $(n\,r_0^n)$ vérifie $(\mathcal{R})$, car

$$a(n+1)r_0^{n+1} + b\,n\,r_0^n = 2(n+1)r_0^{n+2} - n\,r_0^{n+2} = (n+2)\,r_0^{n+2}.$$

Le système $\lambda = u_0$, $(\lambda + \mu)\,r_0 = u_1$ a une unique solution, puisque $r_0 \neq 0$.

Racines complexes conjuguées, solutions réelles. La suite (r^n), avec $r = \rho e^{i\theta}$, vérifie $(\mathcal{R})$; ses parties réelle et imaginaire $\rho^n \cos(n\theta)$ et $\rho^n \sin(n\theta)$ aussi, puisque a et b sont réels. Le système $\lambda = u_0$, $\rho(\lambda \cos\theta + \mu \sin\theta) = u_1$ a une unique solution réelle, puisque $\rho \sin\theta \neq 0$. Une solution réelle coïncide donc aux rangs 0 et 1 avec une suite de la forme annoncée, et lui est égale. □

Exemples :

- La suite du chapitre 1, définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$, a pour équation caractéristique $r^2 = 5r - 6$, de racines 2 et 3. Donc $u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$, et les conditions $\lambda + \mu = 0$, $2\lambda + 3\mu = 1$ donnent $\mu = 1$ et $\lambda = -1$: on retrouve $u_n = 3^n - 2^n$, que l'on avait dû deviner avant de le démontrer.
- La suite de Fibonacci de la feuille du chapitre 1 (exercice 23), définie par $F_1 = F_2 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, se prolonge par $F_0 = 0$. L'équation $r^2 = r + 1$ a pour racines le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, et les conditions initiales donnent la *formule de Binet*

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$

  Comme $|\psi| < 1$, on en déduit que $\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi^n - \psi^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi$: le quotient de deux termes consécutifs tend vers le nombre d'or.
- L'équation $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ a pour équation caractéristique $r^2 - r + 1 = 0$, de racines $e^{\pm i\pi/3}$: ses solutions réelles sont les $\lambda \cos\frac{n\pi}{3} + \mu \sin\frac{n\pi}{3}$, qui sont périodiques de période 6.

Remarque : Les trois cas du théorème 11 sont exactement ceux du théorème 5 du chapitre 6, la suite (r^n) jouant le rôle de la fonction $x \mapsto e^{rx}$; seule la forme des solutions change, une racine r donnant r^n au lieu de e^{rx}, et une racine double un facteur n au lieu d'un facteur x. Les chapitres 14 et 15 expliqueront cette analogie : dans les deux cas, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

7.9.3 Suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et I une partie de D. On dit que I est **stable par** f si $f(I) \subset I$, c'est-à-dire si $f(x) \in I$ pour tout $x \in I$.

Si I est stable par f et si $u_0 \in I$, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ définit une suite dont tous les termes sont dans I, par récurrence. On a alors $u_n = f^n(u_0)$, avec la notation des itérées du chapitre 2.

Proposition 16 : *(Monotonie.)* Soit I un intervalle stable par f, $u_0 \in I$, et (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

(i) Si $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in I$, la suite (u_n) est croissante ; si $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in I$, elle est décroissante.

(ii) Si f est croissante sur I, la suite (u_n) est monotone : croissante si $u_1 \geqslant u_0$, décroissante si $u_1 \leqslant u_0$.

(iii) Si f est décroissante sur I, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens contraires.

∘ Démonstration : (i) On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, du signe de $f(x) - x$ en $x = u_n \in I$. (ii) Si $u_0 \leqslant u_1$, la croissance de f donne $f(u_0) \leqslant f(u_1)$, soit $u_1 \leqslant u_2$, et par récurrence $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n ; de même dans l'autre cas. (iii) La fonction $f \circ f$ est croissante sur I, qu'elle laisse stable, et $u_{2n+2} = (f \circ f)(u_{2n})$: d'après (ii), (u_{2n}) est monotone, et de même (u_{2n+1}). Si (u_{2n}) est croissante, alors $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$ donne, en appliquant f décroissante, $u_{2n+1} \geqslant u_{2n+3}$: (u_{2n+1}) est décroissante. □

Proposition 17 : *(Point fixe.)* Si la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers un réel ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$: la limite est un **point fixe** de f.

Ce résultat est admis jusqu'au chapitre 8, qui définira la continuité et montrera qu'elle se traduit par l'implication $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \implies f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$; il suffit alors de passer à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, la suite (u_{n+1}) étant extraite de (u_n). Les fonctions usuelles du chapitre 5 sont continues sur leur ensemble de définition.

♡ **Méthode : Pour étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$:**

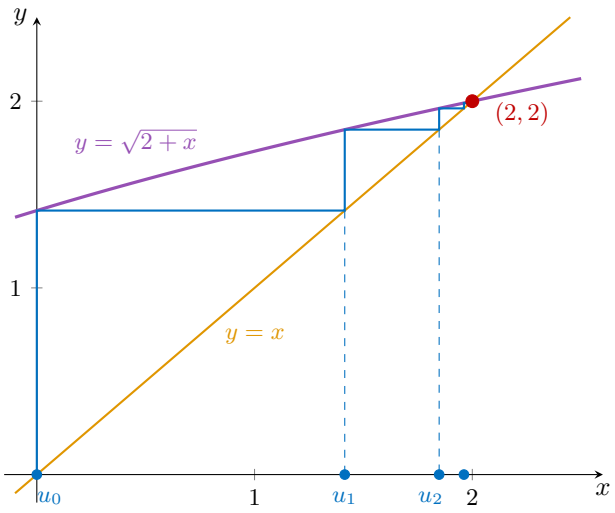
- On cherche un intervalle I stable par f et contenant u_0.
- On étudie la monotonie, par le signe de $f(x) - x$ ou par le sens de variation de f.
- On montre la convergence par le théorème de la limite monotone.
- On identifie la limite parmi les points fixes de f situés dans $\overline{I}$, l'intervalle I complété de ses extrémités.

Pour estimer la vitesse de convergence, on majore $|u_{n+1} - \ell|$ en fonction de $|u_n - \ell|$.

Exemple : Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$, avec $f(x) = \sqrt{2+x}$. L'intervalle $I = [0\,,2]$ est stable, car f est croissante et $f(0) = \sqrt{2}$, $f(2) = 2$. Comme f est croissante et $u_1 = \sqrt{2} \geqslant u_0$, la suite est croissante (proposition 16) ; majorée par 2, elle converge vers un réel $\ell \in [0\,,2]$. Ce réel vérifie $\ell = \sqrt{2+\ell}$, d'où $\ell^2 - \ell - 2 = (\ell-2)(\ell+1) = 0$, et $\ell = 2$. On peut d'ailleurs se passer du résultat admis : en multipliant par la quantité conjuguée,

$$|u_{n+1} - 2| = \left|\sqrt{2+u_n} - 2\right| = \frac{|u_n - 2|}{\sqrt{2+u_n}+2} \leqslant \frac{|u_n-2|}{2},$$

d'où $|u_n - 2| \leqslant \frac{2}{2^n}$ par récurrence, ce qui démontre la convergence vers 2 et donne sa vitesse. Numériquement, $u_4 \approx 1{,}9904$ et $u_6 \approx 1{,}9994$.



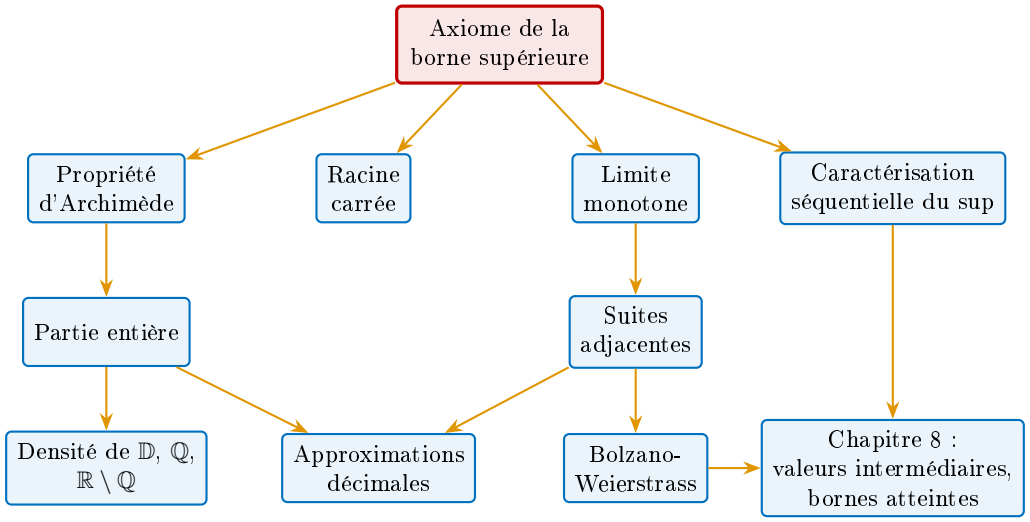
On construit les termes en partant de u_0 sur l'axe des abscisses : on monte verticalement jusqu'à la courbe de f, en violet, ce qui donne u_1 en ordonnée, puis l'on se déplace horizontalement jusqu'à la droite $y = x$, en orange, pour reporter u_1 en abscisse, et l'on recommence. L'escalier bleu converge vers le point d'intersection rouge, qui correspond au point fixe 2.

Remarques :

- La formule $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$ du chapitre 4 montre que $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$: la suite récurrente cache une suite explicite. C'est rarement le cas, et l'étude qualitative de la méthode reste indispensable.
- L'erreur la plus répandue est de résoudre $f(\ell) = \ell$ et d'en conclure que la suite converge. Le point fixe n'est qu'un *candidat* : la suite $u_{n+1} = 2u_n$, avec $u_0 = 1$, tend vers $+\infty$, bien que 0 soit un point fixe de $x \mapsto 2x$. Il faut toujours établir la convergence d'abord.
- Lorsque f est décroissante, la toile d'araignée s'enroule autour du point fixe au lieu de former un escalier. C'est le cas de $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$, avec $u_0 = 1$, dont les termes sont les quotients $\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$ de la suite de Fibonacci, et qui converge vers le nombre d'or.

7.10 Bilan

Tout le chapitre découle de l'axiome de la borne supérieure. Le schéma suivant montre comment les résultats principaux s'enchaînent ; une flèche signifie « sert à démontrer ».



La borne supérieure, en rouge, fournit directement quatre résultats ; toute la théorie des suites, jusqu'au théorème de Bolzano-Weierstrass, passe par la limite monotone, et c'est elle qui permettra au chapitre 8 de démontrer les grands théorèmes sur les fonctions continues.

Pour démontrer qu'une suite converge, on dispose de cinq outils, à choisir selon sa forme :

Forme de la suite	Outil	Référence
somme, produit, quotient de suites connues	opérations sur les limites	théorème 4, tableau des formes indéterminées
expression encadrable	encadrement, majoration $\lvert u_n - \ell\rvert \leqslant v_n$	théorème 6, proposition 8
suite monotone, somme de termes positifs	limite monotone	théorème 8
deux suites qui s'encadrent	suites adjacentes	théorème 9
récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$	intervalle stable, monotonie, point fixe	propositions 16 et 17

Pour démontrer qu'une suite diverge, on en extrait deux suites de limites différentes (proposition 11), ou l'on montre qu'elle n'est pas bornée (proposition 7).