Chapitre 8

Limites et continuité

8.1 Introduction historique

[...] cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont [...] de dérivées.

Charles Hermite - *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, Gauthier-Villars, 1905

8.1.1 Ce que voit l'œil

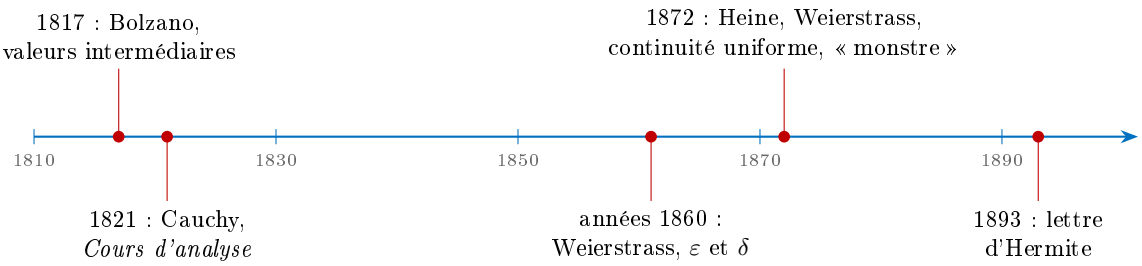
Pendant tout le XVIII^{e} siècle, une fonction continue est une courbe que l'on trace sans lever le crayon, et personne ne songe à démontrer qu'une telle courbe, passant d'un côté à l'autre d'une droite, doit la couper. En 1817, à Prague, **Bernard Bolzano** publie pourtant une « démonstration purement analytique » de ce fait : entre deux valeurs qui donnent des résultats de signes opposés, l'équation possède au moins une racine réelle. Il refuse d'appuyer un énoncé d'analyse sur l'intuition du mouvement ou de la figure.

8.1.2 Ce que dit le calcul

Dans son *Cours d'analyse* de l'École polytechnique, en 1821, **Augustin-Louis Cauchy** déclare une fonction continue lorsqu'un accroissement infiniment petit de la variable produit un accroissement infiniment petit de la fonction. Il reste à dire ce qu'est un infiniment petit : c'est ce que fait **Karl Weierstrass** dans ses cours de Berlin des années 1860, en traduisant ces phrases par des inégalités entre un ε et un δ. En 1872, **Eduard Heine** dégage dans le même langage la notion de continuité uniforme.

8.1.3 Ce que l'œil ne voit pas

La même année 1872, Weierstrass présente à l'Académie de Berlin une fonction continue qui n'est dérivable en aucun point : sa courbe, d'un seul tenant, n'a nulle part de tangente. Vingt ans plus tard, dans une lettre à Thomas Stieltjes du 20 mai 1893, Hermite en parle encore avec effroi. Ces « monstres » achèvent de convaincre que l'intuition ne suffit pas ; ce chapitre définit limites et continuité par des inégalités, puis démontre à partir de la borne supérieure du chapitre 7 les trois grands théorèmes : valeurs intermédiaires, bornes atteintes, continuité uniforme sur un segment.



8.2 Limite d'une fonction en un point

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Le cadre est celui des suites du chapitre 7, avec une différence essentielle : la variable n ne pouvait tendre que vers $+\infty$, alors que x peut tendre vers un réel ou vers $\pm\infty$. Il faut d'abord dire vers quels points il est raisonnable de faire tendre x : ce sont les points adhérents à I.

8.2.1 Voisinages et points adhérents

Définition : Un **voisinage** d'un réel a est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle $[a-\delta\,,a+\delta]$, avec $\delta>0$; un voisinage de $+\infty$ est une partie qui contient un intervalle $[A\,,+\infty[$, et un voisinage de $-\infty$ une partie qui contient un intervalle $]-\infty\,,A]$, avec $A\in\mathbb{R}$. Une propriété portant sur f est vraie **au voisinage de** a si elle est vraie sur $V\cap I$ pour un certain voisinage V de a.

Être vrai au voisinage de $+\infty$ prolonge la notion d'« à partir d'un certain rang » du chapitre 7. L'intersection de deux voisinages de a en est encore un : si deux propriétés sont vraies au voisinage de a, leur conjonction l'est aussi.

Définition : Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $a\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. On dit que a est un **point adhérent** à D si tout voisinage de a rencontre D. Pour a réel, cela s'écrit

$$\forall\delta>0,\quad [a-\delta\,,a+\delta]\cap D\neq\varnothing,$$

et $+\infty$ est adhérent à D si et seulement si D n'est pas majorée.

Un point adhérent à D est un point dont on peut s'approcher autant que l'on veut en restant dans D, sans qu'il appartienne nécessairement à D : le réel 0 est adhérent à $]0\,,1]$, et la borne supérieure d'une partie non vide majorée lui est adhérente, d'après la caractérisation de la borne supérieure (chapitre 7, proposition 2). Tout élément de D est évidemment adhérent à D.

Proposition 1 : Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a\in\overline{\mathbb{R}}$.

(i) *(Caractérisation séquentielle.)* Le point a est adhérent à D si et seulement s'il est limite d'une suite d'éléments de D.

(ii) Les points adhérents à l'intervalle I sont les éléments de I et ses extrémités, finies ou infinies.

∘ Démonstration :

▷ *(i) Sens direct.* Supposons a adhérent à D. Si a est réel, l'ensemble $[a-\frac{1}{n+1}\,,a+\frac{1}{n+1}]\cap D$ n'est pas vide pour tout $n\in\mathbb{N}$; on y choisit un élément x_n. Alors

$$|x_n-a|\leqslant\frac{1}{n+1},\qquad\text{donc}\qquad x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}a.$$

Si $a=+\infty$, on choisit x_n dans $[n\,,+\infty[\cap D$, et l'inégalité $x_n\geqslant n$ donne $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$; on procède de même si $a=-\infty$.

▷ *(i) Réciproque.* Si (x_n) est une suite d'éléments de D qui tend vers a, tout voisinage de a contient x_n à partir d'un certain rang : il rencontre donc D.

▷ *(ii) Les éléments et les extrémités de I sont adhérents.* Notons $\alpha\leqslant\beta$ les extrémités de I, dans $\overline{\mathbb{R}}$. Les éléments de I sont adhérents à I. Si β est réel, c'est la borne supérieure de I, qui lui est adhérente comme on l'a vu avant l'énoncé ; si $\beta=+\infty$, l'intervalle I n'est pas majoré et $+\infty$ lui est adhérent. On raisonne de même pour α.

▷ *(ii) Il n'y en a pas d'autre.* Soit a un réel qui n'est ni dans I ni une extrémité de I : alors $a>\beta$ ou $a<\alpha$. Dans le premier cas, β est réel ; posons $\delta=\frac{a-\beta}{2}$. L'intervalle $[a-\delta\,,a+\delta]$ est contenu dans $]\beta\,,+\infty[$, et ne rencontre donc pas $I\subset]-\infty\,,\beta]$. Le second cas est symétrique. Enfin, si $+\infty$ est adhérent à I, l'intervalle I n'est pas majoré, et $+\infty$ est son extrémité droite. □

Le point (i) relie cette notion aux suites du chapitre 7 : la caractérisation séquentielle de la densité (chapitre 7, proposition 12) affirme exactement qu'une partie de $\mathbb{R}$ est dense si et seulement si tout réel lui est adhérent. Le point (ii) montre que, pour un intervalle, la notion n'a rien de mystérieux : les points adhérents à $]1\,,+\infty[$ sont les réels de $[1\,,+\infty[$ et $+\infty$. Elle s'applique cependant à toute partie de $\mathbb{R}$, ce dont on aura besoin pour les limites à gauche et à droite, où l'on regarde une moitié de I seulement.

Dans toute la suite, a désigne un point adhérent à I. Les fonctions considérées sont définies sur I, ou sur I privé de a lorsque $a\in I$; les énoncés valent dans les deux cas, en remplaçant I par $I\setminus\{a\}$, auquel a reste adhérent puisque I n'est pas réduit à un point.

8.2.2 Définition de la limite

Définition : Soit f une fonction définie sur I, a un point adhérent à I et ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. On dit que f **tend vers ℓ en a**, ou que f admet ℓ pour **limite** en a, si

pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage W de a tel que $f(W \cap I) \subset V$.

Cette définition unique recouvre neuf situations, selon que a et ℓ sont réels, égaux à $+\infty$ ou à $-\infty$; on traduit chacune avec des quantificateurs en explicitant les voisinages. Les trois plus fréquentes sont, pour a et ℓ réels,

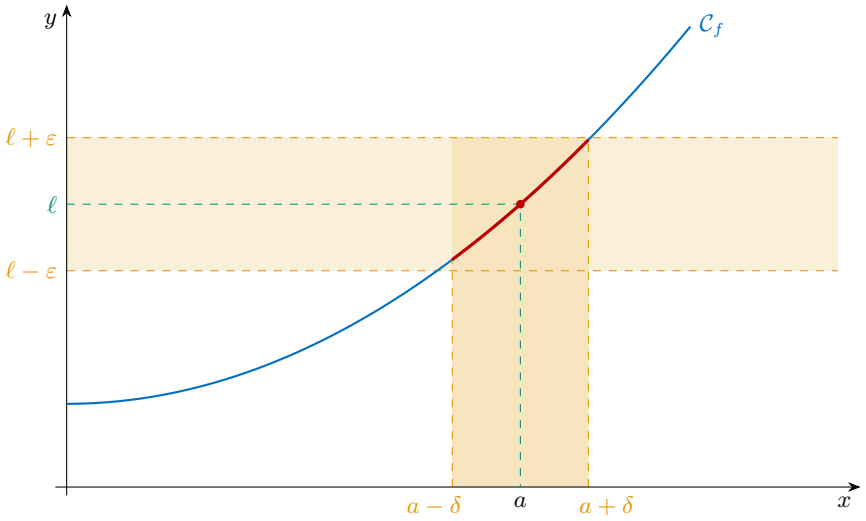
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon,$$

puis, pour une limite finie ℓ en $+\infty$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \geqslant A \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon,$$

et enfin, pour une limite égale à $+\infty$ en un réel a,

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \delta \implies f(x) \geqslant M.$$



Une fois choisie la bande horizontale de demi-largeur ε, en orange clair, on trouve une bande verticale de demi-largeur δ dans laquelle la courbe, tracée en rouge, reste entièrement dans la première. Le réel δ dépend de ε : plus la bande horizontale est étroite, plus il faut resserrer la bande verticale.

Remarques :

- Les inégalités larges ou strictes, $|x-a| \leqslant \delta$ ou $|x-a| < \delta$, donnent des définitions équivalentes, comme pour les suites : il suffit de remplacer δ par $\frac{\delta}{2}$ dans un sens.
- L'erreur la plus répandue consiste à faire dépendre δ de x. Le réel δ est choisi après ε, mais avant x : il doit convenir pour tous les x de l'intervalle $[a-\delta\,,a+\delta]$ à la fois.
- Une suite est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, et la définition de la limite d'une suite du chapitre 7 est exactement celle d'une limite en $+\infty$, où l'on se restreint aux entiers.

Exemple : Montrons que $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ tend vers $\frac{1}{2}$ en 2, sur $I =]0\,,+\infty[$. Pour $x \in [1\,,3]$, on a

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right| = \frac{|x-2|}{2x} \leqslant \frac{|x-2|}{2}.$$

Soit $\varepsilon > 0$; posons $\delta = \min(1, 2\varepsilon)$. Si $|x-2| \leqslant \delta$, alors $x \in [1\,,3]$ et $|f(x)-\frac{1}{2}| \leqslant \frac{\delta}{2} \leqslant \varepsilon$. La restriction $\delta \leqslant 1$ sert seulement à tenir x loin de 0, là où le dénominateur $2x$ deviendrait petit : c'est la démarche habituelle, qui consiste à se placer d'abord sur un voisinage commode.

8.2.3 Premières propriétés

Proposition 2 : *(Unicité de la limite.)* Si f admet une limite en a, elle est unique ; on la note $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, et l'on écrit aussi $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

∘ Démonstration : Supposons que f tende vers ℓ et vers ℓ' en a, avec $\ell \neq \ell'$.

▷ *Deux voisinages disjoints.* Deux éléments distincts de $\overline{\mathbb{R}}$ ont des voisinages disjoints V et V' : par exemple, pour ℓ et ℓ' réels, les intervalles de centres ℓ et ℓ' et de rayon $\frac{|\ell-\ell'|}{3}$.

▷ *Contradiction.* Par définition de la limite, il existe des voisinages W et W' de a tels que

$$f(W\cap I)\subset V \qquad \text{et} \qquad f(W'\cap I)\subset V'.$$

Or $W\cap W'$ est un voisinage de a, qui rencontre I puisque a est adhérent à I. Pour x dans $W\cap W'\cap I$, le réel $f(x)$ appartiendrait à $V\cap V'=\varnothing$, ce qui est absurde. □

Comme au chapitre 7, l'égalité $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ écrite dans un énoncé affirme à la fois que f admet une limite en a et que cette limite vaut ℓ ; la flèche est réservée à la conclusion d'un calcul.

Proposition 3 : Si f est définie en a et admet une limite ℓ en a, alors $\ell = f(a)$.

∘ Démonstration : Le point a appartient à I et à tout voisinage W de a : la condition $f(W\cap I)\subset V$ impose donc $f(a)\in V$ pour tout voisinage V de ℓ.

▷ *Si $\ell=\pm\infty$,* c'est impossible, puisque le réel $f(a)$ n'appartient pas au voisinage $[|f(a)|+1\,,+\infty[$ de $+\infty$, ni à son symétrique, voisinage de $-\infty$.

▷ *Si ℓ est réel,* on obtient $|f(a)-\ell|\leqslant\varepsilon$ pour tout $\varepsilon>0$, donc $f(a)=\ell$. □

Cette proposition explique pourquoi l'on étudie souvent la limite de f en un point où elle n'est pas définie : en un point où f est définie, la seule limite possible est $f(a)$, et la question devient celle de la continuité, objet de la section suivante.

Proposition 4 : Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

∘ Démonstration : Avec $\varepsilon=1$, il existe un voisinage W de a sur lequel $|f(x)-\ell|\leqslant 1$, donc $|f(x)|\leqslant|\ell|+1$ pour tout $x\in W\cap I$. □

8.2.4 Limites à gauche et à droite

Définition : Soit a un réel adhérent à $I\cap]-\infty\,,a[$. On dit que f admet ℓ pour **limite à gauche** en a si la restriction de f à $I\cap]-\infty\,,a[$ tend vers ℓ en a ; on note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\ell$, ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\ell$. On définit de même la **limite à droite**, en restreignant f à $I\cap]a\,,+\infty[$.

Pour a et ℓ réels, la limite à gauche s'écrit donc

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in I,\quad a-\delta\leqslant x<a \implies |f(x)-\ell|\leqslant\varepsilon.$$

Proposition 5 : Soit a un réel intérieur à I, c'est-à-dire un élément de I distinct de ses extrémités.

(i) Si f est définie sur $I\setminus\{a\}$, alors f admet une limite ℓ en a si et seulement si f admet ℓ pour limite à gauche et à droite en a.

(ii) Si f est définie sur I, alors f admet une limite en a si et seulement si ses limites à gauche et à droite en a existent et sont égales à $f(a)$.

∘ Démonstration :

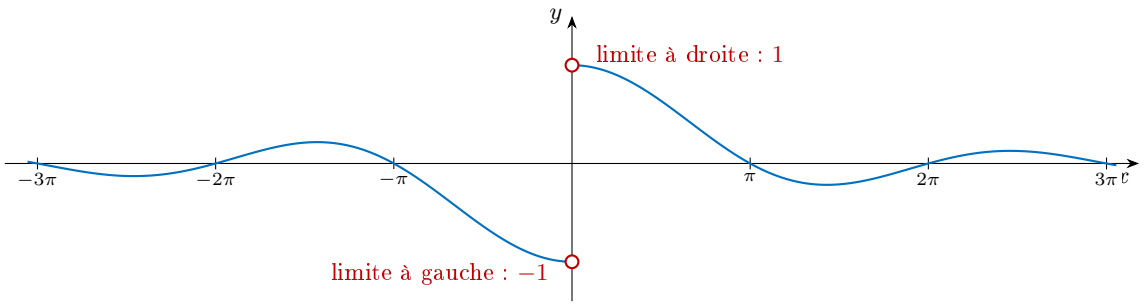
▷ *Sens direct.* Il est clair dans les deux cas : une restriction d'une fonction qui tend vers ℓ tend encore vers ℓ.

▷ *Réciproque.* Soit V un voisinage de ℓ. Il existe deux voisinages W_1 et W_2 de a tels que

$$f(x)\in V \quad \text{pour } x\in W_1\cap I,\ x<a, \qquad \text{et} \qquad f(x)\in V \quad \text{pour } x\in W_2\cap I,\ x>a.$$

Pour x dans le voisinage $W_1 \cap W_2$ de a, distinct de a, on a donc $f(x) \in V$; dans le cas (ii), on a aussi $f(a) = \ell \in V$. □

Exemple : La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{|x|}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, vaut $\frac{\sin x}{x}$ pour $x > 0$ et $-\frac{\sin x}{x}$ pour $x < 0$. On verra à la fin de cette section que $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 en 0 ; ainsi f admet pour limite 1 à droite et -1 à gauche en 0, et elle n'a pas de limite en 0.



La courbe arrive sur l'axe des ordonnées par deux points différents, laissés vides car f n'est pas définie en 0 : les deux limites latérales existent, mais elles diffèrent, et la proposition 5 interdit l'existence d'une limite.

8.2.5 Caractérisation séquentielle

Théorème 1 : Caractérisation séquentielle de la limite :
Soit f définie sur I, a un point adhérent à I et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors f tend vers ℓ en a si et seulement si

pour toute suite (x_n) d'éléments de I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.

∘ Démonstration :

▷ *Sens direct.* Supposons que f tende vers ℓ en a, et soit (x_n) une suite d'éléments de I qui tend vers a. Soit V un voisinage de ℓ ; il existe un voisinage W de a tel que $f(W \cap I) \subset V$. Comme $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, on a $x_n \in W$ à partir d'un certain rang, donc $f(x_n) \in V$ à partir de ce rang : c'est dire que $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

▷ *Réciproque, par contraposée.* Traitons le cas où a et ℓ sont réels, les autres se traitant de même. Supposons que f ne tende pas vers ℓ : il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, on trouve $x \in I$ avec $|x - a| \leqslant \delta$ et $|f(x) - \ell| > \varepsilon$. Appliquons cette propriété à $\delta = \frac{1}{n+1}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$: on obtient un $x_n \in I$ tel que

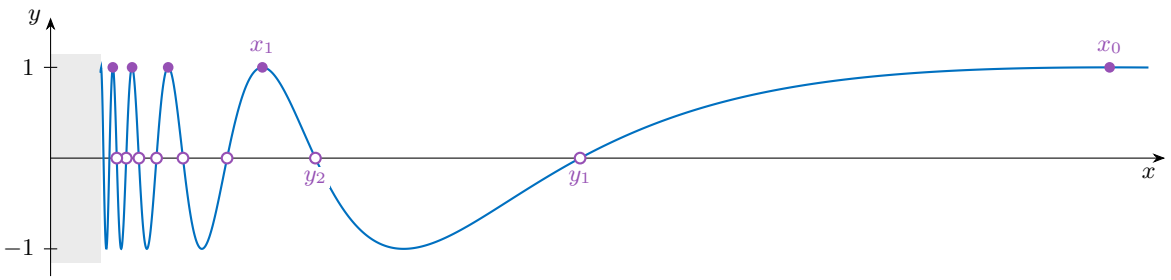
$$|x_n - a| \leqslant \frac{1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad |f(x_n) - \ell| > \varepsilon.$$

La suite (x_n) tend vers a, mais $(f(x_n))$ ne tend pas vers ℓ. □

Ce théorème est le pont entre les deux chapitres : il permet de transférer aux fonctions, presque sans effort, tous les résultats du chapitre 7 sur les suites. Il sert aussi dans l'autre sens, pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite.

♡ **Méthode : Pour montrer que f n'a pas de limite en a**, on construit deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de I qui tendent vers a et telles que $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ aient des limites différentes, ou une suite (x_n) telle que $(f(x_n))$ n'ait pas de limite.

Exemple : La fonction $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0. Les suites de termes $x_n = \frac{1}{2n\pi+\pi/2}$ et $y_n = \frac{1}{n\pi}$, pour $n \geqslant 1$, tendent vers 0 ; or $\sin\frac{1}{x_n} = 1$ et $\sin\frac{1}{y_n} = 0$ pour tout n. Les deux suites images, constantes, ont des limites différentes.



Près de 0, la courbe oscille de plus en plus vite entre -1 et 1, au point que le tracé devient impossible dans la zone grisée. Les points pleins, d'ordonnée 1, et les points vides, d'ordonnée 0, s'accumulent tous vers l'origine.

8.2.6 Opérations sur les limites

Théorème 2 : Opérations sur les limites :
Soit f et g deux fonctions définies sur I qui tendent vers des réels ℓ et ℓ' en a, et λ, μ deux réels. Alors

$$\lim_{x\to a}\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big) = \lambda\ell+\mu\ell' \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = \ell\ell'.$$

Si de plus $\ell' \neq 0$, alors g ne s'annule pas au voisinage de a, et $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$. Les règles du chapitre 7 sur les limites infinies et le tableau des formes indéterminées s'appliquent sans changement.

∘ Démonstration :

▷ *Combinaison linéaire et produit.* Soit (x_n) une suite d'éléments de I qui tend vers a. D'après le théorème 1, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $g(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$; le théorème 4 du chapitre 7 donne alors

$$\lambda f(x_n)+\mu g(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\ell+\mu\ell' \qquad \text{et} \qquad f(x_n)g(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\ell'.$$

Ceci valant pour toute suite, le théorème 1 conclut.

▷ *Quotient.* La définition de la limite, avec $\varepsilon = \frac{|\ell'|}{2}$, fournit un voisinage W de a sur lequel $|g(x)-\ell'| \leqslant \frac{|\ell'|}{2}$, d'où $|g(x)| \geqslant \frac{|\ell'|}{2} > 0$. Sur $W\cap I$, on raisonne comme précédemment avec les suites, par le même théorème du chapitre 7. □

Théorème 3 : Composition des limites :
Soit f définie sur I et à valeurs dans un intervalle J, et g définie sur J. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} g\big(f(x)\big) = \ell$.

∘ Démonstration : Le point b est adhérent à J d'après la proposition 1, car il est limite de la suite $(f(x_n))$ d'éléments de J dès que (x_n) est une suite de I qui tend vers a, une telle suite existant par la même proposition. Soit une telle suite : $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$ par le théorème 1, puis $g(f(x_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ par le même théorème appliqué à g. On conclut encore par le théorème 1. □

Remarques :

- C'est ce théorème qui justifie le changement de variable dans les calculs de limites : pour étudier $x\sin\frac{1}{x}$ en $+\infty$, on pose $u = \frac{1}{x}$, qui tend vers 0, et l'on se ramène à la limite de $\frac{\sin u}{u}$ en 0.
- Le théorème 1 fait de même pour les suites : si $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et si f tend vers ℓ en a, alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Par exemple, $n\sin\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

8.2.7 Limites et inégalités

Théorème 4 : Passage à la limite dans les inégalités :
Soit f et g deux fonctions qui admettent des limites ℓ et ℓ' en a. Si $f \leqslant g$ au voisinage de a, alors $\ell \leqslant \ell'$.

∘ Démonstration : Soit W un voisinage de a sur lequel $f \leqslant g$, et (x_n) une suite d'éléments de I qui tend vers a : il en existe d'après la proposition 1. À partir d'un certain rang, $x_n \in W$, donc $f(x_n) \leqslant g(x_n)$. Le passage à la limite dans les inégalités pour les suites (chapitre 7, théorème 5) donne $\ell \leqslant \ell'$. □

Comme pour les suites, les inégalités strictes ne passent pas à la limite : $-x^2 < x^2$ pour $x \neq 0$, mais ces deux fonctions ont la même limite 0 en 0.

Théorème 5 : Encadrement et comparaison :

(i) Si $g \leqslant f \leqslant h$ au voisinage de a, et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$, avec ℓ réel, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

(ii) Si $g \leqslant f$ au voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$; si $f \leqslant h$ au voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

∘ Démonstration : Soit (x_n) une suite d'éléments de I qui tend vers a. À partir d'un certain rang, $g(x_n) \leqslant f(x_n) \leqslant h(x_n)$, et le théorème 6 du chapitre 7, sur les suites, donne $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$; le théorème 1 conclut. Le point (ii) se démontre de la même façon. □

L'existence de la limite de f fait partie de la conclusion, contrairement au théorème 4 où elle est supposée : c'est ce qui rend l'encadrement si utile. Le chapitre 5 l'a employé sous sa forme lycéenne, en annonçant sa justification : il est désormais démontré.

Exemple :

Montrons que $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. D'après la proposition 5 du chapitre 4, on a $\sin x < x < \tan x$ pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$; en divisant par $\sin x > 0$, puis en passant aux inverses,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Ces inégalités restent vraies pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, par parité des trois membres. Par ailleurs, $0 \leqslant 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \leqslant \frac{x^2}{2}$, en utilisant l'inégalité $|\sin u| \leqslant |u|$ du même chapitre, et l'encadrement donne $\cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. Un second encadrement conclut. Cette limite, admise depuis le chapitre 2, est le taux d'accroissement du sinus en 0 : elle exprime que la dérivée du sinus en 0 vaut $\cos 0 = 1$.

8.2.8 Théorème de la limite monotone

Théorème 6 : Limite monotone :
Soit $a < b$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction croissante sur $]a, b[$.

(i) Si f est majorée, elle admet en b une limite finie, égale à $\sup\limits_{]a,b[} f$; sinon, elle tend vers $+\infty$ en b.

(ii) Si f est minorée, elle admet en a une limite finie, égale à $\inf\limits_{]a,b[} f$; sinon, elle tend vers $-\infty$ en a.

On a des énoncés symétriques pour une fonction décroissante.

∘ Démonstration :

▷ *Cas où f est majorée.* Notons $M = \sup_{]a,b[} f$, qui existe par l'axiome de la borne supérieure, et soit $\varepsilon > 0$. Par la caractérisation de la borne supérieure (chapitre 7, proposition 2), il existe $c \in]a, b[$ tel que $M - \varepsilon < f(c) \leqslant M$. Pour tout $x \in [c, b[$, la croissance de f donne

$$M - \varepsilon < f(c) \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Or $[c\,,b[$ est l'intersection de $]a\,,b[$ avec un voisinage de b : c'est $[c\,,+\infty[$ si $b=+\infty$, et $[2c-b\,,2b-c]$, de centre b, si b est réel. Ainsi f tend vers M en b.

▷ *Cas où f n'est pas majorée.* Pour tout réel A, il existe c tel que $f(c)>A$, et $f(x)\geqslant f(c)>A$ pour $x\in[c\,,b[$: f tend vers $+\infty$ en b.

▷ *Point (ii).* Il s'obtient en appliquant (i) à $x\mapsto -f(-x)$, croissante sur $]-b\,,-a[$. □

C'est la version fonctionnelle du théorème de la limite monotone des suites (chapitre 7, théorème 8), et sa démonstration est la même. Appliqué de part et d'autre d'un point intérieur, il donne la conséquence suivante.

Proposition 6 : Si f est croissante sur I et si c est un point intérieur à I, alors f admet en c une limite à gauche et une limite à droite finies, et

$$\lim_{x\to c^-} f(x)\leqslant f(c)\leqslant \lim_{x\to c^+} f(x).$$

∘ Démonstration : Sur $I\cap]-\infty\,,c[$, la fonction f est croissante et majorée par $f(c)$; le théorème 6 donne une limite à gauche finie, inférieure à $f(c)$ par le théorème 4. On raisonne de même à droite. □

Une fonction monotone ne peut donc présenter que des discontinuités « par saut », comme la partie entière en chaque entier ; cette remarque sera décisive pour le théorème de la bijection continue.

8.3 Continuité en un point

8.3.1 Définition

Définition : Soit f une fonction définie sur I et $a\in I$. On dit que f est **continue en** a si f admet une limite en a, nécessairement égale à $f(a)$ d'après la proposition 3 ; autrement dit,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in I,\quad |x-a|\leqslant\delta\implies|f(x)-f(a)|\leqslant\varepsilon.$$

On dit que f est **continue sur** I si elle est continue en tout point de I ; on note $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, ou $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$, l'ensemble de ces fonctions. On définit de même la **continuité à gauche** et la **continuité à droite** en a, à l'aide des limites latérales.

La continuité en a signifie que l'on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$ en prenant x suffisamment proche de a : un petit écart sur la variable ne produit qu'un petit écart sur la valeur, ce que Cauchy exprimait avec des infiniment petits. La traduction de la proposition 5 est immédiate.

Proposition 7 : Soit a un point intérieur à I. La fonction f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

Exemple : La partie entière est continue en tout point non entier x, puisqu'elle est constante, égale à $\lfloor x\rfloor$, sur l'intervalle $]\lfloor x\rfloor\,,\lfloor x\rfloor+1[$ qui est un voisinage de x. En un entier n, elle vaut n sur $[n\,,n+1[$ et $n-1$ sur $[n-1\,,n[$: elle est continue à droite, mais sa limite à gauche vaut $n-1\neq n$, et elle n'est pas continue à gauche. Elle présente en chaque entier un saut de hauteur 1, conformément à la proposition 6 puisqu'elle est croissante.

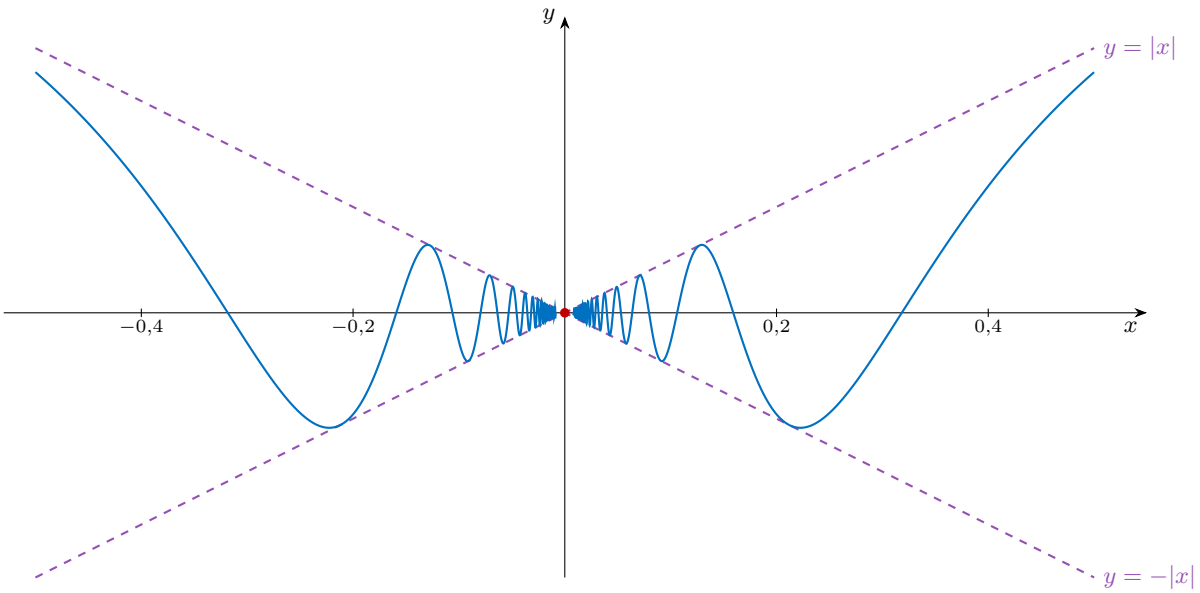
8.3.2 Prolongement par continuité

Définition : Soit $a\in I$ et f une fonction définie sur $I\setminus\{a\}$, qui admet une limite finie ℓ en a. La fonction $\tilde f$ définie sur I par $\tilde f(x)=f(x)$ pour $x\neq a$, et $\tilde f(a)=\ell$, est continue en a ; on l'appelle le **prolongement par continuité** de f en a.

Par définition, $\tilde f$ tend vers $\ell=\tilde f(a)$ en a, et c'est le seul prolongement de f continu en a : la valeur en a d'un prolongement continu est imposée par la proposition 3. Dans la pratique, on note souvent encore f le prolongement.

Exemples :

- La fonction sinus cardinal, $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, se prolonge par continuité en 0 en lui donnant la valeur 1. C'est le choix fait au chapitre 2, qui est donc le seul prolongement continu.
- La fonction $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0, puisque $|x \sin \frac{1}{x}| \leqslant |x|$ et que $|x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$: c'est un encadrement. En revanche, $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 et n'admet aucun prolongement continu en 0, quelle que soit la valeur choisie.



La courbe oscille indéfiniment, mais elle reste coincée entre les deux droites en violet, qui se rejoignent à l'origine : c'est la situation d'encadrement du théorème 5, et la valeur 0, en rouge, est la seule qui prolonge la fonction par continuité.

8.3.3 Caractérisation séquentielle et opérations

Théorème 7 : Caractérisation séquentielle de la continuité :
La fonction f est continue en $a \in I$ si et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de I,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a).$$

C'est le théorème 1 avec $\ell = f(a)$. On dit qu'une fonction continue *commute avec la limite*, au sens où $f\big(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\big) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$. La proposition 17 du chapitre 7, admise jusqu'ici, en découle aussitôt.

Proposition 8 : *(Point fixe, chapitre 7.)* Soit $f : I \to I$ et (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers un réel $\ell \in I$ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.

∘ Démonstration : La suite (u_{n+1}), extraite de (u_n), tend vers ℓ (chapitre 7, proposition 11). Par continuité de f en ℓ, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$ d'après le théorème 7. Les suites (u_{n+1}) et $(f(u_n))$ sont égales, et l'unicité de la limite donne $f(\ell) = \ell$. □

L'hypothèse $\ell \in I$ n'est pas automatique : la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ reste dans $I =]0, 1]$, mais sa limite 0 n'appartient pas à I. Il faut alors, comme le recommandait la méthode du chapitre 7, prolonger f par continuité aux extrémités de I avant d'identifier la limite.

Proposition 9 : *(Opérations.)* Soit f et g deux fonctions définies sur I et continues en $a \in I$, et λ, μ deux réels.

(i) Les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg sont continues en a, ainsi que $\frac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$.

(ii) Si f est à valeurs dans un intervalle J, et si $h : J \to \mathbb{R}$ est continue en $f(a)$, alors $h \circ f$ est continue en a.

Ce sont les théorèmes 2 et 3 avec $\ell = f(a)$, $\ell' = g(a)$ et $b = f(a)$. En particulier, $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire et par produit ; le chapitre 14 dira que c'est un espace vectoriel. Les fonctions constantes et l'identité sont continues, avec $\delta = \varepsilon$ pour la seconde ; il en résulte que les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$, et les fractions rationnelles sur leur ensemble de définition.

Exemple : Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tous réels x et a, la formule de factorisation du chapitre 4 et l'inégalité $|\sin u| \leqslant |u|$ donnent

$$|\sin x - \sin a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \leqslant 2 \times \frac{|x-a|}{2} = |x-a|,$$

et l'on prend $\delta = \varepsilon$ dans la définition ; on procède de même pour le cosinus. La tangente est alors continue sur son ensemble de définition, comme quotient.

Proposition 10 : Si f est dérivable en a, au sens où son taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie $f'(a)$ en a, alors f est continue en a.

∘ Démonstration : Pour $x \neq a$, on écrit $f(x) = f(a) + (x-a)\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$: le produit tend vers $0 \times f'(a) = 0$ par le théorème 2, et $f(x)$ tend vers $f(a)$. □

Le chapitre 9 étudiera la dérivabilité pour elle-même ; la proposition 10 suffit déjà à établir que toutes les fonctions usuelles du chapitre 5, dérivables sur leur ensemble de définition, sauf les racines et les arcs sinus et cosinus aux bornes, y sont continues. Aux bornes, on vérifie directement la continuité : par exemple, $\sqrt{x} \leqslant \varepsilon$ dès que $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon^2$, ce qui donne la continuité de la racine carrée en 0. La réciproque de la proposition 10 est fausse : la valeur absolue est continue en 0 sans y être dérivable, et la fonction de Weierstrass de l'introduction n'est dérivable nulle part.

8.3.4 Deux fonctions sans continuité

Exemple : L'indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$, qui vaut 1 sur les rationnels et 0 sur les irrationnels, n'est continue en aucun point. Soit $a \in \mathbb{R}$. D'après la proposition 12 et le théorème 2 du chapitre 7, il existe une suite (r_n) de rationnels et une suite (s_n) d'irrationnels qui tendent vers a ; or $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(r_n) = 1$ et $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(s_n) = 0$ pour tout n, et les deux limites ne peuvent être égales à $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(a)$. Le théorème 7 interdit la continuité en a. Cette fonction, dite de Dirichlet, est impossible à représenter : rationnels et irrationnels sont trop intimement mêlés.

Exemple : La fonction $g : x \mapsto x\,\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ est continue en 0, et en 0 seulement. D'une part, $|g(x)| \leqslant |x|$ pour tout réel x, donc g tend vers $0 = g(0)$ en 0. D'autre part, en $a \neq 0$, les suites (r_n) et (s_n) de l'exemple précédent donnent $g(r_n) = r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $g(s_n) = 0$: les deux limites diffèrent puisque $a \neq 0$. La continuité est bien une propriété ponctuelle, et une fonction peut être continue en un seul point.

8.3.5 Continuité et densité

Proposition 11 : Soit D une partie dense de $\mathbb{R}$, et f, g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur D. Alors $f = g$.

∘ Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la proposition 12 du chapitre 7, il existe une suite (d_n) d'éléments de D qui tend vers x. Par le théorème 7, $f(d_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ et $g(d_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$; or $f(d_n) = g(d_n)$ pour tout n, et l'unicité de la limite donne $f(x) = g(x)$. □

Exemple :

Déterminons les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(x+y) = f(x)+f(y)$ pour tous réels x et y. Une récurrence donne $f(nx) = nf(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$; avec $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 0$, puis $f(-x) = -f(x)$, de sorte que la formule vaut pour $n \in \mathbb{Z}$. Pour $r = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a $qf(r) = f(qr) = f(p) = pf(1)$, donc $f(r) = rf(1)$. Ainsi f et la fonction continue $x \mapsto f(1)x$ coïncident sur $\mathbb{Q}$, qui est dense : la proposition 11 donne $f(x) = f(1)x$ pour tout réel x. Les solutions sont donc les fonctions linéaires $x \mapsto cx$, qui conviennent réciproquement. Sans l'hypothèse de continuité, on ne sait conclure que sur $\mathbb{Q}$.

8.4 Fonctions continues sur un intervalle

Les résultats de la section précédente sont locaux : ils ne regardent f qu'au voisinage d'un point. Ceux de cette section sont globaux, et ils reposent tous, à travers les suites adjacentes ou le théorème de Bolzano-Weierstrass, sur l'axiome de la borne supérieure du chapitre 7. Ils sont faux pour des fonctions définies sur $\mathbb{Q}$: la fonction $x \mapsto x^2 - 2$ est continue sur $[0\,,2] \cap \mathbb{Q}$, change de signe, et ne s'y annule pas.

8.4.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 8 : Théorème des valeurs intermédiaires :
Soit f une fonction continue sur un segment $[a\,,b]$, et y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in [a\,,b]$ tel que $f(c) = y$.

∘ Démonstration : Quitte à remplacer f par $-f$ et y par $-y$, on suppose $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$.

▷ *Construction par dichotomie.* Construisons par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) telles que, pour tout n,

$$a_n \leqslant b_n, \qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \qquad \text{et} \qquad f(a_n) \leqslant y \leqslant f(b_n).$$

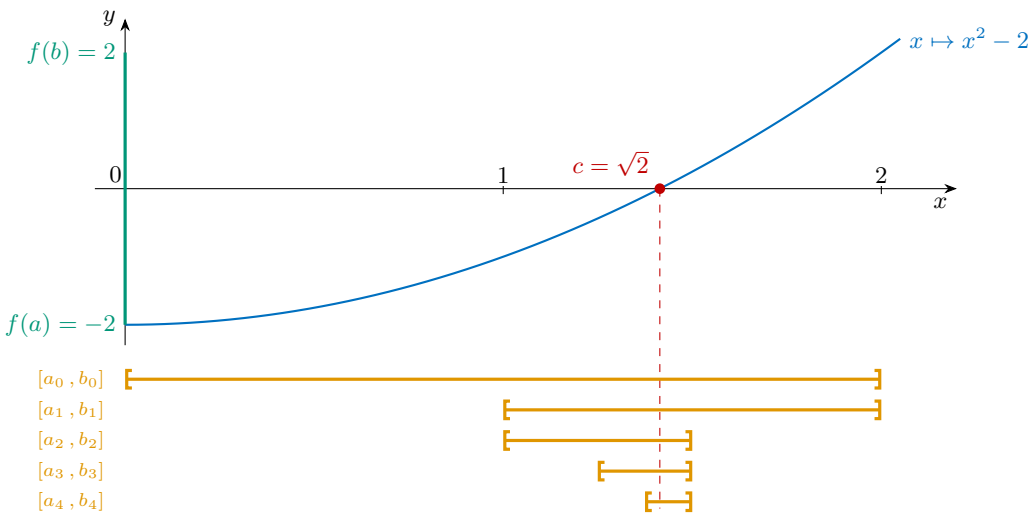
On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Si a_n et b_n sont construits, soit $m = \frac{a_n+b_n}{2}$ leur milieu : si $f(m) \leqslant y$, on pose $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$; sinon $f(m) > y$, et l'on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m$. Dans les deux cas, les trois propriétés se transmettent au rang $n+1$.

▷ *Convergence.* La suite (a_n) est croissante, la suite (b_n) décroissante, et $b_n - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: elles sont adjacentes, et convergent vers une même limite c (chapitre 7, théorème 9). Le passage à la limite dans $a \leqslant a_n \leqslant b$ montre que $c \in [a\,,b]$.

▷ *Conclusion.* Par continuité de f en c et le théorème 7, $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$ et $f(b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$. Le passage à la limite dans les inégalités $f(a_n) \leqslant y \leqslant f(b_n)$ donne

$$f(c) \leqslant y \leqslant f(c), \qquad \text{donc} \qquad f(c) = y.$$

□



Pour résoudre $x^2 - 2 = 0$ sur $[0\,,2]$, la dichotomie garde à chaque étape la moitié du segment aux extrémités de laquelle f prend des valeurs de part et d'autre de 0. Les segments orange, emboîtés, se resserrent autour de $\sqrt{2}$: on obtient une démonstration de l'existence de $\sqrt{2}$, promise au chapitre 7, et un algorithme qui en fournit une valeur approchée à $\frac{2}{2^n}$ près après n étapes.

Théorème 9 : Image d'un intervalle :
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle : si f est continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.

∘ Démonstration : D'après la caractérisation des intervalles (chapitre 7, proposition 6), il suffit de montrer que si $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, avec y_1 et y_2 dans $f(I)$, alors $y \in f(I)$. Écrivons $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$, avec x_1, $x_2 \in I$. Le segment d'extrémités x_1 et x_2 est contenu dans l'intervalle I, et le théorème 8, appliqué à f sur ce segment, fournit un antécédent de y entre x_1 et x_2. □

Remarques :

- Le théorème 8 n'affirme pas l'unicité de c : la fonction cosinus prend la valeur 0 en $\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{3\pi}{2}$ sur $[0\,,2\pi]$. Il n'indique pas non plus où se trouve c, sinon par l'algorithme de dichotomie.
- La nature de l'intervalle n'est pas conservée : le sinus envoie l'intervalle ouvert $]0\,,2\pi[$ sur le segment $[-1\,,1]$, et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ envoie l'intervalle fermé $[0\,,+\infty[$ sur $]0\,,1]$. Le théorème 10 montrera qu'en revanche l'image d'un segment est un segment.
- L'hypothèse que I est un intervalle est indispensable : la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et change de signe sans jamais s'annuler.

8.4.2 Applications

Proposition 12 : *(Racines n-ièmes.)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $r > 0$. Il existe un unique réel $x > 0$ tel que $x^n = r$; on le note $\sqrt[n]{r}$, ou $r^{1/n}$.

∘ Démonstration : La fonction $g : x \mapsto x^n$ est continue sur $[0\,,1+r]$. On a $g(0) = 0 < r$ et, puisque $1 + r \geqslant 1$, $g(1+r) = (1+r)^n \geqslant 1 + r > r$. Le théorème 8 fournit $x \in [0\,,1+r]$ tel que $x^n = r$, et $x > 0$ puisque $r > 0$. L'unicité vient de la stricte croissance de g sur $[0\,,+\infty[$. □

Cette démonstration tient la promesse du chapitre 4, où l'existence des racines n-ièmes avait été admise. Pour $n = 2$, elle remplace avantageusement l'argument direct par la borne supérieure du chapitre 7, qui est désormais caché dans le théorème des valeurs intermédiaires.

Proposition 13 : Toute fonction polynomiale réelle de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

∘ Démonstration : Soit $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$, avec d impair et, quitte à changer P en $-P$, $a_d > 0$. Pour $x \neq 0$, $P(x) = a_d x^d\big(1 + \frac{a_{d-1}}{a_d x} + \cdots + \frac{a_0}{a_d x^d}\big)$, et la parenthèse tend vers 1 en $\pm\infty$. Comme d est impair, x^d tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$: il existe $A > 0$ tel que $P(-A) < 0 < P(A)$, et le théorème 8 fournit une racine dans $[-A\,,A]$. □

Le résultat est faux en degré pair, comme le montre $x \mapsto x^2 + 1$. Le chapitre 13 précisera le nombre des racines d'un polynôme ; le théorème de d'Alembert-Gauss, admis, affirme que tout polynôme non constant possède une racine complexe.

Proposition 14 : *(Point fixe.)* Toute fonction continue $f : [a\,,b] \to [a\,,b]$ admet un point fixe.

∘ Démonstration : La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[a\,,b]$, avec $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$, puisque f est à valeurs dans $[a\,,b]$. Elle s'annule par le théorème 8. □

Graphiquement, une courbe qui joint le côté gauche du carré $[a\,,b]^2$ à son côté droit coupe nécessairement la diagonale. L'existence est ainsi assurée, mais il peut y avoir plusieurs points fixes, ce qu'illustre l'identité.

Proposition 15 : *(Signe constant.)* Une fonction continue qui ne s'annule pas sur un intervalle I y garde un signe constant strict.

En effet, si elle prenait une valeur strictement positive et une valeur strictement négative, l'intervalle $f(I)$ contiendrait 0 par le théorème 9. Le chapitre 6 a utilisé ce fait pour dériver $\ln|u|$ lorsque u ne s'annule pas sur I.

8.4.3 Le théorème des bornes atteintes

Théorème 10 : Théorème des bornes atteintes :
Une fonction continue sur un segment $[a\,,b]$ est bornée et atteint ses bornes : il existe $c, d \in [a\,,b]$ tels que

$$f(c) = \min_{[a,b]} f \qquad \text{et} \qquad f(d) = \max_{[a,b]} f.$$

En particulier, $f([a\,,b])$ est un segment.

∘ Démonstration :

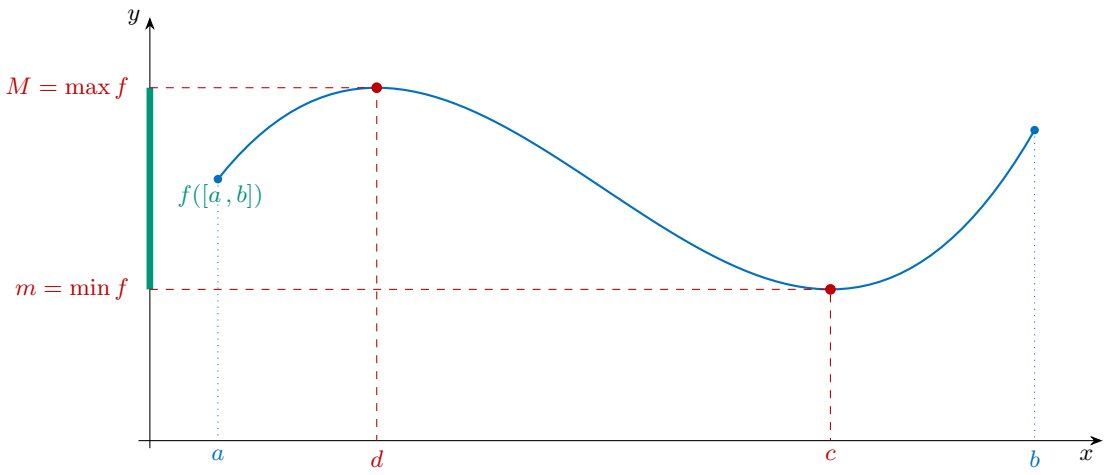
▷ *f est majorée.* Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a\,,b]$ tel que $f(x_n) \geqslant n$. La suite (x_n) est bornée ; d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (chapitre 7, théorème 10), elle admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers un réel d, élément de $[a\,,b]$ par passage à la limite dans les inégalités. Par continuité, $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(d)$; mais

$$f(x_{\varphi(n)}) \geqslant \varphi(n) \geqslant n,$$

de sorte que cette suite tend vers $+\infty$, ce qui est contradictoire.

▷ *La borne supérieure est atteinte.* Soit $M = \sup_{[a,b]} f$. D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure (chapitre 7, proposition 13), il existe une suite (x_n) d'éléments de $[a\,,b]$ telle que $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$. On en extrait de nouveau une suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers un $d \in [a\,,b]$. Par continuité, $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(d)$, et aussi $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$ comme suite extraite : donc $f(d) = M$, et la borne supérieure est un maximum. On applique ce résultat à $-f$ pour le minimum.

▷ *Image du segment.* L'ensemble $f([a\,,b])$ est un intervalle par le théorème 9, contenu dans $[\min f\,, \max f]$ et contenant ses extrémités : c'est ce segment. □



Les valeurs prises par f sur le segment $[a\,,b]$ remplissent exactement le segment vert $[m\,,M]$ de l'axe des ordonnées. Le maximum est atteint en d et le minimum en c, deux points intérieurs ici, mais les extrêmes peuvent aussi être atteints en a ou en b.

Remarques :

- Les deux hypothèses sont nécessaires. Sur l'intervalle $]0\,,1]$, qui n'est pas fermé, la fonction continue $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas majorée ; sur $[0\,,+\infty[$, qui n'est pas borné, l'arc tangente est majorée par $\frac{\pi}{2}$ sans atteindre cette borne. Enfin, la fonction définie sur $[0\,,1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ n'est pas majorée : il lui manque seulement la continuité en 0.
- La démonstration n'est pas constructive : comme le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle ne dit pas où le maximum est atteint. C'est le calcul différentiel du chapitre 9 qui permettra de chercher les extrema parmi les points où la dérivée s'annule.

8.4.4 Fonctions strictement monotones et bijections

Proposition 16 : Soit f une fonction monotone sur I. Si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue sur I.

∘ Démonstration : Supposons f croissante, et soit $c \in I$ qui n'est pas l'extrémité droite de I.

▷ *La limite à droite.* D'après le théorème 6 appliqué à droite de c, la limite à droite $\ell = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ existe, et $\ell = \inf_{x>c} f(x) \geqslant f(c)$.

▷ *Pas de saut.* Supposons $\ell > f(c)$. Pour $x \leqslant c$, on a $f(x) \leqslant f(c)$, et pour $x > c$, on a $f(x) \geqslant \ell$: aucun réel de l'intervalle $]f(c)\,,\ell[$ n'est atteint par f. Or $f(I)$ contient $f(c)$ et des valeurs supérieures ou égales à ℓ, et c'est un intervalle : il contient donc $]f(c)\,,\ell[$, ce qui est absurde. Ainsi $\ell = f(c)$, et f est continue à droite en c.

▷ *Conclusion.* On montre de même la continuité à gauche, puis on conclut par la proposition 7. □

Autrement dit, une discontinuité d'une fonction monotone est un saut, comme on l'a vu après la proposition 6, et un saut laisse un trou dans l'image. Ce résultat donne la continuité de la réciproque dans le théorème suivant, qui achève le théorème 2 du chapitre 5, admis jusqu'ici à l'exception de la dérivabilité, que le chapitre 9 établira.

Théorème 11 : Théorème de la bijection continue :
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors :

(i) $J = f(I)$ est un intervalle, dont les extrémités sont les limites de f aux extrémités de I ;

(ii) f réalise une bijection de I sur J ;

(iii) sa réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone, de même sens que f.

∘ Démonstration : Supposons f strictement croissante.

▷ *(i)* L'ensemble J est un intervalle par le théorème 9. Si β est l'extrémité droite de I, le théorème 6 montre que la limite de f en β est la borne supérieure de f sur I privé de β, finie ou non ; par croissance de f, c'est aussi celle de $f(I)$. On raisonne de même à gauche.

▷ *(ii)* Une fonction strictement monotone est injective : si $x \neq x'$, par exemple $x < x'$, alors $f(x) < f(x')$. Elle est donc bijective de I sur son image J.

▷ *(iii)* Si $y < y'$ dans J, on a $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$, sans quoi la croissance de f donnerait $y \geqslant y'$: f^{-1} est strictement croissante. Enfin, f^{-1} est monotone sur l'intervalle J et son image est l'intervalle I : elle est continue par la proposition 16. □

Exemples :

- La fonction $x \mapsto x^n$, avec $n \geqslant 1$, est continue et strictement croissante sur $[0\,,+\infty[$, de limite $+\infty$ en $+\infty$: c'est une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur lui-même, dont la réciproque $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue. On retrouve la proposition 12, avec en plus la continuité.
- Les fonctions Arcsin, Arccos et Arctan du chapitre 5 sont continues, comme réciproques des restrictions continues et strictement monotones de sin, cos et tan. Le logarithme est continu comme réciproque de l'exponentielle.

La réciproque du théorème 11 est l'objet de la proposition suivante, annoncée au chapitre 2 : une fonction continue ne peut être injective sur un intervalle qu'en étant strictement monotone.

Proposition 17 : Une fonction continue et injective sur un intervalle I y est strictement monotone.

∘ Démonstration :

▷ *Une fonction auxiliaire.* Soit $x < y$ et $x' < y'$ quatre éléments de I. Pour $t \in [0\,,1]$, posons

$$x_t = (1-t)x + tx' \qquad \text{et} \qquad y_t = (1-t)y + ty'.$$

Ce sont des éléments de l'intervalle I, et $y_t - x_t = (1-t)(y-x) + t(y'-x') > 0$. La fonction $\varphi : t \mapsto f(y_t) - f(x_t)$ est continue sur $[0\,,1]$, comme composée et différence de fonctions continues, et elle ne s'annule pas, car $x_t \neq y_t$ et f est injective.

▷ *Conclusion.* D'après la proposition 15, φ garde un signe constant, de sorte que les réels

$$f(y) - f(x) = \varphi(0) \qquad \text{et} \qquad f(y') - f(x') = \varphi(1)$$

ont le même signe. Ainsi le signe de $f(y) - f(x)$, pour $x < y$, ne dépend pas du couple choisi : s'il est positif, f est strictement croissante, et s'il est négatif, strictement décroissante. □

La continuité est indispensable : la fonction du chapitre 2 qui vaut x sur $\mathbb{Q}$ et $-x$ ailleurs est injective sans être monotone sur aucun intervalle, et la fonction qui vaut x sur $[0\,,1[$ et $3-x$ sur $[1\,,2]$ est injective sur $[0\,,2]$ sans être monotone. L'hypothèse d'intervalle l'est aussi, comme le montre $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$, injective mais ni croissante ni décroissante.

8.5 Continuité uniforme et fonctions lipschitziennes

8.5.1 Fonctions lipschitziennes

Définition : Soit $k \geqslant 0$. Une fonction f est **k-lipschitzienne** sur I si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x)-f(y)| \leqslant k\,|x-y|.$$

Elle est **lipschitzienne** s'il existe un tel k.

Géométriquement, toutes les cordes de la courbe de f ont une pente comprise entre $-k$ et k : une fonction lipschitzienne ne peut pas varier brutalement.

Exemples :

- Les fonctions sinus et cosinus sont 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$, comme on l'a vu à la section précédente ; la valeur absolue l'est aussi, grâce à l'inégalité triangulaire $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$.
- Pour $R>0$, la fonction carré est $2R$-lipschitzienne sur le segment $[-R\,,R]$, puisque

$$|x^2-y^2| = |x+y|\,|x-y| \leqslant 2R\,|x-y|.$$

  Elle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, car le rapport $\frac{|x^2-y^2|}{|x-y|}$, égal à $|x+y|$, n'est pas borné.

Le chapitre 9 donnera un critère général, l'inégalité des accroissements finis : une fonction dérivable dont la dérivée est bornée par k sur un intervalle y est k-lipschitzienne.

8.5.2 Continuité uniforme

Définition : Une fonction f est **uniformément continue** sur I si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in I^2, \quad |x-y| \leqslant \delta \implies |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

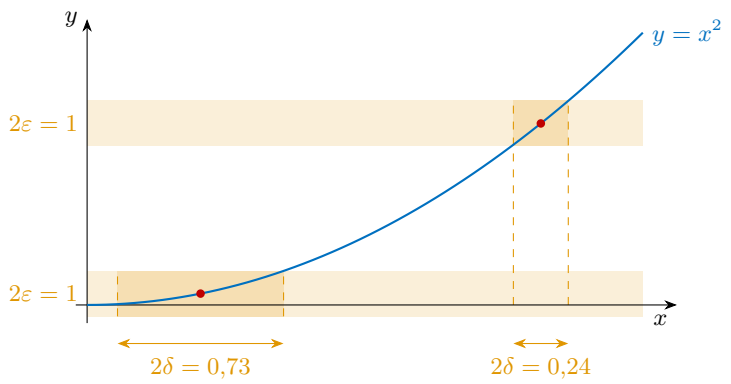
Comparons avec la continuité sur I, qui s'écrit

$$\forall y \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-y| \leqslant \delta \implies |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Comme annoncé au chapitre 1, la seule différence est la place du quantificateur $\forall y$: dans la continuité, δ peut dépendre du point y ; dans la continuité uniforme, un même δ convient pour tous les points de I à la fois. La continuité uniforme entraîne donc la continuité, et l'erreur classique est de croire la réciproque vraie.

Proposition 18 : Une fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I, donc continue sur I.

∘ Démonstration : Si f est k-lipschitzienne avec $k>0$, il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$; si $k=0$, la fonction est constante et tout δ convient. □



Pour une même tolérance $\varepsilon = 0{,}5$ sur les valeurs, les bandes horizontales orange ont la même hauteur, mais l'intervalle de centre a dont l'image reste dans la bande se rétrécit quand a augmente : environ 0,37 de demi-largeur en $a = 0{,}5$, mais seulement 0,12 en $a = 2$, et $\frac{\varepsilon}{2a}$ environ pour a grand. Aucun δ ne convient pour tous les points de $\mathbb{R}$ à la fois.

8.5.3 Montrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue

La figure suggère que la fonction carré n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$; pour le démontrer, il faut nier la définition, ce qui fait apparaître trois quantificateurs à manier. La proposition suivante remplace cette négation par une condition sur deux suites, beaucoup plus simple à vérifier.

Proposition 19 : *(Caractérisation séquentielle.)* Une fonction f n'est pas uniformément continue sur I si et seulement s'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de I telles que

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

∘ Démonstration :

▷ *Sens direct.* La négation de la continuité uniforme s'écrit

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists (x,y) \in I^2, \quad |x-y| \leqslant \delta \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| > \varepsilon.$$

Fixons un tel ε et appliquons cette propriété à $\delta = \frac{1}{n+1}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$: on obtient deux éléments x_n et y_n de I tels que $|x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$.

▷ *Réciproque.* Supposons f uniformément continue, et soit $\varepsilon > 0$ et deux suites (x_n), (y_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$. La définition, appliquée à $\frac{\varepsilon}{2}$, fournit $\delta > 0$; à partir d'un certain rang, $|x_n - y_n| \leqslant \delta$, donc $|f(x_n) - f(y_n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. La seconde condition ne peut donc pas être vérifiée pour tout n. □

♡ **Méthode : Pour montrer que f n'est pas uniformément continue sur I :**

- ▶ On se place là où la courbe devient de plus en plus raide : au voisinage de $\pm\infty$, ou d'une extrémité de I qui ne lui appartient pas.
- ▶ On y choisit une suite (y_n), puis $x_n = y_n + h_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0$.
- ▶ On ajuste h_n pour que l'écart $|f(x_n) - f(y_n)|$ reste minoré par une constante $\varepsilon > 0$, et la proposition 19 conclut.

Exemples :

- La fonction carré n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Pour tous réels y et h, on a $(y+h)^2 - y^2 = 2yh + h^2$: pour que cet écart reste de l'ordre de 1 alors que h tend vers 0, il faut que y soit grand et que h soit de l'ordre de $\frac{1}{y}$. Posons donc $y_n = n$ et $x_n = n + \frac{1}{n}$, pour $n \geqslant 1$. L'écart $x_n - y_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0, et pourtant

  $$x_n^2 - y_n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \geqslant 2 \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

  La proposition 19, avec $\varepsilon = 2$, conclut. On retrouve ce que montrait la figure : en $a = n$, il faudrait δ de l'ordre de $\frac{\varepsilon}{2n}$, et aucun δ ne convient pour tous les n à la fois.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0\,,1]$. Cette fois, la courbe devient raide près de l'extrémité 0, qui n'appartient pas à l'intervalle. Avec $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n+1}$, l'écart $x_n - y_n = \frac{1}{n(n+1)}$ tend vers 0, mais $\frac{1}{y_n} - \frac{1}{x_n} = 1$ pour tout n : la proposition 19 s'applique avec $\varepsilon = 1$. Ici, c'est le bord ouvert de l'intervalle qui pose problème, et non son caractère non borné.

Une fonction peut cependant être uniformément continue sans être lipschitzienne, ce que montre l'exemple suivant.

Exemple : La racine carrée est uniformément continue sur $[0\,,+\infty[$ sans y être lipschitzienne. Pour $x \geqslant y \geqslant 0$, on a $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y} + \sqrt{x-y}$, car en élevant au carré on obtient $x \leqslant x + 2\sqrt{y(x-y)}$; ainsi $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$, et $\delta = \varepsilon^2$ convient. En revanche, $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas borné sur $]0\,,1]$, ce qui interdit toute constante de Lipschitz : la courbe a une tangente verticale en 0.

8.5.4 Le théorème de Heine

Théorème 12 : Théorème de Heine :
Une fonction continue sur un segment $[a\,,b]$ y est uniformément continue.

∘ Démonstration : Raisonnons par l'absurde, en supposant f continue mais non uniformément continue sur $[a\,,b]$.

▷ *Deux suites mal placées.* D'après la proposition 19, il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de $[a\,,b]$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } n.$$

▷ *Extraction.* La suite (x_n) est bornée ; d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle a une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers un réel c, élément de $[a\,,b]$. La suite $(x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)})$, extraite d'une suite de limite nulle, tend vers 0 (chapitre 7, proposition 11) : la suite $(y_{\varphi(n)})$ tend donc aussi vers c.

▷ *Contradiction.* Par continuité de f en c, $f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c) - f(c) = 0$, ce qui contredit l'inégalité $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geqslant \varepsilon$, valable pour tout n. □

Remarques :

- Les exemples précédents montrent que les deux hypothèses sont utiles : la fonction carré sur $\mathbb{R}$ échoue parce que l'intervalle n'est pas borné, la fonction inverse sur $]0\,,1]$ parce qu'il n'est pas fermé. Sur tout segment $[\eta\,,1]$ avec $\eta > 0$, l'inverse est uniformément continue.
- La continuité uniforme est la clé de l'intégration des fonctions continues au chapitre 18 : sur un segment, elle permet d'approcher uniformément une fonction continue par des fonctions en escalier, en découpant le segment en morceaux de longueur δ, la même partout.

8.6 Fonctions à valeurs complexes

On considère maintenant une fonction $f : I \to \mathbb{C}$. On définit la limite de f en un point a adhérent à I, réel ou infini, en remplaçant la valeur absolue par le module : pour $\ell \in \mathbb{C}$ et a réel, f tend vers ℓ en a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - a| \leqslant \delta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Il n'y a pas de limite infinie, puisque $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné. La continuité se définit de même, par $\ell = f(a)$.

Proposition 20 : Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Alors f tend vers ℓ en a si et seulement si $\operatorname{Re} f$ tend vers $\operatorname{Re}\ell$ et $\operatorname{Im} f$ tend vers $\operatorname{Im}\ell$. En particulier, f est continue en a si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont.

∘ Démonstration : Pour tout complexe z, on a $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|$ et $|\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$, ainsi que $|z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ par l'inégalité triangulaire du chapitre 4. Appliquons ces inégalités à $z = f(x) - \ell$.

▷ *Sens direct.* Si $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$, les parties réelle et imaginaire de $f(x)$ sont à moins de ε de celles de ℓ.

▷ *Réciproque.* Si celles-ci sont à moins de $\frac{\varepsilon}{2}$ de celles de ℓ, alors $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. □

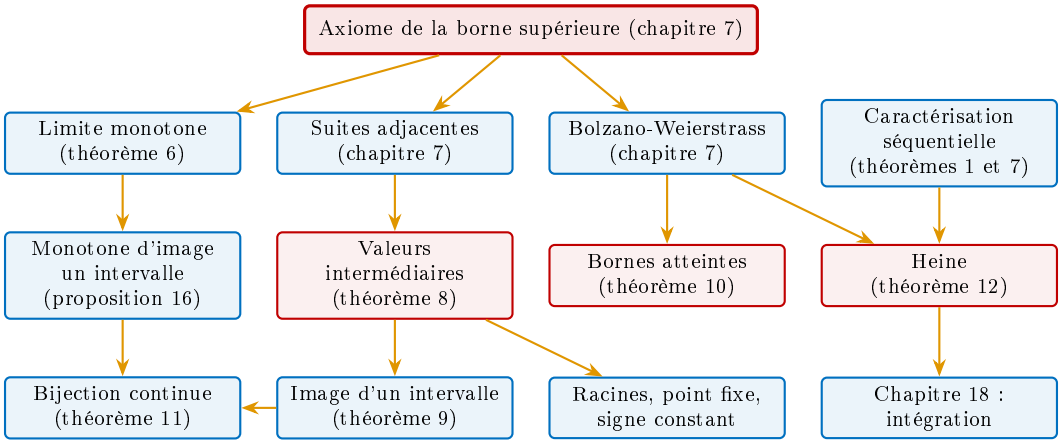
Cette proposition, analogue de la proposition 14 du chapitre 7 pour les suites, ramène l'étude aux fonctions réelles. La caractérisation séquentielle, l'unicité de la limite et les opérations, y compris le quotient par une fonction de limite non nulle, restent valables, avec les mêmes démonstrations. Par exemple, $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$ est continue sur $\mathbb{R}$, puisque ses parties réelle et imaginaire le sont.

Remarques :

- Tout ce qui fait intervenir l'ordre disparaît : il n'y a ni limite monotone, ni maximum d'une fonction complexe. Le théorème des bornes atteintes garde un sens affaibli : si f est continue sur un segment, alors $|f|$, réelle et continue, est bornée et atteint son maximum, de sorte que f est bornée.
- Le théorème des valeurs intermédiaires est faux pour les fonctions complexes. La fonction continue $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ vaut 1 en 0 et -1 en π, mais elle ne prend jamais la valeur 0, intermédiaire sur le segment réel joignant ces deux valeurs : son module vaut toujours 1. Le chemin suivi par $f(t)$ contourne l'origine par le demi-cercle supérieur, ce qu'une fonction réelle ne peut pas faire.

8.7 Bilan

Les trois grands théorèmes du chapitre reposent sur l'axiome de la borne supérieure, par l'intermédiaire des outils du chapitre 7. Le schéma suivant montre comment ils s'enchaînent ; une flèche signifie « sert à démontrer ».



Les trois grands théorèmes, encadrés de rouge, utilisent tous la caractérisation séquentielle de la continuité pour passer à la limite dans $f(x_n)$; une seule flèche la représente pour ne pas encombrer le schéma. Le théorème de la bijection continue, qui fonde toutes les fonctions réciproques du chapitre 5, combine les valeurs intermédiaires et la limite monotone.

Le tableau suivant rassemble les outils du chapitre selon la question posée.

Question	Outil	Référence
calculer une limite	opérations, composition, encadrement, limites usuelles	théorèmes 2, 3 et 5
montrer l'absence de limite ou de continuité	deux suites de limites images différentes	théorèmes 1 et 7
prolonger par continuité	limite finie au point manquant	définition, section 8.3
résoudre $f(x) = y$	valeurs intermédiaires, dichotomie, bijection continue	théorèmes 8, 9 et 11
justifier l'existence d'un extremum	bornes atteintes sur un segment	théorème 10
contrôler $\lvert f(x) - f(y)\rvert$ uniformément	lipschitzianité, théorème de Heine	proposition 18, théorème 12
montrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue	deux suites d'écart de limite nulle, d'images écartées	proposition 19

Le chapitre 9 prolonge directement celui-ci : la dérivée y est définie comme une limite, et le théorème des bornes atteintes y donne le théorème de Rolle, d'où découlent les accroissements finis.