Chapitre 10

Analyse asymptotique et développements limités

10.1 Introduction historique

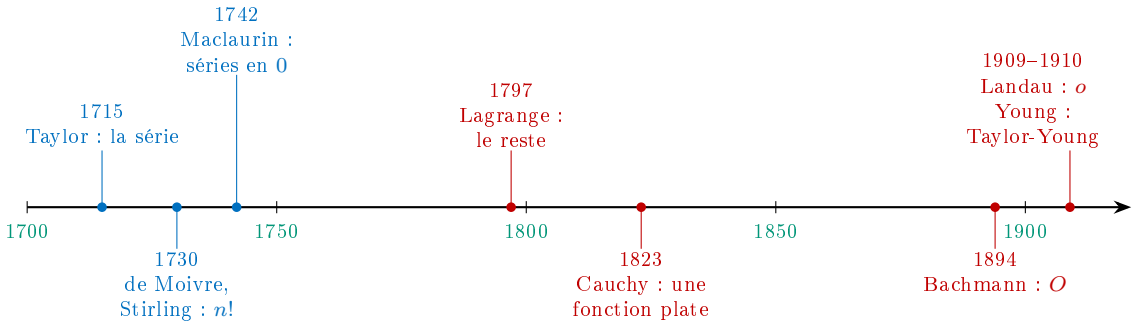
> *Les notions d'« ordre de grandeur » ou d'« ordre de petitesse » d'une fonction [...] lorsque x est « grand », ou « petit », ou « presque égal à a », sont de la plus haute importance, même aux stades les plus élémentaires de l'analyse mathématique.*
>
> Godfrey Harold Hardy - *Orders of Infinity*, Cambridge University Press, 1910

10.1.1 L'ordre de l'histoire

En 1715, dans son *Methodus incrementorum directa et inversa*, **Brook Taylor** publie la formule qui développe une fonction en série de puissances de l'accroissement de la variable ; **Colin Maclaurin** en fait un usage systématique au voisinage de 0 dans son *Treatise of Fluxions* de 1742. En 1730, **Abraham de Moivre** et **James Stirling** obtiennent une approximation de $n!$ pour n grand. Tout le XVIII^{e} siècle manipule ces séries sans mesurer ce que l'on néglige en les tronquant : **Lagrange** donne la première expression du reste en 1797, et **Cauchy** observe en 1823 qu'une fonction peut avoir tous ses coefficients nuls sans être nulle, comme la fonction plate de l'exercice 30 du chapitre 9. Les notations qui mesurent l'erreur arrivent en dernier : **Paul Bachmann** introduit le symbole O en 1894, dans un traité de théorie des nombres, et **Edmund Landau** le symbole o en 1909. En 1910, **William Henry Young** énonce la formule de Taylor sous la forme locale qui porte aujourd'hui son nom.

10.1.2 L'ordre du chapitre

Ce chapitre suit l'ordre inverse de l'histoire. Les notations de Bachmann et de Landau viennent d'abord (section 10.2) ; elles permettent de définir proprement les développements limités et d'établir la formule de Taylor-Young (10.3), que l'on applique à l'étude locale des fonctions (10.4), puis aux suites et à la formule de Stirling (10.5). La frise situe ces étapes : en bleu, les développements en série, en rouge, les outils qui mesurent l'erreur.



10.2 Relations de comparaison

Dans tout le chapitre, I est un intervalle non vide et non réduit à un point, et a est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ qui appartient à I ou en est une extrémité : a est adhérent à I, au sens du chapitre 8. Les fonctions sont définies sur I, ou sur $I\setminus\{a\}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Le chapitre 7 a déjà comparé des suites, en écrivant $\ln n \ll n^\alpha \ll q^n$; il s'agit maintenant de donner à ces comparaisons un sens précis, pour les fonctions puis pour les suites.

10.2.1 Domination et négligeabilité

Définition : Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a.

- On dit que f est **dominée** par g au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a et une fonction B bornée sur $V\cap I$ tels que $f = Bg$ sur $V\cap I$. On note
$$f(x) \underset{x\to a}{=} O\big(g(x)\big), \quad \text{ou plus brièvement} \quad f = O(g).$$
- On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a et une fonction ε définie sur $V\cap I$ telle que $f = \varepsilon g$ sur $V\cap I$ et $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$. On note
$$f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big), \quad \text{ou plus brièvement} \quad f = o(g).$$

On lit « f est un grand O de g » et « f est un petit o de g ». Dans la pratique, on se ramène presque toujours à un quotient.

Proposition 1 : *(Caractérisation par le quotient.)* On suppose qu'il existe un voisinage V de a tel que g ne s'annule pas sur $(V\cap I)\setminus\{a\}$. Alors

- $f = o(g)$ si et seulement si $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0 quand x tend vers a en restant distinct de a, et $f(a) = 0$ lorsque $a\in I$;
- $f = O(g)$ si et seulement si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a, en dehors de a, et $f(a) = 0$ lorsque $a\in I$ et $g(a) = 0$.

∘ Démonstration :

▷ *Condition nécessaire.* Si $f = \varepsilon g$ sur $W\cap I$, alors $\frac{f}{g} = \varepsilon$ sur $(V\cap W\cap I)\setminus\{a\}$, qui tend vers 0. Si $a\in I$, la fonction ε est définie en a et y a une limite, donc $\varepsilon(a) = 0$ (chapitre 8), et $f(a) = \varepsilon(a)g(a) = 0$.

▷ *Condition suffisante.* On pose $\varepsilon = \frac{f}{g}$ sur $(V\cap I)\setminus\{a\}$ et, si $a\in I$, $\varepsilon(a) = 0$. Alors $f = \varepsilon g$ sur $V\cap I$, y compris en a puisque $f(a) = 0$, et ε tend vers 0 en a. Le cas de O est identique, avec $B = \frac{f}{g}$ en dehors de a, et $B(a) = \frac{f(a)}{g(a)}$ si $g(a)\neq 0$, $B(a) = 0$ sinon. □

Dans les cas usuels, ou bien a n'appartient pas à I, ou bien $f(a) = g(a) = 0$, comme pour comparer $\sin x$ à x en 0 : la condition en a est alors automatiquement remplie, et seul compte le quotient.

Exemples :

- Au voisinage de 0, on a $x^2 = o(x)$, puisque $\frac{x^2}{x} = x$ tend vers 0 ; au voisinage de $+\infty$, c'est l'inverse : $x = o(x^2)$. La comparaison dépend toujours du point considéré, qu'il faut écrire sous le signe égal.
- Au voisinage de $+\infty$, $\sin x = O(1)$, puisque le sinus est borné, mais $\sin x$ n'est pas un $o(1)$. Au voisinage de 0, $x\sin\frac{1}{x} = O(x)$ et $x\sin\frac{1}{x} = o(1)$.
- On a $f = o(1)$ si et seulement si f tend vers 0 en a, et $f = O(1)$ si et seulement si f est bornée au voisinage de a.

Remarque : Le signe $=$ est ici un abus d'écriture : $o(g)$ désigne *une* fonction négligeable devant g, que l'on ne précise pas, et deux occurrences de $o(g)$ ne désignent pas la même fonction. Ainsi $o(x) - o(x) = o(x)$, et non 0, et l'égalité ne se lit que de gauche à droite : $x^2 = o(x)$ en 0, mais écrire $o(x) = x^2$ n'a pas de sens.

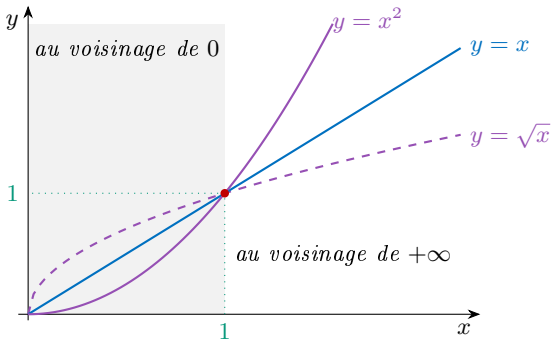
Les limites de croissances comparées du chapitre 5 se traduisent immédiatement, par la proposition 1, en relations de négligeabilité.

Proposition 2 : *(Croissances comparées.)* Soit α, β, γ trois réels strictement positifs.

$$(\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha), \qquad x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{\gamma x}), \qquad |\ln x|^\beta \underset{x\to 0^+}{=} o\Big(\frac{1}{x^\alpha}\Big).$$

De plus, si $\alpha < \alpha'$, alors $x^\alpha = o(x^{\alpha'})$ au voisinage de $+\infty$, et $x^{\alpha'} = o(x^\alpha)$ au voisinage de 0^+.

Pour la dernière affirmation, il suffit de remarquer que $\frac{x^\alpha}{x^{\alpha'}} = x^{\alpha-\alpha'}$ tend vers 0 en $+\infty$ et vers $+\infty$ en 0^+, puisque $\alpha - \alpha' < 0$.



Sur la zone grisée, près de 0, la parabole est écrasée sous la droite et la racine carrée la domine : $x^2 = o(x)$ et $x = o(\sqrt{x})$ en 0. Au-delà du point $(1,1)$, l'ordre des trois courbes s'inverse, ce qui traduit les relations contraires en $+\infty$.

Proposition 3 : *(Règles de calcul.)* Toutes les relations sont prises au voisinage de a, et λ, μ sont deux scalaires.

- *Comparaison :* si $f = o(g)$, alors $f = O(g)$.
- *Combinaisons linéaires :* si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$, alors $\lambda f_1 + \mu f_2 = o(g)$; de même avec O.
- *Produits :* si $f_1 = O(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$; si $f_1 = O(g_1)$ et $f_2 = O(g_2)$, alors $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$.
- *Transitivité :* si $f = O(g)$ et $g = o(h)$, ou si $f = o(g)$ et $g = O(h)$, alors $f = o(h)$.

∘ Démonstration : Chaque hypothèse fournit un voisinage de a sur lequel l'écriture correspondante est valable ; on se place sur leur intersection, qui est encore un voisinage de a (chapitre 8). Une fonction de limite nulle est bornée au voisinage de a, d'où le premier point. Si $f_1 = \varepsilon_1 g$ et $f_2 = \varepsilon_2 g$, alors $\lambda f_1 + \mu f_2 = (\lambda\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2)g$, et $\lambda\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2$ tend vers 0. Si $f_1 = Bg_1$ et $f_2 = \varepsilon g_2$, alors $f_1 f_2 = (B\varepsilon)g_1 g_2$, et le produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle tend vers 0 (chapitre 8). Enfin, si $f = Bg$ et $g = \varepsilon h$, alors $f = (B\varepsilon)h$, et l'autre cas est symétrique. □

Exemple : Ces règles s'emploient sans les citer. Au voisinage de 0, on a $x^3 = o(x^2)$, donc $x^3 \cos x = o(x^2)$, puisque $\cos x = O(1)$; et $o(x^2) + o(x^3) = o(x^2)$, car un $o(x^3)$ est un $o(x^2)$ par transitivité. Plus généralement, pour $m \leqslant n$, on a $x^m\, o(x^{n-m}) = o(x^n)$ et $o(x^n) + o(x^m) = o(x^m)$ en 0.

10.2.2 Fonctions équivalentes

Définition : On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a si $f - g = o(g)$, c'est-à-dire s'il existe un voisinage V de a et une fonction ε de limite nulle en a tels que $f = (1+\varepsilon)g$ sur $V \cap I$. On note

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x), \quad \text{ou plus brièvement} \quad f \sim g.$$

La seconde forme, $f = g + o(g)$, est la plus utile dans les calculs : elle dit que g est une approximation de f dont l'erreur est négligeable devant g elle-même.

Proposition 4 :

- La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies au voisinage de a : elle est réflexive, symétrique et transitive.
- Sous l'hypothèse de la proposition 1, $f \sim g$ si et seulement si $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 quand x tend vers a en restant distinct de a, et $f(a) = g(a)$ lorsque $a \in I$.

∘ Démonstration :

▷ *Relation d'équivalence.* On a $f = (1+0)f$. Si $f = (1+\varepsilon)g$, il existe un voisinage de a sur lequel $|\varepsilon| \leqslant \frac{1}{2}$; on y a $g = \frac{1}{1+\varepsilon}f = (1+\varepsilon')f$, avec $\varepsilon' = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, qui tend vers 0. Si $f = (1+\varepsilon_1)g$ et $g = (1+\varepsilon_2)h$, alors $f = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)h$, et $(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) - 1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$ tend vers 0.

▷ *Quotient.* On applique la proposition 1 à $f-g$ et g, puisque $\frac{f-g}{g} = \frac{f}{g} - 1$ et que $(f-g)(a) = 0$ équivaut à $f(a) = g(a)$. □

Remarques :

- Une fonction polynomiale non nulle est équivalente à son terme de plus haut degré au voisinage de $\pm\infty$, et à son terme non nul de plus bas degré au voisinage de 0 : par exemple $3x^3 - x \sim 3x^3$ en $+\infty$, et $3x^3 - x \sim -x$ en 0. Il suffit de mettre ce terme en facteur.
- L'erreur la plus répandue est d'écrire $f \sim 0$. D'après la définition, $f \sim 0$ signifie que $f = (1+\varepsilon) \times 0$, c'est-à-dire que f est nulle au voisinage de a : dire qu'une fonction tend vers 0 s'écrit $f = o(1)$, jamais $f \sim 0$.

Théorème 1 : Opérations sur les équivalents :

On suppose $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de a.

- *Produit :* $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.
- *Quotient :* si g_2 ne s'annule pas au voisinage de a, alors f_2 non plus, et $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$.
- *Puissance :* si g_1 est à valeurs strictement positives au voisinage de a, alors f_1 aussi, et $f_1^\alpha \sim g_1^\alpha$ pour tout réel α.
- *Substitution :* si φ est une fonction définie au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$, à valeurs dans I, telle que $\lim\limits_{t\to b} \varphi(t) = a$, alors $f_1 \circ \varphi \underset{t\to b}{\sim} g_1 \circ \varphi$. La même règle vaut pour o et O.

∘ Démonstration : On écrit $f_1 = (1+\varepsilon_1)g_1$ et $f_2 = (1+\varepsilon_2)g_2$ au voisinage de a.

▷ *Produit.* On a $f_1 f_2 = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)g_1 g_2$, et le facteur tend vers 1.

▷ *Quotient.* Au voisinage de a, $|\varepsilon_2| \leqslant \frac{1}{2}$, donc $f_2 \neq 0$ là où $g_2 \neq 0$, et $\frac{f_1}{f_2} = \frac{1+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_2} \cdot \frac{g_1}{g_2}$, dont le facteur tend vers 1.

▷ *Puissance.* Au voisinage de a, $1+\varepsilon_1 > 0$, donc $f_1 > 0$, et $f_1^\alpha = (1+\varepsilon_1)^\alpha g_1^\alpha$; le facteur $(1+\varepsilon_1)^\alpha$ tend vers 1 par continuité de $u \mapsto u^\alpha$ en 1.

▷ *Substitution.* On a $f_1(\varphi(t)) = \big(1+\varepsilon_1(\varphi(t))\big)g_1(\varphi(t))$ pour t voisin de b, et $\varepsilon_1 \circ \varphi$ tend vers 0 en b par composition des limites (chapitre 8). □

Remarques :

- *On ne somme pas des équivalents.* Au voisinage de 0, $x+x^2 \sim x$ et $-x+x^3 \sim -x$, mais la somme des deux premières fonctions vaut $x^2+x^3 \sim x^2$, alors que celle des deux autres est nulle. Pour une somme, on revient à l'écriture $f = g+o(g)$, ou l'on attend les développements limités.
- *On ne compose pas un équivalent à gauche.* Au voisinage de $+\infty$, $x+1 \sim x$, mais $\frac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}$ ne tend pas vers 1 : e^{x+1} et e^x ne sont pas équivalents. La substitution ne concerne que la variable, à droite de la fonction.

Proposition 5 : *(Propriétés conservées.)* Si $f \sim g$ au voisinage de a, alors :
- si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$;
- si f et g sont à valeurs réelles, elles ont le même signe au voisinage de a : il existe un voisinage V de a tel que, pour tout $x \in V \cap I$, $f(x)$ et $g(x)$ soient tous deux strictement positifs, tous deux strictement négatifs ou tous deux nuls.

∘ Démonstration : On écrit $f = (1+\varepsilon)g$. Le premier point résulte des opérations sur les limites, $1+\varepsilon$ tendant vers 1 ; si $\ell = \pm\infty$, on utilise que $1+\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}$ au voisinage de a. Pour le second, on choisit V tel que $1+\varepsilon > 0$ sur $V \cap I$. □

Proposition 6 : *(Équivalent par encadrement.)* Soit f, g, h trois fonctions réelles telles que $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a. Si $f \sim h$, alors $g \sim f$.

∘ Démonstration : Au voisinage de a, on a $0 \leqslant g-f \leqslant h-f$, et $h-f = \varepsilon f$ avec ε de limite nulle. On pose $\eta = \frac{g-f}{h-f}$ là où $h \neq f$, et $\eta = 0$ ailleurs : c'est une fonction à valeurs dans $[0\,,1]$, et $g-f = \eta(h-f) = (\eta\varepsilon)f$, où $\eta\varepsilon$ tend vers 0. □

Exemple : Pour $x > 0$, on a $x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$, et $x-1 \sim x$ en $+\infty$: par encadrement, $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$. La partie entière diffère de x d'une quantité bornée, négligeable devant x.

10.2.3 Équivalents usuels

Les limites de taux d'accroissement du chapitre 9 fournissent toute une famille d'équivalents en 0.

Proposition 7 : Soit φ une fonction dérivable en 0, telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) \neq 0$. Alors $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \varphi'(0)\,x$.

∘ Démonstration : Le quotient $\frac{\varphi(x)}{\varphi'(0)x}$ est le taux d'accroissement de φ en 0 divisé par $\varphi'(0)$; il tend vers 1, et la proposition 4 conclut. □

On en déduit les équivalents du tableau suivant. Les deux derniers s'obtiennent à partir des formules $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ et $\operatorname{ch} x - 1 = 2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}$, par le théorème 1 : $2\sin^2\frac{x}{2} \sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$.

$\sin x \sim x$	$\tan x \sim x$	$\operatorname{Arcsin} x \sim x$	$\operatorname{Arctan} x \sim x$
$\operatorname{sh} x \sim x$	$\operatorname{th} x \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$	$\mathrm{e}^x - 1 \sim x$
$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\alpha \neq 0)$	$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	$\operatorname{ch} x - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$	$\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$

Tous ces équivalents sont pris au voisinage de 0. Par substitution, ils restent vrais lorsque x est remplacé par une fonction $u(x)$ qui tend vers 0 : par exemple $\ln\big(1+u(x)\big) \sim u(x)$ dès que $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$.

♡ **Méthode : Pour calculer une limite à l'aide d'équivalents** :

- Dans une somme, on met d'abord en facteur le terme prépondérant, pour se ramener à un produit.
- On remplace chaque *facteur* du produit ou du quotient par un équivalent simple, tiré du tableau ou obtenu par substitution.
- On simplifie l'expression obtenue, puis la proposition 5 transmet sa limite à l'expression de départ.

Exemples :

- Au voisinage de 0, $\ln(1+2x) \sim 2x$, $\sin x \sim x$ et $\tan(3x) \sim 3x$, par substitution. Le théorème 1 donne
$$\frac{\ln(1+2x)\sin x}{x\tan(3x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x\cdot x}{x\cdot 3x} = \frac{2}{3}, \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)\sin x}{x\tan(3x)} = \frac{2}{3}.$$
- On écrit $\cos x = 1 + u(x)$, avec $u(x) = \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$, qui tend vers 0. Par substitution, $\ln(\cos x) = \ln\big(1+u(x)\big) \sim u(x) \sim -\frac{x^2}{2}$, et donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$.
- Au voisinage de $+\infty$, $\frac{3x^3-x+1}{2x^3+x^2} \sim \frac{3x^3}{2x^3} = \frac{3}{2}$, alors qu'au voisinage de 0, $\frac{3x^3-x}{2x^3+x} \sim \frac{-x}{x} = -1$. La même fraction rationnelle se simplifie différemment selon le point.

Remarque : L'erreur la plus répandue est de remplacer $\sin x$ par x dans $\frac{\sin x - x}{x^3}$, ce qui donnerait la limite 0. Elle est fausse : le numérateur est une différence, dans laquelle les termes équivalents à x se compensent exactement. Il faut connaître le terme suivant de $\sin x$, et la section 10.3 montrera que la limite vaut $-\frac{1}{6}$.

10.3 Développements limités

Un équivalent ne retient que le premier terme d'une fonction, et la remarque précédente a montré que cela ne suffit pas toujours. Un développement limité en conserve plusieurs, et contrôle l'erreur par un o.

10.3.1 Définition et premières propriétés

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de 0. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre** n en 0 s'il existe des scalaires $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$
Le polynôme $a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ est la **partie régulière** du développement. Pour $a \in \mathbb{R}$, on dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a si $h \mapsto f(a+h)$ en admet un en 0, c'est-à-dire si
$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big).$$

On abrège souvent « développement limité à l'ordre n » en DL_n. Écrire $o(x^n)$, c'est écrire $x^n\varepsilon(x)$ avec ε de limite nulle en 0 : l'erreur commise en remplaçant f par sa partie régulière est petite devant le dernier terme conservé. Par substitution, on peut toujours se ramener au point 0, et c'est ce que nous ferons.

Exemple : Pour $x \neq 1$, la somme géométrique du chapitre 3 donne l'identité exacte
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x},$$
et $\frac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \cdot \frac{x}{1-x}$ est un $o(x^n)$ en 0. Ainsi $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n)$, pour tout n. En remplaçant x par $-x$, on obtient $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$.

Proposition 8 : *(Unicité et troncature.)* Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, ses coefficients $a_0, \dots, a_n$ sont uniques. Pour tout $m \leqslant n$, f admet alors un développement limité à l'ordre m, obtenu par troncature :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + o(x^m).$$

∘ Démonstration :

▷ *Troncature.* Pour $m < k \leqslant n$, on a $x^k = x^m \cdot x^{k-m} = o(x^m)$, et $o(x^n) = o(x^m)$ par transitivité : les termes de degré supérieur à m et le reste s'absorbent dans un $o(x^m)$.

▷ *Unicité.* Supposons $\sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)$, avec des coefficients non tous égaux, et soit p le plus petit indice tel que $a_p \neq b_p$. En soustrayant, puis en divisant par x^p pour $x \neq 0$,

$$(a_p - b_p) + \sum_{k=p+1}^{n} (a_k - b_k) x^{k-p} = o(x^{n-p}).$$

Quand x tend vers 0, le membre de gauche tend vers $a_p - b_p$, et le membre de droite vers 0, puisque $n - p \geqslant 0$. Ainsi $a_p = b_p$, ce qui contredit le choix de p. □

Proposition 9 : *(Parité.)* Soit f une fonction définie sur un intervalle symétrique par rapport à 0, admettant un développement limité à l'ordre n en 0. Si f est paire, les coefficients d'indice impair sont nuls ; si f est impaire, ce sont les coefficients d'indice pair.

∘ Démonstration : Par substitution de $-x$ à x, $f(-x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k x^k + o(x^n)$. Si f est paire, ce développement est aussi celui de $f(x)$, et l'unicité donne $(-1)^k a_k = a_k$, donc $a_k = 0$ pour k impair. Le cas impair est identique. □

Les deux premiers ordres ne sont pas nouveaux : ils traduisent la continuité et la dérivabilité.

Proposition 10 : Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$.

- f admet un développement limité à l'ordre 0 en a si et seulement si elle est continue en a, et alors $a_0 = f(a)$.
- f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement si elle est dérivable en a, et alors
$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + f'(a)h + o(h).$$

∘ Démonstration :

▷ *Ordre 0.* L'égalité $f(a+h) = a_0 + o(1)$ signifie que $f(a+h)$ tend vers a_0 quand h tend vers 0 ; comme f est définie en a, cela revient à dire que f est continue en a, avec $a_0 = f(a)$ (chapitre 8).

▷ *Ordre 1.* Si $f(a+h) = a_0 + a_1 h + o(h)$, la troncature et le premier point donnent $a_0 = f(a)$, puis $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = a_1 + o(1)$ pour $h \neq 0$: le taux d'accroissement tend vers a_1. Réciproquement, si f est dérivable en a, on pose $\varepsilon(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$ pour $h \neq 0$ et $\varepsilon(0) = 0$; alors $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$, avec ε de limite nulle. □

Le développement à l'ordre 1 s'interprète géométriquement : la droite $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, qui est la tangente, approche la courbe avec une erreur négligeable devant l'écart $x - a$.

> *Remarque :* La proposition 10 ne se prolonge pas aux ordres supérieurs. La fonction g définie par $g(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ et $g(0) = 0$ vérifie $|g(x)| \leqslant |x|^3$, donc $g(x) = 0 + o(x^2)$: elle admet un développement limité à l'ordre 2 en 0. Pourtant, l'exercice 29 du chapitre 9 a montré qu'elle n'est pas deux fois dérivable en 0.

10.3.2 Opérations sur les développements limités

Dans toute la suite de la section, f et g admettent des développements limités à l'ordre n en 0, de parties régulières P et Q. Pour un polynôme R, on note $T_n(R)$ le polynôme obtenu en ne gardant que les termes de R de degré au plus n : c'est sa *troncature* au degré n.

Théorème 2 : Combinaisons linéaires et produits :
Pour tous scalaires λ et μ, les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg admettent des développements limités à l'ordre n en 0, de parties régulières respectives

$$\lambda P + \mu Q \qquad \text{et} \qquad T_n(PQ).$$

∘ Démonstration : La combinaison linéaire résulte de la proposition 3. Pour le produit,

$$fg = \big(P + o(x^n)\big)\big(Q + o(x^n)\big) = PQ + P\,o(x^n) + Q\,o(x^n) + o(x^{2n}).$$

Les polynômes P et Q sont bornés au voisinage de 0, donc les trois derniers termes sont des $o(x^n)$. Enfin $PQ - T_n(PQ)$ ne contient que des termes de degré au moins $n+1$, qui sont des $o(x^n)$. □

Proposition 11 : *(Composition.)* Soit u une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0, de partie régulière U, telle que $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$, et soit g une fonction définie au voisinage de 0, y compris en 0, admettant un développement limité à l'ordre n en 0, de partie régulière G. Alors $g \circ u$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, de partie régulière $T_n(G \circ U)$.

∘ Démonstration :

▷ *Taille de u.* Le coefficient constant de U est nul, puisque u tend vers 0 ; ainsi

$$u(x) = x\big(a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}\big) + o(x^n),$$

et $u = O(x)$. Par produit, $u^k = O(x^k)$, et en particulier $u^n = O(x^n)$.

▷ *Le reste.* On écrit $g(y) = G(y) + y^n \varepsilon(y)$, avec $\varepsilon(0) = 0$ et ε de limite nulle en 0. Par substitution, $\varepsilon\big(u(x)\big)$ tend vers 0, donc $u(x)^n \varepsilon\big(u(x)\big) = O(x^n)\,o(1) = o(x^n)$.

▷ *La partie polynomiale.* Pour tout $k \leqslant n$, la formule du binôme donne

$$u^k = \big(U + o(x^n)\big)^k = U^k + o(x^n),$$

car tous les autres termes sont le produit d'un $o(x^n)$ par une fonction bornée. Donc $G(u) = G(U) + o(x^n)$, et l'on tronque comme au théorème 2. □

Proposition 12 : *(Quotient.)* Si le coefficient constant b_0 de Q est non nul, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ admettent des développements limités à l'ordre n en 0. On les obtient en écrivant $g = b_0(1-v)$, avec $v = 1 - \frac{g}{b_0}$ de limite nulle, et en composant v avec le développement de $y \mapsto \frac{1}{1-y}$.

En effet, $\frac{1}{g} = \frac{1}{b_0} \cdot \frac{1}{1-v}$ relève de la proposition 11, et $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ du théorème 2. Si $b_0 = 0$, on met en facteur la plus petite puissance de x présente dans Q, et l'on applique ce qui précède au quotient restant ; le développement obtenu peut alors commencer par des puissances négatives de x.

♡ **Méthode : Pour mener un calcul de développement limité** à l'ordre n :

- On factorise chaque morceau par son terme prépondérant, afin de prévoir l'ordre nécessaire : dans un produit fg où $f = O(x^p)$, il suffit de connaître g à l'ordre $n - p$.
- Dans une composée $g \circ u$ où $u = O(x)$, on élève u aux puissances $k \leqslant n$ en ne gardant que les termes de degré au plus n.
- On ne calcule jamais un terme qui sera absorbé par le o final, et l'on tronque le résultat au degré n.

Exemples :

- *Produit.* Avec les développements de exp et de cos que le théorème 5 établira, on obtient à l'ordre 4

$$\mathrm{e}^x \cos x = \Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\Big) + o(x^4) = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4).$$

  Le terme en x^2 disparaît, car $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$: seul le calcul le révèle.

- *Composition.* Pour $\mathrm{e}^{\sin x}$ à l'ordre 4, on pose $u = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, d'où

$$u^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4), \qquad u^3 = x^3 + o(x^4), \qquad u^4 = x^4 + o(x^4).$$

Alors

$$\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(x^4) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

- *Logarithme d'un cosinus.* Avec $u = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, qui est un $O(x^2)$, il suffit du développement $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, et $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$:

$$\ln(\cos x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

On retrouve l'équivalent $-\frac{x^2}{2}$ de la section 10.2, avec un terme de plus.

- *Quotient.* On a $\mathrm{e}^x - 1 = x\big(1+v\big)$ avec $v = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$. En composant avec $\frac{1}{1+v}$ à l'ordre 4, on obtient

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4).$$

La fonction $x \mapsto \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} + \frac{x}{2}$ est paire, ce qui explique l'absence de terme en x^3 ; ses coefficients font apparaître les nombres de Bernoulli.

- *En un point autre que* 0. Pour $\sqrt{x}$ en 4, on pose $x = 4 + h$:

$$\sqrt{4+h} = 2\sqrt{1 + \frac{h}{4}} = 2\Big(1 + \frac{h}{8} - \frac{h^2}{128} + o(h^2)\Big),$$

d'où

$$\sqrt{x} \underset{x\to 4}{=} 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + o\big((x-4)^2\big).$$

10.3.3 Primitivation et formule de Taylor-Young

Théorème 3 : Primitivation d'un développement limité :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant 0. Si f' admet un développement limité à l'ordre n en 0,

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n),$$

alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0, obtenu en primitivant terme à terme :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

∘ Démonstration : On pose $g(x) = f(x) - f(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$. La fonction g est dérivable sur I, avec $g(0) = 0$ et $g'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = x^n \varepsilon(x)$, où ε tend vers 0 en 0.

Soit $\eta > 0$, et $\delta > 0$ tel que $|\varepsilon(t)| \leqslant \eta$ pour $t \in I$ et $|t| \leqslant \delta$. Soit $x \in I$ tel que $0 < |x| \leqslant \delta$. Pour t compris entre 0 et x, on a $|t| \leqslant |x|$, donc

$$|g'(t)| = |t|^n |\varepsilon(t)| \leqslant \eta |x|^n.$$

L'inégalité des accroissements finis (chapitre 9, théorème 6), appliquée sur le segment d'extrémités 0 et x, donne

$$|g(x)| = |g(x) - g(0)| \leqslant \eta |x|^n \times |x| = \eta |x|^{n+1}.$$

Ainsi $\left|\frac{g(x)}{x^{n+1}}\right| \leqslant \eta$ pour $0 < |x| \leqslant \delta$: on a montré que $g(x) = o(x^{n+1})$. □

Remarque : On ne peut pas, en revanche, *dériver* un développement limité. La fonction g de la remarque précédente admet le développement $g(x) = o(x^2)$, mais sa dérivée, nulle en 0 et donnée ailleurs par

$$g'(x) = 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x},$$

n'admet pas de développement limité à l'ordre 1 : le quotient $\frac{g'(x)}{x} = 3x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0. La primitivation est sûre parce qu'elle s'appuie sur l'inégalité des accroissements finis ; aucun outil ne contrôle les oscillations de la dérivée.

♡ **Méthode : Pour obtenir un développement limité par primitivation**, à l'ordre n en un point a, d'une fonction f dérivable sur un intervalle contenant a :

- On se ramène au point 0 en posant $g(h) = f(a+h)$, de sorte que $g'(h) = f'(a+h)$.
- On calcule le développement limité de g' à l'ordre $n-1$ en 0, à l'aide des développements usuels et des opérations.
- On le primitive terme à terme par le théorème 3, sans oublier d'ajouter la constante $g(0) = f(a)$.

Cette méthode est la plus efficace lorsque la dérivée de f est plus simple que f elle-même, comme pour les fonctions réciproques.

Exemples :

- *L'arc tangente en 1, à l'ordre 3.* On pose $g(h) = \operatorname{Arctan}(1+h)$, de dérivée

$$g'(h) = \frac{1}{1+(1+h)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+u}, \qquad \text{avec } u = h + \frac{h^2}{2}.$$

Comme u tend vers 0, le développement de $\frac{1}{1+u}$ à l'ordre 2 donne

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(h^2) = 1 - h + \frac{h^2}{2} + o(h^2), \qquad \text{donc} \qquad g'(h) = \frac{1}{2} - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + o(h^2).$$

On primitive, avec la constante $g(0) = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$:

$$\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 1}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{12} + o\big((x-1)^3\big).$$

Le coefficient $\frac{1}{2}$ de $x-1$ est bien la pente $\operatorname{Arctan}'(1) = \frac{1}{2}$ de la tangente en 1.

- *L'arc sinus en 0, à l'ordre 5.* Sa dérivée $(1-x^2)^{-1/2}$ s'obtient en composant le développement de $(1+y)^{-1/2} = 1 - \frac{y}{2} + \frac{3y^2}{8} + o(y^2)$, que le théorème 5 établira, avec $y = -x^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4), \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{Arcsin} x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5),$$

la constante étant $\operatorname{Arcsin} 0 = 0$. Il aurait été bien plus long de calculer les cinq premières dérivées de Arcsin pour appliquer la formule de Taylor-Young.

Remarque : L'erreur la plus répandue est d'oublier la constante : en primitivant terme à terme le développement de g', on obtient celui de $g(h) - g(0)$, et non celui de $g(h)$. Pour l'arc tangente en 1, on écrirait ainsi un développement commençant par $\frac{h}{2}$, qui est celui de $\operatorname{Arctan}(1+h) - \frac{\pi}{4}$.

Théorème 4 : Formule de Taylor-Young :
Soit $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, et $a \in I$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a, donné par

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + o(h^n) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n).$$

◦ Démonstration : On raisonne par récurrence sur n, la propriété au rang n portant sur *toutes* les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ et tous les points.

▷ *Initialisation.* Pour $n = 0$, f est continue en a, et la proposition 10 donne $f(a+h) = f(a) + o(1)$.

▷ *Hérédité.* Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Sa dérivée f' est de classe $\mathcal{C}^n$, et l'hypothèse de récurrence lui donne

$$f'(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}\, h^k + o(h^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\, h^k + o(h^n).$$

La fonction $\varphi : h \mapsto f(a+h)$ est dérivable sur l'intervalle $\{h \mid a+h \in I\}$, qui contient 0, et $\varphi'(h) = f'(a+h)$. Le théorème 3 donne, puisque $\frac{1}{k!(k+1)} = \frac{1}{(k+1)!}$,

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}\, h^{k+1} + o(h^{n+1}) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}\, h^j + o(h^{n+1}).$$

□

Remarques :

- La démonstration n'utilise que la dérivabilité n fois de f en a (et donc l'existence de $f^{(n-1)}$ au voisinage de a) : la formule reste vraie sous cette hypothèse plus faible, à partir de l'ordre 1 donné par la proposition 10.
- La formule de Taylor-Young est *locale* : elle ne dit rien de l'erreur pour un h fixé. Le chapitre 18 établira des formules de Taylor *globales*, avec un reste intégral, qui majorent cette erreur sur tout un segment.
- Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ peut avoir tous ses développements limités nuls sans être nulle : c'est le cas de la fonction plate $x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x}$, prolongée par 0 sur $]-\infty, 0]$, de l'exercice 30 du chapitre 9, en 0. Le développement limité décrit f près de a à tout ordre fini, mais pas f elle-même.

10.3.4 Développements limités usuels

Théorème 5 : Développements limités usuels en 0 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, au voisinage de 0 :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \qquad \operatorname{Arctan} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \qquad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\, x^k + o(x^n)$$

où α est un réel quelconque.

○ Démonstration :

▷ *Par la formule de Taylor-Young.* Les fonctions exp, ch, sh, cos, sin et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, et leurs dérivées successives en 0 se calculent directement : $\exp^{(k)}(0) = 1$; $\cos^{(k)}(0) = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$, qui vaut $(-1)^j$ pour $k = 2j$ et 0 pour k impair, et de même pour sin, ch, sh ; enfin la dérivée k-ième de $(1+x)^\alpha$ est $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. Pour cos et ch, on écrit la formule à l'ordre $2n+1$, dont le dernier coefficient est nul, ce qui donne le reste $o(x^{2n+1})$; de même à l'ordre $2n+2$ pour sin et sh.

▷ *Par primitivation.* Le développement de $\frac{1}{1-x}$ a été établi plus haut. Celui de $\ln(1+x)$ s'obtient en primitivant à l'ordre $n-1$ celui de $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k + o(x^{n-1})$, avec $\ln 1 = 0$. Pour Arctan, l'identité géométrique donne

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1}),$$

et l'on primitive, avec $\operatorname{Arctan} 0 = 0$.

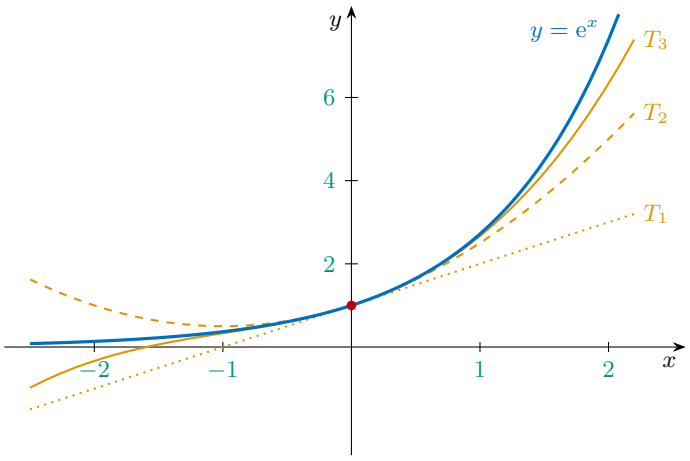
▷ *Tangente.* La fonction tan est impaire et vérifie $\tan' = 1 + \tan^2$. On part de $\tan x = x + o(x)$, d'après la proposition 10. Alors $\tan^2 x = x^2 + o(x^2)$, donc $\tan' x = 1 + x^2 + o(x^2)$, et par primitivation $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. On recommence : $\tan^2 x = x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$, donc $\tan' x = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$, et $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$. Comme tan est impaire, le coefficient de x^6 est nul (proposition 9), d'où le reste $o(x^6)$. □

Remarques :

- Le coefficient $\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ prolonge le coefficient binomial $\binom{\alpha}{k}$ du chapitre 3 à un exposant réel : pour $\alpha \in \mathbb{N}$, il est nul dès que $k > \alpha$, et l'on retrouve la formule du binôme. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -1$, on obtient

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3), \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3).$$

- Ces développements doivent être connus parfaitement, car ils sont les briques de tous les calculs. Pour les retenir, il suffit de savoir celui de exp : ch et sh en sont les parties paire et impaire, et cos, sin s'obtiennent en alternant les signes, comme le laissent prévoir les formules d'Euler du chapitre 4.



Les polynômes de Taylor T_1, T_2, T_3 de l'exponentielle en 0, en orange, collent d'autant plus longtemps à la courbe bleue que leur degré est élevé ; loin de 0, ils s'en écartent tous, ce qui rappelle que la formule de Taylor-Young n'a qu'une portée locale.

10.4 Applications à l'étude locale des fonctions

10.4.1 Équivalents, limites et signe

Proposition 13 : Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$ avec $a_p \neq 0$, alors

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p,$$

et, si f est à valeurs réelles, $f(x)$ a le signe de $a_p x^p$ au voisinage de 0.

En effet, tous les termes qui suivent $a_p x^p$ sont des $o(x^p)$, et la proposition 5 conclut pour le signe. Un équivalent n'est donc rien d'autre que le premier terme non nul d'un développement limité, et le développement permet de le trouver lorsque les premiers termes se compensent.

Exemples :

- Le numérateur de la remarque de la section 10.2 vaut $\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^4)$, donc $\sin x - x \sim -\frac{x^3}{6}$ et
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$
- Pour $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$, la division par x^2 fait perdre deux ordres : il faut connaître $\sin x$ à l'ordre 4 pour obtenir un résultat à l'ordre 0. On écrit $\sin x = x\big(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\big)$, d'où $\sin^2 x = x^2\big(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\big)$, puis
$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2}\Big(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\Big), \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{3}.$$
- Au voisinage de $+\infty$, on pose $t = \frac{1}{x}$, qui tend vers 0^+ : $\big(1 + \frac{1}{x}\big)^x = \exp\big(\frac{\ln(1+t)}{t}\big)$, et $\frac{\ln(1+t)}{t} = 1 - \frac{t}{2} + o(t)$. Comme $\exp\big(1 - \frac{t}{2} + o(t)\big) = \mathrm{e}\cdot \mathrm{e}^{-t/2+o(t)} = \mathrm{e}\big(1 - \frac{t}{2} + o(t)\big)$,
$$\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big).$$
On retrouve la limite e du chapitre 8, et l'on apprend en plus qu'elle est atteinte par valeurs inférieures, avec un écart de l'ordre de $\frac{\mathrm{e}}{2x}$.

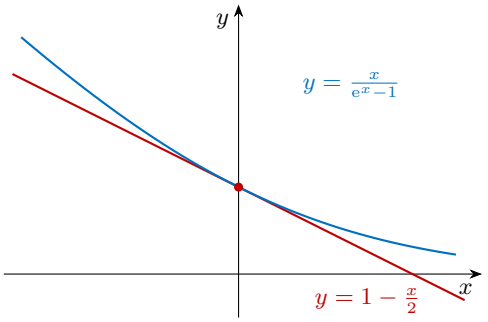
10.4.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

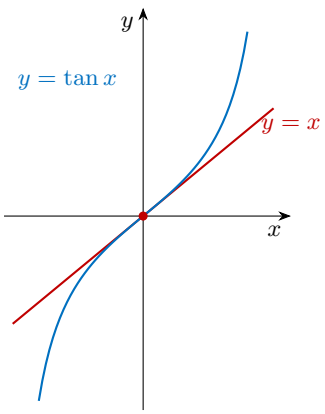
Proposition 14 : Soit f une fonction définie sur I, $a \in I$, et $p \geqslant 2$. On suppose que
$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + a_p h^p + o(h^p), \qquad \text{avec } a_p \neq 0.$$
Alors f est dérivable en a, sa tangente en a a pour équation $y = a_0 + a_1(x-a)$, et l'écart entre la courbe et la tangente vérifie $f(x) - a_0 - a_1(x-a) \sim a_p(x-a)^p$. Par conséquent :
- si p est pair, la courbe reste du même côté de sa tangente au voisinage de a, au-dessus si $a_p > 0$ et au-dessous si $a_p < 0$;
- si p est impair, la courbe traverse sa tangente en a.

La dérivabilité et l'équation de la tangente viennent de la proposition 10, par troncature à l'ordre 1 ; l'écart est donné par la proposition 13, et son signe est celui de $a_p h^p$, constant si p est pair, et qui change avec celui de h si p est impair. Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^p$, la formule de Taylor-Young donne $a_p = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}$: c'est la première dérivée d'ordre au moins 2 qui ne s'annule pas qui décide de la position.

Exemples :

- D'après le développement obtenu plus haut, $\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)$, la fonction étant prolongée par 1 en 0. Sa tangente en 0 est la droite $y = 1 - \frac{x}{2}$, et la courbe est au-dessus, puisque $\frac{1}{12} > 0$.
- On a $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$: la tangente en 0 est la première bissectrice, et la courbe la traverse, au-dessous pour $x < 0$ et au-dessus pour $x > 0$. On retrouve le point d'inflexion du chapitre 9, puisque $\tan'' x = 2\tan x(1 + \tan^2 x)$ change de signe en 0.





À gauche, l'écart entre la courbe et sa tangente est équivalent à $\frac{x^2}{12}$, positif des deux côtés : la courbe reste au-dessus. À droite, l'écart est équivalent à $\frac{x^3}{3}$, qui change de signe avec x : la courbe traverse sa tangente.

10.4.3 Extrema

Proposition 15 : *(Conditions d'ordre 2.)* Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, et a un point intérieur à I.

- *Condition nécessaire :* si f admet un minimum local en a, alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geqslant 0$.
- *Condition suffisante :* si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f admet en a un minimum local strict.

Les énoncés pour un maximum s'obtiennent en remplaçant f par $-f$.

∘ Démonstration :

▷ *Condition suffisante.* Si $f'(a) = 0$, la formule de Taylor-Young donne $f(a+h) - f(a) = \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^2)$. Si $f''(a) > 0$, la proposition 13 montre que $f(a+h) - f(a)$ a le signe de $\frac{f''(a)}{2}h^2$, strictement positif pour $h \neq 0$ voisin de 0.

▷ *Condition nécessaire.* Si f admet un minimum local en a, point intérieur, alors $f'(a) = 0$ (chapitre 9, proposition 2). Si l'on avait $f''(a) < 0$, la condition suffisante appliquée à $-f$ donnerait $f(a+h) < f(a)$ pour $h \neq 0$ voisin de 0, ce qui contredit la minimalité de $f(a)$. □

Remarques :

- Les deux conditions ne se recouvrent pas : si $f'(a) = f''(a) = 0$, on ne peut pas conclure à l'ordre 2. Les fonctions $x \mapsto x^4$, $x \mapsto -x^4$ et $x \mapsto x^3$ vérifient toutes $f'(0) = f''(0) = 0$, et ont respectivement un minimum, un maximum et aucun extremum en 0.
- Dans ce cas, on pousse le développement plus loin. La fonction $f : x \mapsto \cos x + \frac{x^2}{2}$ vérifie $f'(0) = f''(0) = 0$, mais
$$f(x) = 1 + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$
et la proposition 13 montre que f admet un minimum local strict en 0.

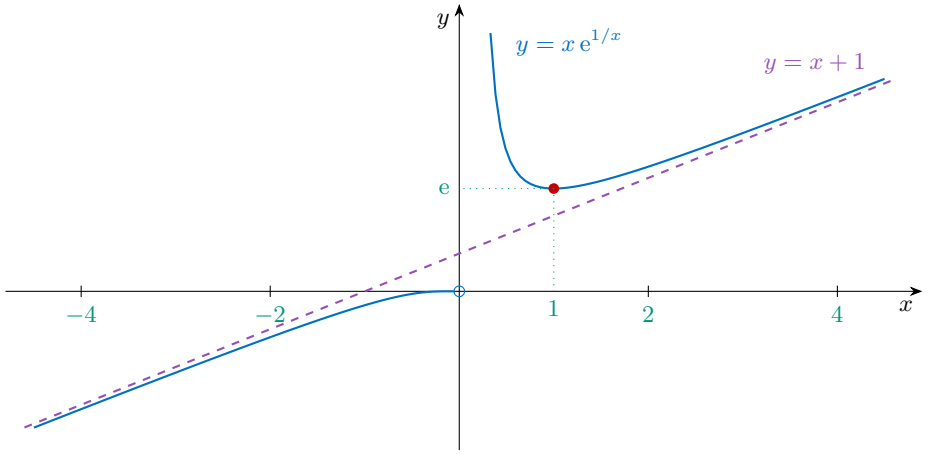
10.4.4 Asymptotes

♡ **Méthode : Pour étudier une branche infinie** de la courbe de f en $+\infty$:

- ▶ On pose $t = \frac{1}{x}$, et l'on cherche, à l'aide d'un développement limité en 0^+, une écriture de la forme
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x^k} + o\Big(\frac{1}{x^k}\Big), \qquad \text{avec } \gamma \neq 0 \text{ et } k \geqslant 1.$$
- ▶ La droite $y = \alpha x + \beta$ est alors **asymptote** à la courbe en $+\infty$, puisque l'écart $f(x) - (\alpha x + \beta)$ tend vers 0.
- ▶ Cet écart étant équivalent à $\frac{\gamma}{x^k}$, la courbe est au-dessus de l'asymptote si $\gamma > 0$, au-dessous si $\gamma < 0$, au voisinage de $+\infty$.

On procède de même en $-\infty$, où le signe de x^k intervient.

Exemple : Soit $f(x) = x\,\mathrm{e}^{1/x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Avec $t = \frac{1}{x}$, on a $\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, donc
$$x\,\mathrm{e}^{1/x} = x\Big(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big) = x + 1 + \frac{1}{2x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big) \qquad \text{quand } x \to \pm\infty.$$
La droite $y = x + 1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$; l'écart, équivalent à $\frac{1}{2x}$, est positif en $+\infty$ et négatif en $-\infty$. Par ailleurs $f'(x) = \mathrm{e}^{1/x}\big(1 - \frac{1}{x}\big)$ s'annule en 1, où f atteint sur $]0, +\infty[$ son minimum e, et f tend vers 0 en 0^- et vers $+\infty$ en 0^+.



La courbe bleue s'approche de l'asymptote violette par-dessus en $+\infty$ et par-dessous en $-\infty$, comme le prévoit le signe de $\frac{1}{2x}$; le point rouge est le minimum $(1, \mathrm{e})$ de la branche de droite.

10.5 Suites et développements asymptotiques

10.5.1 Relations de comparaison pour les suites

Une suite (u_n) est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, dont $+\infty$ est le seul point adhérent qui nous intéresse. Les définitions de la section 10.2 s'y appliquent avec $a = +\infty$: on écrit $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$, sans préciser que n tend vers $+\infty$. Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, ces relations signifient respectivement que $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée, tend vers 0, tend vers 1. Les règles de calcul (proposition 3), les opérations sur les équivalents (théorème 1), les propriétés conservées (proposition 5) et l'encadrement (proposition 6) restent valables, avec les mêmes démonstrations ; la hiérarchie $\ln n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n$ du chapitre 7 s'écrit désormais $\ln n = o(n^\alpha)$, $n^\alpha = o(q^n)$ pour $q > 1$, et ainsi de suite.

La substitution du théorème 1 relie les deux cadres : si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ et si $f \sim g$ au voisinage de a, alors $f(x_n) \sim g(x_n)$. C'est la caractérisation séquentielle des limites du chapitre 8, appliquée à la fonction ε.

Exemples :

- Comme $\frac{1}{n}$ tend vers 0, on a $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ et $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- D'après l'exercice 18 du chapitre 9, la somme harmonique vérifie $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

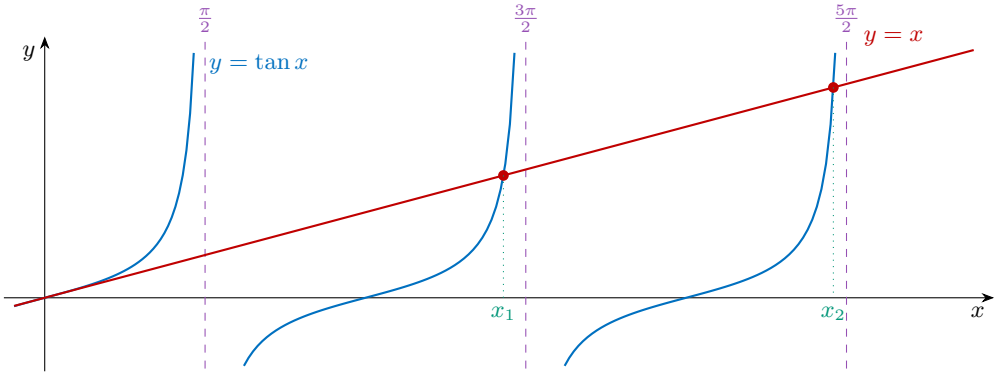
Remarque : L'erreur la plus répandue est d'élever un équivalent à une puissance qui dépend de n. On a $1+\frac{1}{n} \sim 1$, mais $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tend vers e, et non vers $1^n = 1$. Le théorème 1 n'autorise que des exposants α fixes ; pour une puissance variable, on passe à l'exponentielle et l'on développe le logarithme, comme à la section 10.4.

10.5.2 Développements asymptotiques

Un *développement asymptotique* d'une suite ou d'une fonction est une écriture comme somme de termes de plus en plus petits, chacun négligeable devant le précédent, suivie d'un reste négligeable devant le dernier. Les développements limités en sont un cas particulier ; on en rencontre d'autres, avec des logarithmes ou des puissances négatives. On présente trois situations typiques.

Une équation à paramètre

Pour $n \geqslant 1$, la fonction $\varphi : x \mapsto \tan x - x$ est dérivable sur $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, de dérivée $\tan^2 x$, positive et ne s'annulant qu'en $n\pi$: elle est strictement croissante, de limites $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes. L'équation $\tan x = x$ y a donc une unique solution x_n, et comme $\varphi(n\pi) = -n\pi < 0$, on a $n\pi < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$.



Chaque branche de la tangente, en bleu, coupe la droite $y = x$ une fois, juste avant l'asymptote verticale violette ; plus n est grand, plus la branche est haute quand elle rencontre la droite, et plus x_n est proche de $n\pi + \frac{\pi}{2}$.

Exemple : Développons x_n. On pose $y_n = x_n - n\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: par π-périodicité, $\tan y_n = x_n$, donc $y_n = \operatorname{Arctan} x_n$. Pour $t > 0$, $\operatorname{Arctan} t = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{t}$ (chapitre 5), d'où

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x_n}.$$

▷ *Premier terme.* L'encadrement $n\pi < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$ donne $x_n \sim n\pi$, donc $\frac{1}{x_n}$ tend vers 0, et $\operatorname{Arctan} \frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{n\pi}$. Ainsi $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

▷ *Terme suivant.* On réinjecte ce résultat : $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Comme $\operatorname{Arctan} u = u + O(u^3)$, on obtient

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Pour $n = 10$, la solution vaut $x_{10} \approx 32{,}956\,389$, et ce développement donne $32{,}956\,483$. L'écart, voisin de 10^{-4}, est bien de l'ordre de $\frac{1}{n^3}$. Chaque passage dans l'égalité $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x_n}$ gagne un ordre de précision.

Une fonction réciproque

Exemple : La fonction $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^x$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, de 0 à $+\infty$: elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur lui-même (chapitre 8). Sa réciproque g n'a pas d'expression à l'aide des fonctions usuelles, mais on peut la développer en $+\infty$. Pour $y > 0$, l'égalité $g(y)\mathrm{e}^{g(y)} = y$ s'écrit

$$g(y) + \ln g(y) = \ln y.$$

Comme g est croissante et non majorée, $g(y)$ tend vers $+\infty$, et $\ln g(y) = o\big(g(y)\big)$ par croissances comparées et substitution : $g(y)\big(1 + o(1)\big) = \ln y$, soit $g(y) \sim \ln y$. On en déduit $\ln g(y) = \ln \ln y + \ln \frac{g(y)}{\ln y} = \ln \ln y + o(1)$, par continuité du logarithme en 1, puis

$$g(y) \underset{y \to +\infty}{=} \ln y - \ln \ln y + o(1).$$

Le second terme n'est pas négligeable en pratique : pour $y = 10^8$, on a $g(y) \approx 15{,}67$, alors que $\ln y \approx 18{,}42$ et $\ln y - \ln \ln y \approx 15{,}51$. La convergence du reste vers 0 est lente, de l'ordre de $\frac{\ln \ln y}{\ln y}$.

Une suite récurrente

Pour les suites récurrentes, on combine les développements limités avec le résultat suivant, qui transforme une information sur les accroissements en information sur la suite.

Proposition 16 : *(Lemme de Cesàro, forme des accroissements.)* Si (v_n) est une suite réelle telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_{n+1} - v_n) = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{v_n}{n} = \ell$.

∘ Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, et N tel que $|v_{k+1} - v_k - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour $k \geqslant N$. Pour $n > N$, en sommant ces inégalités pour k allant de N à $n-1$, l'inégalité triangulaire donne $|v_n - v_N - (n-N)\ell| \leqslant (n-N)\varepsilon$, puis

$$\left|\frac{v_n}{n} - \ell\right| \leqslant \frac{|v_N - N\ell|}{n} + \varepsilon.$$

Le premier terme tend vers 0 à N fixé : il est inférieur à ε pour n assez grand, et alors $\left|\frac{v_n}{n} - \ell\right| \leqslant 2\varepsilon$. □

C'est une variante du théorème de Cesàro de l'exercice 46 du chapitre 7, appliqué à la suite des accroissements $v_{k+1} - v_k$.

Exemple : Soit $u_0 \in]0, \pi[$ et $u_{n+1} = \sin u_n$. Par récurrence, $u_n \in]0, 1]$ pour $n \geqslant 1$; comme $\sin x < x$ pour $x > 0$, la suite est décroissante et minorée par 0, donc converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$ tel que $\sin \ell = \ell$, c'est-à-dire $\ell = 0$. Pour préciser la vitesse, on utilise le développement $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} + o(1)$ obtenu à la section 10.4, et l'on substitue $x = u_n$, qui tend vers 0 :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}.$$

La proposition 16, appliquée à $v_n = \frac{1}{u_n^2}$, donne $\frac{1}{nu_n^2} \to \frac{1}{3}$, soit $u_n^2 \sim \frac{3}{n}$, et le théorème 1, avec l'exposant fixe $\frac{1}{2}$, conclut :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Pour $u_0 = 1$, le rapport $u_n / \sqrt{3/n}$ vaut environ 0,975 pour $n = 100$ et 0,997 pour $n = 1\,000$. La convergence vers 0 est très lente, comme le laissait prévoir $\sin'(0) = 1$: le point fixe n'est pas attractif au sens du chapitre 9, et l'on n'a pas de majoration géométrique.

10.5.3 La formule de Stirling

Théorème 6 : Formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Plus précisément, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leqslant n! \leqslant \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{1/(12n)}.$$

∘ Démonstration : On pose $u_n = \dfrac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+1/2}}$ pour $n \geqslant 1$, et l'on montre que (u_n) converge vers une limite $C > 0$; la valeur $C = \sqrt{2\pi}$ est admise.

▷ *Le rapport de deux termes.* Un calcul direct donne

$$\ln \frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{2t}\ln\frac{1+t}{1-t} - 1, \qquad \text{avec } t = \frac{1}{2n+1},$$

puisque $\frac{1+t}{1-t} = \frac{n+1}{n}$ et $\frac{1}{2t} = n + \frac{1}{2}$.

▷ *Un encadrement.* Pour $t \in [0, 1[$, on pose $\psi_1(t) = \ln\frac{1+t}{1-t} - 2t$ et $\psi_2(t) = \psi_1(t) - \frac{2t^3}{3(1-t^2)}$. Ces fonctions sont nulles en 0 et dérivables, avec

$$\psi_1'(t) = \frac{2}{1-t^2} - 2 = \frac{2t^2}{1-t^2} \geqslant 0, \qquad \psi_2'(t) = \frac{2t^2}{1-t^2} - \frac{2t^2(3-t^2)}{3(1-t^2)^2} = -\frac{4t^4}{3(1-t^2)^2} \leqslant 0.$$

Ainsi $\psi_1 \geqslant 0 \geqslant \psi_2$ sur $[0, 1[$ (chapitre 9, théorème 7). En divisant par $2t$, on obtient

$$0 \leqslant \frac{1}{2t}\ln\frac{1+t}{1-t} - 1 \leqslant \frac{t^2}{3(1-t^2)}, \qquad \text{et pour } t = \frac{1}{2n+1}, \quad \frac{t^2}{3(1-t^2)} = \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}.$$

▷ *Deux suites monotones.* On a donc $0 \leqslant \ln u_n - \ln u_{n+1} \leqslant \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$. La suite $(\ln u_n)$ est décroissante, et la suite $\left(\ln u_n - \frac{1}{12n}\right)$ est croissante, donc minorée par son premier terme $\ln u_1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$, puisque

$u_1 = \mathrm{e}$. La suite $(\ln u_n)$, décroissante et minorée, converge vers un réel L (chapitre 7), et l'on a, pour tout n,

$$\ln u_n - \frac{1}{12n} \leqslant L \leqslant \ln u_n.$$

Avec $C = \mathrm{e}^L > 0$, cela s'écrit $C \leqslant u_n \leqslant C\mathrm{e}^{1/(12n)}$, et $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

▷ *La constante.* L'égalité $C = \sqrt{2\pi}$ est admise : elle se démontre à l'aide des intégrales de Wallis, que le chapitre 18 permettra de calculer. C'est la seule difficulté contournée. □

Remarques :

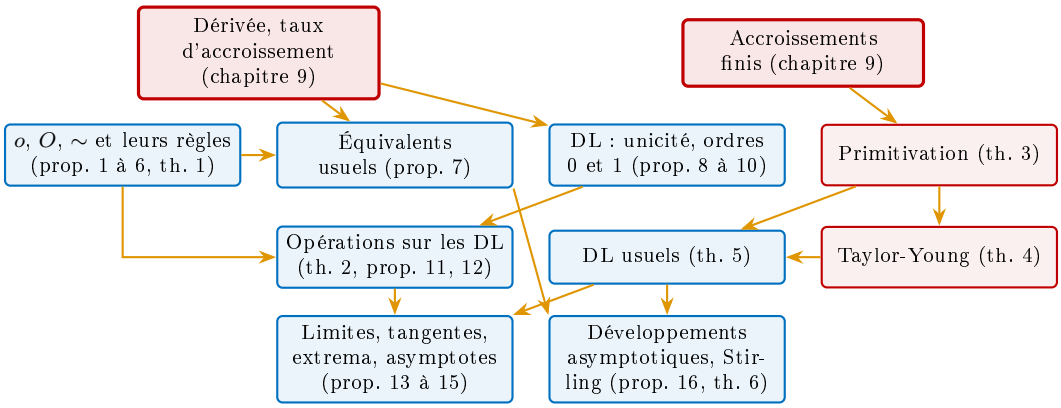
- En prenant le logarithme, et puisque $\ln u_n = \ln\sqrt{2\pi} + o(1)$, on obtient le développement asymptotique

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \ln\sqrt{2\pi} + o(1), \qquad \text{et en particulier} \qquad \ln(n!) \sim n\ln n.$$

- La formule de Stirling, à l'inverse des développements limités, porte sur une quantité qui tend vers l'infini. Elle permet par exemple d'estimer des coefficients binomiaux, ce qui servira en probabilités au chapitre 21, comme $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$, qui s'obtient en écrivant $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

10.6 Bilan

Le chapitre repose sur deux résultats du chapitre 9 : la caractérisation de la dérivabilité par une limite, d'où viennent les équivalents usuels et les développements à l'ordre 1, et l'inégalité des accroissements finis, d'où vient la primitivation, puis la formule de Taylor-Young. Le schéma suivant montre comment les résultats s'enchaînent ; une flèche signifie « sert à démontrer ».



Les deux théorèmes encadrés de rouge sont le cœur du chapitre : la primitivation transforme l'inégalité des accroissements finis en un outil de développement, et la formule de Taylor-Young en découle par récurrence. Le chapitre 18 la complétera par des formules globales, et le chapitre 20 utilisera systématiquement les équivalents pour étudier les séries.

Le tableau suivant rassemble les outils du chapitre selon la question posée.

Question	Outil	Référence
limite d'un produit ou d'un quotient	équivalents des facteurs	th. 1, prop. 7
limite d'une somme qui se compense	DL jusqu'au premier terme non nul	proposition 13
développement d'une expression	DL usuels et opérations	th. 2 et 5, prop. 11 et 12
fonction connue par sa dérivée	primitivation	théorème 3
position par rapport à la tangente	premier terme de degré au moins 2	proposition 14
nature d'un point critique	signe de f'', ou DL plus poussé	proposition 15
branche infinie	DL en 0 de $t \mapsto f(1/t)$	section 10.4
vitesse d'une suite récurrente	DL et lemme de Cesàro	proposition 16