Chapitre 14

Espaces vectoriels et applications linéaires

14.1 Introduction historique

Je ne suis pas encor content de l'Algebre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Geometrie. C'est pourquoy lors qu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encor une autre Analyse proprement geometrique ou lineaire, qui nous exprime directement situm, comme l'Algebre exprime magnitudinem.

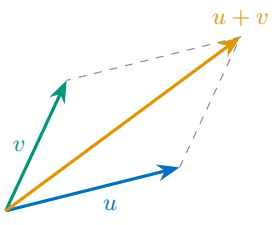
Gottfried Wilhelm Leibniz - Lettre à Christiaan Huygens, 8 septembre 1679

14.1.1 Le vœu de Leibniz

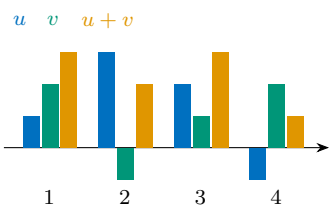
Depuis Descartes, on calcule en géométrie sur des nombres : on choisit un repère, on remplace chaque point par ses coordonnées, et l'algèbre fait le reste. Leibniz regrette ce détour, qui dépend du repère et cache la figure : il voudrait calculer directement sur les positions (*situs*), comme l'algèbre calcule sur les grandeurs (*magnitudo*). Son vœu met deux siècles à être exaucé. En 1827, **Möbius** additionne des points affectés de masses dans son *Calcul barycentrique* ; en 1835, **Bellavitis** calcule sur des segments orientés, ses « équipollences » ; en 1843, **Hamilton** invente les quaternions et nomme bientôt *vecteurs* leur partie imaginaire. Surtout, en 1844, **Hermann Grassmann**, professeur de lycée à Stettin, publie son *Ausdehnungslehre*, où il additionne et multiplie par des nombres des grandeurs « étendues » en un nombre quelconque de dimensions ; deux ans plus tard, il remporte le prix proposé par la société Jablonowski de Leipzig pour développer, précisément, la caractéristique géométrique de Leibniz. Son livre, difficile, reste presque sans lecteurs, jusqu'à ce que **Peano** en tire, en 1888, la première définition axiomatique de ce qu'il appelle un « système linéaire » : c'est, à quelques mots près, la définition d'un espace vectoriel donnée dans ce chapitre. Après **Weyl** (1918) et **Banach** (1922), elle devient le langage commun de l'analyse et de la géométrie.

14.1.2 Un même calcul dans trois mondes

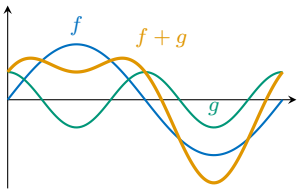
Les objets diffèrent, mais on y calcule de la même façon : on les additionne, on les multiplie par des nombres, et les règles de calcul sont les mêmes. Une flèche du plan s'ajoute à une autre par la règle du parallélogramme ; un quadruplet (u_1, u_2, u_3, u_4) est une fonction de $\{1, 2, 3, 4\}$ dans $\mathbb{R}$, que l'on ajoute à une autre indice par indice ; une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'ajoute à une autre point par point. Le chapitre dégage ce qui est commun à ces trois calculs et l'étudie une fois pour toutes.



flèches du plan



quadruplets de $\mathbb{R}^4$



fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

14.2 Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; ses éléments sont appelés des **scalaires**. Le chapitre 11 a défini les groupes abéliens ; un espace vectoriel est un groupe abélien sur lequel les scalaires agissent par multiplication.

14.2.1 Définition

Définition : Un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** est un ensemble E muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une **loi externe** $\mathbb{K} \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$, telles que $(E, +)$ soit un groupe abélien et que, pour tous λ, $\mu \in \mathbb{K}$ et tous x, $y \in E$:

(i) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;

(ii) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;

(iii) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$;

(iv) $1 \cdot x = x$.

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs**, et le neutre de $(E, +)$ est le **vecteur nul**, noté 0_E ou 0.

On écrit souvent λx au lieu de $\lambda \cdot x$. Le mot « vecteur » désigne désormais tout élément d'un espace vectoriel, que ce soit un n-uplet, un polynôme ou une fonction : il ne s'agit plus nécessairement d'une flèche.

Proposition 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.

(i) $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$ et $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.

(ii) $\lambda x = 0_E \iff (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)$.

(iii) $(-1) \cdot x = -x$, et plus généralement $(-\lambda)x = -(\lambda x) = \lambda(-x)$.

∘ Démonstration :

▷ *(i)* Par (ii), $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, et l'on simplifie dans le groupe $(E, +)$: $0 \cdot x = 0_E$. De même, $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$ par (i), d'où $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.

▷ *(ii)* Le sens réciproque est le point (i). Si $\lambda x = 0_E$ et $\lambda \neq 0$, alors, par (iii), (iv) et le point (i),

$$x = 1 \cdot x = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot x = \lambda^{-1} \cdot (\lambda x) = \lambda^{-1} \cdot 0_E = 0_E.$$

▷ *(iii)* On a $x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0_E$, donc $(-1) \cdot x$ est l'opposé de x. Les autres égalités s'en déduisent par (iii) : $(-\lambda)x = (-1)(\lambda x) = -(\lambda x)$, et $\lambda(-x) = \lambda((-1)x) = (-\lambda)x$. □

Remarque : Le point (ii) utilise que λ est inversible : c'est ici que sert le fait que $\mathbb{K}$ est un corps. L'axiome $1 \cdot x = x$ n'est pas une formalité : sur $E = \mathbb{R}^2$, la loi externe $\lambda \cdot x = 0$ vérifie les trois premiers axiomes, mais pas le quatrième, et elle ne vérifie pas le point (ii).

14.2.2 Les espaces de référence

Proposition 2 : Les ensembles suivants, munis des lois indiquées, sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

(i) Si $E_1, \dots, E_p$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, le produit $E_1 \times \cdots \times E_p$, avec les lois composante par composante :

$$(x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p), \qquad \lambda(x_1, \dots, x_p) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p).$$

En particulier, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de vecteur nul $(0, \dots, 0)$.

(ii) Si X est un ensemble et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble $\mathcal{F}(X, E)$ des applications de X dans E, avec les lois point par point : $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$ et $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$. En particulier, l'espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ et l'espace $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ des fonctions d'un intervalle I dans $\mathbb{K}$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

(iii) L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes, avec l'addition et la multiplication par un scalaire du chapitre 13.

(iv) Tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, en restreignant la loi externe à $\mathbb{R} \times E$. En particulier, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

∘ Démonstration :

▷ *(i) et (ii)* Le chapitre 11 a montré que le produit de groupes abéliens et l'ensemble des applications d'un ensemble dans un groupe abélien sont des groupes abéliens pour ces additions. Chacun des quatre axiomes se vérifie composante par composante, ou point par point : par exemple, pour $f \in \mathcal{F}(X, E)$ et $t \in X$,

$$\big((\lambda+\mu)f\big)(t) = (\lambda+\mu)f(t) = \lambda f(t) + \mu f(t) = (\lambda f + \mu f)(t),$$

la deuxième égalité étant l'axiome (ii) dans E. Les espaces $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ sont les cas $X = \mathbb{N}$ et $X = I$, avec $E = \mathbb{K}$, qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour ses propres lois.

▷ *(iii)* Le chapitre 13 a montré que $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau, et que λP est le produit du polynôme constant λ par P. Les axiomes (i) à (iii) sont alors la distributivité et l'associativité du produit dans cet anneau, et (iv) dit que 1 est neutre.

▷ *(iv)* Les quatre axiomes, vrais pour tous scalaires complexes, le sont en particulier pour les scalaires réels. □

Remarques :

- Un n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ n'est autre qu'une application $k \mapsto x_k$ de $[\![1, n]\!]$ dans $\mathbb{K}$, et une suite est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$: les lois de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sont les lois point par point de (ii). C'est ce que montrait le deuxième panneau de la figure de l'introduction.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour la multiplication usuelle, puisque $\mathrm{i} \cdot 1 = \mathrm{i}$ n'est pas réel. Le corps des scalaires fait partie de la donnée : $\mathbb{C}$, vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, est le plan du chapitre 4, où un nombre complexe est une flèche.
- Le chapitre 16 étudiera un dernier espace de référence, celui des matrices à n lignes et p colonnes, qui se comporte comme $\mathbb{K}^{np}$.

14.2.3 Combinaisons linéaires

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Une **combinaison linéaire** d'une famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E est un vecteur de la forme $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires. Par convention, la seule combinaison linéaire de la famille vide est 0_E.
- Si A est une partie de E, finie ou non, une **combinaison linéaire d'éléments de A** est une combinaison linéaire d'une famille finie $(a_1, \dots, a_n)$ d'éléments de A.

La somme $\sum \lambda_k x_k$ est une somme finie au sens du chapitre 3 ; elle ne dépend pas de l'ordre des termes, puisque l'addition de E est commutative. Une combinaison linéaire ne fait donc jamais intervenir qu'un nombre fini de vecteurs, même lorsque la partie A est infinie : aucune notion de limite n'intervient dans ce chapitre.

Exemples :

- Dans $\mathbb{K}[X]$, l'écriture $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de la proposition 2 du chapitre 13 dit qu'un polynôme de degré au plus n est une combinaison linéaire de la famille finie $(1, X, \dots, X^n)$. Tout polynôme est donc une combinaison linéaire d'éléments de la partie infinie $\{X^k \mid k \in \mathbb{N}\}$, mais chacun n'en utilise qu'un nombre fini.
- Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction ch est la combinaison linéaire $\frac{1}{2}\exp + \frac{1}{2}\varphi$, où $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ (chapitre 5).
- Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(1, 3, -4)$ est la combinaison linéaire $(1, 0, -1) + 3(0, 1, -1)$; en revanche, $(0, 0, 1)$ n'est pas combinaison linéaire de ces deux vecteurs, puisque toute combinaison $a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1) = (a, b, -a - b)$ a une somme de coordonnées nulle.

14.3 Sous-espaces vectoriels

14.3.1 Définition et caractérisation

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est un **sous-espace vectoriel** de E si elle contient 0_E et si elle est stable par addition et par multiplication par un scalaire : pour tous x, $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $x+y \in F$ et $\lambda x \in F$.

Proposition 3 : Soit F une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

(i) F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F est non vide et

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in F^2,\quad \lambda x + y \in F.$$

(ii) Un sous-espace vectoriel F de E, muni des lois induites, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; il contient toutes les combinaisons linéaires de ses éléments.

∘ Démonstration :

▷ *(i)* Un sous-espace contient 0_E, donc est non vide, et $\lambda x + y$ lui appartient comme somme de $\lambda x \in F$ et de $y \in F$. Réciproquement, si F est non vide et vérifie la condition, on choisit $x_0 \in F$; alors $0_E = (-1)x_0 + x_0 \in F$ par la proposition 1, puis $x + y = 1 \cdot x + y \in F$ et $\lambda x = \lambda x + 0_E \in F$.

▷ *(ii)* Les lois induites sont bien définies par la stabilité. L'opposé de $x \in F$ est $(-1)x \in F$, donc F est un sous-groupe de $(E,+)$ au sens du chapitre 11, donc un groupe abélien ; les quatre axiomes, vrais dans E, le sont dans F. Enfin, une récurrence sur le nombre de termes montre que F contient toute combinaison linéaire de ses éléments. □

La proposition 3 est la façon usuelle de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel : on le voit comme une partie d'un espace de référence de la proposition 2, et l'on vérifie la caractérisation, sans revenir aux huit axiomes.

Exemples :

- Les parties $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces de E ; le premier est le **sous-espace nul**.
- Si $x \in E$ est non nul, $\mathbb{K}x = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ est un sous-espace, appelé la **droite vectorielle** dirigée par x. Dans $\mathbb{R}^3$, si $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, l'ensemble des (x,y,z) tels que $ax+by+cz=0$ est un sous-espace, appelé un **plan vectoriel** ; la section 14.8 en fera un hyperplan.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$, d'après la proposition 3 du chapitre 13 : $\deg(\lambda P + Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q) \leqslant n$. Il contient le polynôme nul, de degré $-\infty$.
- L'ensemble des solutions $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ d'un système linéaire *homogène* de n équations à p inconnues (chapitre 3) est un sous-espace de $\mathbb{K}^p$: si deux p-uplets vérifient une équation $a_1x_1 + \cdots + a_px_p = 0$, toute combinaison linéaire des deux la vérifie aussi.
- Dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$, les fonctions continues, dérivables, de classe $\mathcal{C}^k$ forment des sous-espaces $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$, $\mathcal{D}(I,\mathbb{K})$, $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{K})$, par les théorèmes d'opérations des chapitres 8 et 9. Les solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ forment un sous-espace de $\mathcal{C}^2(I,\mathbb{K})$: c'est le principe de superposition du chapitre 6.
- Dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, les suites bornées, les suites convergentes, et les suites vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout n (chapitre 7) forment des sous-espaces.

Remarques :

- L'erreur la plus répandue est d'oublier que le vecteur nul doit appartenir au sous-espace ; c'est pourtant le test le plus rapide pour montrer qu'une partie *n'en est pas* un. La droite d'équation $x+y=1$ dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des polynômes de degré exactement n et l'ensemble des fonctions f telles que $f(0)=1$ ne contiennent pas le vecteur nul : ce ne sont pas des sous-espaces.
- Contenir 0 ne suffit pas. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$, réunion des deux axes, contient $(1,0)$ et $(0,1)$, mais pas leur somme $(1,1)$; l'ensemble $\mathbb{R}_+^2$ contient $(1,1)$, mais pas $(-1)(1,1)$.

♡ **Méthode : Pour montrer qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel :**

- ▶ On précise l'espace de référence E dans lequel F est contenu, et l'on vérifie cette inclusion.
- ▶ On vérifie que $0_E \in F$; si ce n'est pas le cas, F n'est pas un sous-espace.
- ▶ On fixe $\lambda \in \mathbb{K}$ et x, $y \in F$, et l'on montre que $\lambda x + y \in F$, en revenant à la propriété qui définit F.

Il est souvent plus rapide de reconnaître F comme une intersection de sous-espaces, comme un sous-espace engendré (section 14.3.3) ou comme le noyau d'une application linéaire (section 14.6).

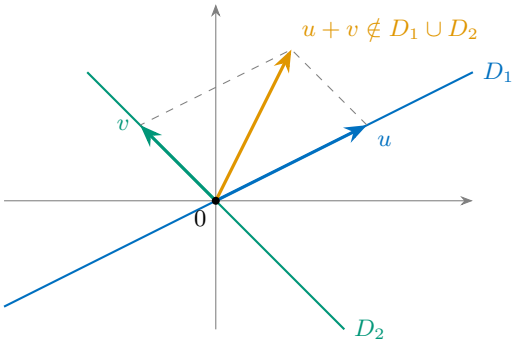
14.3.2 Intersection et réunion

Proposition 4 : L'intersection d'une famille quelconque $(F_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels de E, avec I non vide, est un sous-espace vectoriel de E.

∘ Démonstration : Le vecteur nul appartient à chaque F_i, donc à l'intersection. Si x et y appartiennent à tous les F_i et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x+y$ appartient à chaque F_i, qui est un sous-espace, donc à leur intersection. □

Exemple : Un système homogène de n équations à p inconnues définit n sous-espaces de $\mathbb{K}^p$, un par équation, et l'ensemble de ses solutions est leur intersection : on retrouve le quatrième exemple de la section précédente.

La réunion, en revanche, se comporte mal, et la figure ci-dessous en montre la raison.



La somme d'un vecteur de D_1 et d'un vecteur de D_2 sort de la réunion des deux droites : la réunion $D_1 \cup D_2$ n'est pas stable par addition. La proposition suivante dit que c'est toujours le cas, sauf si l'un des deux sous-espaces contient l'autre.

Proposition 5 : Soit F et G deux sous-espaces de E. La réunion $F \cup G$ est un sous-espace de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

∘ Démonstration : Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ est un sous-espace, et de même si $G \subset F$. Réciproquement, on raisonne par contraposition : supposons que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$, et choisissons $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. Si $x+y$ appartenait à F, alors $y = (x+y)-x$ appartiendrait à F ; s'il appartenait à G, alors $x = (x+y)-y$ appartiendrait à G. Les deux cas sont exclus, donc $x + y \notin F \cup G$, qui n'est pas un sous-espace. □

14.3.3 Sous-espace engendré

Le défaut de la réunion conduit à chercher le plus petit sous-espace qui contient une partie donnée. La proposition 4 permet de le définir.

Définition : Soit A une partie de E. Le **sous-espace engendré** par A, noté $\mathrm{Vect}(A)$, est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A. Pour une famille $(x_i)_{i\in I}$, on note $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$ le sous-espace engendré par l'ensemble $\{x_i \mid i \in I\}$, et $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ si la famille est finie.

L'intersection porte sur une famille non vide de sous-espaces, puisque E lui-même contient A : $\mathrm{Vect}(A)$ est donc un sous-espace, par la proposition 4.

Théorème 1 : Description du sous-espace engendré :
Soit A une partie de E.

(i) $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace de E contenant A : tout sous-espace contenant A contient $\mathrm{Vect}(A)$.

(ii) $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A ; en particulier, $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$ et

$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \;\middle|\; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

∘ Démonstration :

▷ *(i)* Le sous-espace $\mathrm{Vect}(A)$ contient A, puisque chacun des sous-espaces dont il est l'intersection contient A ; et tout sous-espace F contenant A fait partie de ces sous-espaces, donc contient leur intersection.

▷ *(ii)* Notons C l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A. C'est un sous-espace : il contient 0_E, combinaison vide, et si $x = \sum \lambda_k a_k$ et $y = \sum \mu_\ell b_\ell$ sont deux telles combinaisons, $\lambda x + y$ en est encore une, de la famille obtenue en mettant bout à bout les a_k et les b_ℓ. Il contient A, puisque $a = 1 \cdot a$. Par (i), $\mathrm{Vect}(A) \subset C$. Réciproquement, $\mathrm{Vect}(A)$ est un sous-espace contenant A, donc il contient toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A par la proposition 3 : $C \subset \mathrm{Vect}(A)$. □

Proposition 6 : Le sous-espace $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ ne change pas lorsqu'on effectue l'une des opérations suivantes sur la famille :

(i) échanger deux vecteurs ;

(ii) multiplier un vecteur par un scalaire *non nul* ;

(iii) ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des autres ;

(iv) supprimer un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.

∘ Démonstration : Notons $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et F' le sous-espace engendré par la nouvelle famille. Dans chacun des cas, les vecteurs de la nouvelle famille sont des combinaisons linéaires des x_k, donc appartiennent à F, et $F' \subset F$ par le théorème 1. Réciproquement, chaque x_k est combinaison linéaire des vecteurs de la nouvelle famille : dans le cas (ii), $x_k = \lambda^{-1}(\lambda x_k)$; dans le cas (iii), si x_1 est remplacé par $x_1' = x_1 + \sum_{k \geqslant 2} \mu_k x_k$, alors $x_1 = x_1' - \sum_{k \geqslant 2} \mu_k x_k$; dans le cas (iv), le vecteur supprimé est par hypothèse une combinaison des autres. Donc $F \subset F'$. □

Ce sont les opérations élémentaires de l'algorithme du pivot (chapitre 3) : elles servent à simplifier une famille génératrice sans changer le sous-espace engendré.

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}^3$, le plan P d'équation $x + y + z = 0$ est égal à $\mathrm{Vect}\big((1,0,-1),(0,1,-1)\big)$. En effet, ces deux vecteurs sont dans P, donc le sous-espace qu'ils engendrent aussi, par le théorème 1 ; réciproquement, si $(x,y,z) \in P$, alors $z = -x - y$ et

  $$(x,y,z) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1).$$

  On a ainsi « résolu » l'équation du plan en exprimant z en fonction des deux paramètres x et y : une équation devient une famille génératrice.

- D'après le chapitre 6, les solutions réelles de $y'' - y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda \mathrm{e}^x + \mu \mathrm{e}^{-x}$: elles forment le sous-espace $\mathrm{Vect}(\exp, \varphi)$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, où $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Comme $\mathrm{ch} = \frac{1}{2}(\exp + \varphi)$ et $\mathrm{sh} = \frac{1}{2}(\exp - \varphi)$, la proposition 6 donne aussi $\mathrm{Vect}(\exp, \varphi) = \mathrm{Vect}(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$: on passe de la première famille à la seconde en ajoutant φ à exp, en retranchant de φ la moitié du nouveau vecteur, puis en multipliant les deux vecteurs obtenus par $\frac{1}{2}$ et -1.

14.4 Familles de vecteurs

Une famille de vecteurs peut avoir deux qualités : engendrer tout l'espace, et n'avoir aucune redondance. Les bases sont les familles qui ont les deux à la fois.

14.4.1 Familles génératrices

Définition :

- Une famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E est **génératrice** de E si $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = E$, c'est-à-dire si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$:
$$\forall y \in E,\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$
- Plus généralement, une famille quelconque $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice de E si tout vecteur de E est combinaison linéaire d'une sous-famille finie de $(x_i)_{i\in I}$, c'est-à-dire, par le théorème 1, si $\text{Vect}(x_i)_{i\in I} = E$. Une partie A de E est génératrice si $\text{Vect}(A) = E$.

Exemples :

- Dans $\mathbb{K}^n$, notons e_k le n-uplet dont la k-ième coordonnée vaut 1 et les autres 0. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ engendre $\mathbb{K}^n$, puisque
$$(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$
- La famille $(1, X, \dots, X^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$, et la famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{K}[X]$.
- Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est engendré par $(1, \mathrm{i})$, puisque $z = \text{Re}(z) \cdot 1 + \text{Im}(z) \cdot \mathrm{i}$; le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est engendré par le seul vecteur 1, puisque $z = z \cdot 1$.

Toute famille qui contient une famille génératrice est génératrice. Inversement, d'après la proposition 6, on peut retirer d'une famille génératrice finie un vecteur qui est combinaison linéaire des autres, sans qu'elle cesse d'être génératrice.

14.4.2 Familles libres

Définition :

- Une famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E est **libre** si
$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$
On dit aussi que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont **linéairement indépendants**. Dans le cas contraire, la famille est **liée**, et une égalité $\sum \lambda_k x_k = 0$ avec des λ_k non tous nuls est une **relation de dépendance linéaire**.
- Plus généralement, une famille quelconque $(x_i)_{i\in I}$ est libre si toutes ses sous-familles finies sont libres ; elle est liée sinon. Une partie A de E est libre si la famille $(a)_{a\in A}$ l'est.

Deux vecteurs x et y sont dits **colinéaires** si l'un est un multiple scalaire de l'autre.

Proposition 7 : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

(i) Une famille (x) à un seul vecteur est libre si et seulement si $x \neq 0$.

(ii) Une famille (x, y) de deux vecteurs est liée si et seulement si x et y sont colinéaires.

(iii) Pour $n \geqslant 2$, la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres. En particulier, une famille qui contient le vecteur nul, ou deux fois le même vecteur, est liée.

(iv) Une sous-famille d'une famille libre est libre ; une famille qui contient une sous-famille liée est liée.

∘ Démonstration :

▷ *(i)* C'est le point (ii) de la proposition 1 : $\lambda x = 0$ entraîne $\lambda = 0$ si et seulement si $x \neq 0$.

▷ *(iii)* Si $\sum \lambda_k x_k = 0$ avec par exemple $\lambda_j \neq 0$, alors

$$x_j = -\sum_{k \neq j} \frac{\lambda_k}{\lambda_j} x_k$$

est combinaison linéaire des autres vecteurs. Réciproquement, si $x_j = \sum_{k \neq j} \mu_k x_k$, alors $x_j - \sum_{k \neq j} \mu_k x_k = 0$ est une relation de dépendance, dont le coefficient de x_j vaut 1. Si $x_j = 0$, il est la combinaison nulle des autres ; si $x_j = x_k$ avec $j \neq k$, il est combinaison des autres.

▷ *(ii)* C'est le cas $n = 2$ de (iii) : (x, y) est liée si et seulement si x est multiple de y ou y multiple de x.

▷ *(iv)* Une relation de dépendance entre les vecteurs d'une sous-famille est une relation de dépendance de la famille entière, en donnant le coefficient 0 aux vecteurs absents. Les deux assertions sont contraposées l'une de l'autre. □

Remarque : Dans (ii), l'erreur la plus répandue est d'écrire « x et y sont colinéaires si et seulement s'il existe λ tel que $y = \lambda x$ » : c'est faux lorsque $x = 0$ et $y \neq 0$. La famille $(0, y)$ est liée, et $0 = 0 \cdot y$, mais y n'est pas un multiple de 0.

Proposition 8 : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E et $x \in E$. La famille $(x_1, \dots, x_n, x)$ est libre si et seulement si $x \notin \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

∘ Démonstration : Si $x \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, la famille agrandie est liée par la proposition 7 (iii). Réciproquement, supposons $x \notin \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda x = 0$. Si λ était non nul, $x = -\lambda^{-1} \sum \lambda_k x_k$ appartiendrait à $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$; donc $\lambda = 0$, et la relation devient $\sum \lambda_k x_k = 0$, qui entraîne $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, puisque la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre. □

Proposition 9 : Une famille finie $(P_1, \dots, P_n)$ de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts est libre dans $\mathbb{K}[X]$. En particulier, toute famille $(P_k)_{k \in I}$ de polynômes telle que $\deg P_k = k$ pour tout k est libre.

∘ Démonstration : On numérote les polynômes de sorte que $\deg P_1 < \cdots < \deg P_n$, et l'on suppose $\sum \lambda_k P_k = 0$ avec des λ_k non tous nuls. Soit m le plus grand indice tel que $\lambda_m \neq 0$. Alors $\lambda_m P_m = -\sum_{k<m} \lambda_k P_k$; le membre de gauche est de degré $\deg P_m$, et celui de droite de degré au plus $\deg P_{m-1} < \deg P_m$ par la proposition 3 du chapitre 13. C'est absurde. La seconde assertion en découle, puisqu'une sous-famille finie de $(P_k)_{k \in I}$ est formée de polynômes de degrés distincts. □

♡ **Méthode : Pour montrer qu'une famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ est libre :**

- ▶ On se donne des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$.
- ▶ On traduit cette égalité en équations sur les λ_k : dans $\mathbb{K}^p$, on obtient un système homogène, que l'on résout par la méthode du pivot ; pour des polynômes, on identifie les coefficients ou l'on évalue en des points bien choisis ; pour des fonctions, on évalue, on dérive, ou l'on étudie le comportement en un point ou à l'infini.
- ▶ On conclut que tous les λ_k sont nuls.

Pour montrer qu'une famille est liée, il suffit au contraire d'exhiber une relation de dépendance.

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\big((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\big)$ est libre. En effet, l'égalité

$$a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(0,1,1) = 0$$

donne le système $a + b = 0$, $a + c = 0$, $b + c = 0$, dont la seule solution est $a = b = c = 0$.

- Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la famille $(\cos, \sin)$ est libre : si $\lambda \cos + \mu \sin = 0$, l'évaluation en 0 donne $\lambda = 0$, et l'évaluation en $\frac{\pi}{2}$ donne $\mu = 0$.

- Soit $a_1 < \cdots < a_n$ des réels, et $\varphi_k : x \mapsto \mathrm{e}^{a_k x}$. La famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On raisonne par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant clair puisque φ_1 ne s'annule pas. Si $\sum \lambda_k \varphi_k = 0$, on divise par $\mathrm{e}^{a_n x}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \, \mathrm{e}^{(a_k - a_n)x} + \lambda_n = 0.$$

  Chaque exponentielle tend vers 0 en $+\infty$, puisque $a_k - a_n < 0$; donc $\lambda_n = 0$, et l'hypothèse de récurrence donne $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.

- Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la famille $(1, \mathrm{i})$ est libre, puisque $a + \mathrm{i}b = 0$ avec a, b réels entraîne $a = b = 0$. Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la même famille est liée, puisque $\mathrm{i} \cdot 1 - 1 \cdot \mathrm{i} = 0$: la liberté dépend du corps des scalaires.

14.4.3 Bases

Définition : Une **base** de E est une famille de vecteurs de E à la fois libre et génératrice.

Théorème 2 : Bases et coordonnées :
Une famille finie $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si tout vecteur x de E s'écrit de façon unique

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k, \qquad \text{avec } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont alors les **coordonnées** de x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

∘ Démonstration : L'existence de l'écriture pour tout x signifie exactement que la famille est génératrice. Il reste à voir que l'unicité équivaut à la liberté. Si la famille est libre et si $\sum \lambda_k e_k = \sum \mu_k e_k$, alors $\sum (\lambda_k - \mu_k) e_k = 0$, donc $\lambda_k = \mu_k$ pour tout k. Réciproquement, si l'écriture est unique, une combinaison linéaire nulle $\sum \lambda_k e_k = 0 = \sum 0 \cdot e_k$ a tous ses coefficients nuls. □

Exemples :

- Les familles $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$, $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ et $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ sont des bases, qualifiées de **canoniques** : elles sont génératrices (section 14.4.1), et libres, par le calcul pour la première et par la proposition 9 pour les deux autres. Les coordonnées d'un n-uplet dans la base canonique sont ses composantes, celles d'un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ sont ses coefficients.
- La famille $(1, \mathrm{i})$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$; les coordonnées de z y sont $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$. C'est le repère du plan complexe du chapitre 4.

Pour la base infinie $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$, le théorème 2 garde un sens : tout polynôme est combinaison linéaire d'une sous-famille finie $(1, X, \ldots, X^n)$, et deux telles écritures ont les mêmes coefficients, une fois complétées par des coefficients nuls. C'est l'unicité de l'écriture d'un polynôme établie au chapitre 13 : les coordonnées d'un polynôme dans la base canonique sont ses coefficients.

Proposition 10 : *(Polynômes à degrés échelonnés.)* Soit $n \in \mathbb{N}$.

(i) Si $P_0, \ldots, P_n$ sont des polynômes tels que $\deg P_k = k$ pour tout k, la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

(ii) Si $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes telle que $\deg P_k = k$ pour tout k, c'est une base de $\mathbb{K}[X]$.

∘ Démonstration : Les deux familles sont libres par la proposition 9. Montrons par récurrence sur $d \in \mathbb{N}$ que tout polynôme de degré au plus d est combinaison linéaire de $P_0, \ldots, P_d$. Pour $d = 0$, un polynôme constant c vaut $\frac{c}{P_0} P_0$, puisque P_0 est une constante non nulle. Si la propriété est vraie au rang $d - 1$ et si $\deg Q \leqslant d$, soit q le coefficient de X^d dans Q et $p_d \neq 0$ le coefficient dominant de P_d. Le polynôme $Q - \frac{q}{p_d} P_d$ a un coefficient nul devant X^d, donc il est de degré au plus $d - 1$, et il est combinaison linéaire de $P_0, \ldots, P_{d-1}$; donc Q est combinaison linéaire de $P_0, \ldots, P_d$. Le cas $d = n$ donne (i), et le fait que tout polynôme ait un degré fini donne (ii). □

Exemples :

- Pour $a \in \mathbb{K}$, la famille $\big(1, X-a, \dots, (X-a)^n\big)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. La formule de Taylor (théorème 6 du chapitre 13) donne les coordonnées d'un polynôme P dans cette base : ce sont les nombres $\frac{P^{(k)}(a)}{k!}$. Par exemple, $X^3 - 2X + 5 = 4 + (X-1) + 3(X-1)^2 + (X-1)^3$.
- Soit $x_1, \dots, x_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$, et $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés (chapitre 13, théorème 13). Pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, le polynôme $\sum P(x_i)L_i$ est de degré au plus $n-1$ et prend les mêmes valeurs que P aux n points x_i, donc il est égal à P : la famille $(L_1, \dots, L_n)$ engendre $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Elle est libre, car si $\sum \lambda_i L_i = 0$, l'évaluation en x_k donne $\lambda_k = 0$. C'est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, dans laquelle les coordonnées de P sont ses valeurs $P(x_1), \dots, P(x_n)$, comme l'annonçait le chapitre 13.

Remarques :

- Dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, notons δ_n la suite dont le terme d'indice n vaut 1 et les autres 0. La famille $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre, mais elle n'engendre pas $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$: une combinaison linéaire des δ_n n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, et la suite constante égale à 1 n'en est pas une. Le piège est de croire que $(u_n) = \sum u_n \delta_n$: cette somme infinie n'a pas de sens dans un espace vectoriel.
- Le chapitre 15 montrera que, dans un espace engendré par une famille finie, il existe des bases, et qu'elles ont toutes le même nombre d'éléments, la dimension de l'espace. Le chapitre 16 utilisera la base canonique de l'espace des matrices.

14.5 Somme de sous-espaces

14.5.1 Somme de deux sous-espaces

La proposition 5 montre que la réunion de deux sous-espaces n'est en général pas un sous-espace. On la remplace par leur somme.

Définition : Soit F et G deux sous-espaces de E. Leur **somme** est l'ensemble

$$F + G = \{y + z \mid y \in F,\ z \in G\}.$$

Proposition 11 : La somme $F + G$ est un sous-espace de E ; c'est le plus petit sous-espace contenant F et G, c'est-à-dire $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

∘ Démonstration : Le vecteur $0 = 0 + 0$ appartient à $F + G$, et si $x = y + z$ et $x' = y' + z'$ avec $y, y' \in F$ et $z, z' \in G$, alors

$$\lambda x + x' = (\lambda y + y') + (\lambda z + z') \in F + G.$$

Ce sous-espace contient F (prendre $z = 0$) et G (prendre $y = 0$). Enfin, tout sous-espace qui contient F et G contient les sommes $y + z$, donc $F + G$: par le théorème 1, $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$. □

En particulier, $\mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B) = \mathrm{Vect}(A \cup B)$: on obtient une famille génératrice de $F + G$ en réunissant une famille génératrice de F et une de G. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, la somme de deux droites vectorielles distinctes $\mathbb{K}u$ et $\mathbb{K}v$ est le plan $\mathrm{Vect}(u, v)$.

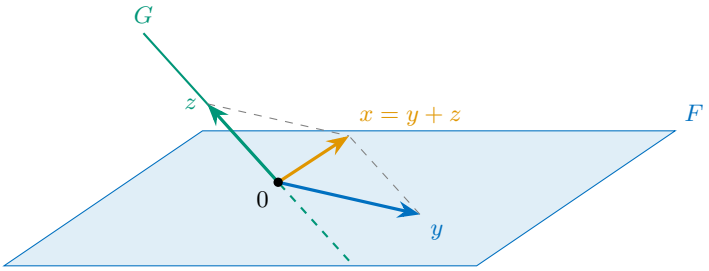
14.5.2 Somme directe, sous-espaces supplémentaires

Définition :

- La somme $F + G$ est **directe** si tout vecteur de $F + G$ s'écrit de façon unique sous la forme $y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. On la note alors $F \oplus G$.
- Les sous-espaces F et G sont **supplémentaires** dans E si $E = F \oplus G$, c'est-à-dire si tout vecteur de E s'écrit de façon unique $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.

Proposition 12 : La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$. Par conséquent, F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$.

∘ Démonstration : Supposons la somme directe, et soit $x \in F \cap G$. Les écritures $x = x + 0$ et $x = 0 + x$ décomposent x comme somme d'un élément de F et d'un élément de G ; par unicité, $x = 0$. Réciproquement, supposons $F \cap G = \{0\}$ et $y + z = y' + z'$ avec y, $y' \in F$ et z, $z' \in G$. Alors $y - y' = z' - z$ appartient à F et à G, donc est nul : $y = y'$ et $z = z'$. □



Dans $\mathbb{R}^3$, un plan F et une droite G non contenue dans F sont supplémentaires : la figure décompose $x = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1)$ en $y = (1, 2, 0) \in F$ et $z = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) \in G$, en menant par l'extrémité de x la parallèle à G jusqu'au plan F. La partie de G située sous le plan est en pointillés.

♡ **Méthode : Pour montrer que $E = F \oplus G$ par analyse-synthèse :**

- ▶ *Analyse.* On fixe $x \in E$, on suppose que $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$, et l'on exprime y et z en fonction de x. Cela prouve l'unicité de la décomposition.
- ▶ *Synthèse.* On vérifie que les vecteurs y et z trouvés appartiennent à F et à G, et que leur somme vaut x. Cela prouve l'existence.

On peut aussi montrer séparément que $F \cap G = \{0\}$ et que $F + G = E$ (proposition 12) ; l'analyse-synthèse a l'avantage de fournir la décomposition.

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}^3$, le plan P d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et la droite $D = \mathbb{R}u$, avec $u = (1, 1, 1)$, sont supplémentaires. *Analyse* : si $x = y + \lambda u$ avec $y \in P$, la somme des coordonnées donne $x_1 + x_2 + x_3 = 0 + 3\lambda$, donc $\lambda = m$, où $m = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ est la moyenne des coordonnées, et $y = x - mu$. *Synthèse* : le vecteur $x - mu$ a une somme de coordonnées nulle, donc appartient à P. Par exemple, $(1, 2, 6) = (-2, -1, 3) + 3(1, 1, 1)$.
- Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$, et $B\,\mathbb{K}[X] = \{BQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$ l'ensemble de ses multiples, qui est un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$. Le théorème 2 du chapitre 13, de division euclidienne, dit exactement que $\mathbb{K}[X] = B\,\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$: tout polynôme A s'écrit de façon unique $A = BQ + R$ avec $\deg R \leqslant n - 1$.

Proposition 13 : Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les sous-espaces de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formés des fonctions paires et des fonctions impaires. Alors $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$: toute fonction f s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, à savoir

$$f = g + h, \qquad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

∘ Démonstration :

▷ *Analyse.* Si $f = g + h$ avec g paire et h impaire, alors pour tout réel x, $f(x) = g(x) + h(x)$ et $f(-x) = g(x) - h(x)$. En ajoutant et en retranchant ces deux égalités, on obtient les expressions de g et de h de l'énoncé : la décomposition, si elle existe, est unique.

▷ *Synthèse.* Les fonctions g et h ainsi définies vérifient, pour tout réel x, les égalités $g(-x) = g(x)$, $h(-x) = -h(x)$ et $g(x) + h(x) = f(x)$: elles conviennent. □

Pour $f = \exp$, on retrouve $\exp = \mathrm{ch} + \mathrm{sh}$: le cosinus et le sinus hyperboliques du chapitre 5 sont les parties paire et impaire de l'exponentielle.

Remarques :

- Un sous-espace a en général une infinité de supplémentaires : dans $\mathbb{R}^3$, toute droite non contenue dans le plan F de la figure est un supplémentaire de F. On dit « un » supplémentaire, et non « le » supplémentaire.
- L'erreur la plus répandue est de confondre supplémentaire et complémentaire. Le complémentaire $E \setminus F$ d'un sous-espace ne contient pas 0 et n'est jamais un sous-espace ; un supplémentaire, au contraire, rencontre F en 0.

14.5.3 Somme de plusieurs sous-espaces

Définition : Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces de E. Leur somme est

$$F_1 + \cdots + F_p = \{x_1 + \cdots + x_p \mid x_1 \in F_1, \dots, x_p \in F_p\};$$

elle est **directe**, et notée $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$, si tout vecteur de cette somme s'écrit de façon unique $x_1 + \cdots + x_p$ avec $x_k \in F_k$ pour tout k.

Comme dans la proposition 11, la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est le sous-espace engendré par $F_1 \cup \cdots \cup F_p$.

Proposition 14 : La somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe si et seulement si la seule décomposition du vecteur nul est la décomposition triviale :

$$\big(x_1 + \cdots + x_p = 0 \text{ avec } x_k \in F_k \text{ pour tout } k\big) \implies x_1 = \cdots = x_p = 0.$$

∘ Démonstration : Si la somme est directe, la décomposition $0 = 0 + \cdots + 0$ est la seule. Réciproquement, si $x_1 + \cdots + x_p = x'_1 + \cdots + x'_p$ avec $x_k, x'_k \in F_k$, alors $\sum(x_k - x'_k) = 0$ avec $x_k - x'_k \in F_k$, donc $x_k = x'_k$ pour tout k. □

Remarques :

- Pour $p = 2$, on retrouve la proposition 12, puisque $y + z = 0$ signifie $y = -z \in F \cap G$. Pour $p \geqslant 3$, en revanche, il ne suffit pas que les intersections deux à deux soient nulles : dans $\mathbb{R}^2$, les trois droites $\mathbb{R}(1,0)$, $\mathbb{R}(0,1)$ et $\mathbb{R}(1,1)$ se coupent deux à deux en 0, mais $(1,0) + (0,1) - (1,1) = 0$ est une décomposition non triviale du vecteur nul.
- Si $x_1, \dots, x_n$ sont des vecteurs non nuls, la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si et seulement si la somme $\mathbb{K}x_1 + \cdots + \mathbb{K}x_n$ est directe : c'est la proposition 14 appliquée aux vecteurs $\lambda_k x_k$. En particulier, $\mathbb{K}^n = \mathbb{K}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}e_n$.

14.6 Applications linéaires

14.6.1 Définition et exemples

Les applications qui respectent les deux opérations d'un espace vectoriel jouent ici le rôle que les morphismes de groupes jouaient au chapitre 11. Dans toute la section, E, F et G sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition : Une application $u : E \to F$ est **linéaire** si, pour tous x, $y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$u(x + y) = u(x) + u(y) \qquad \text{et} \qquad u(\lambda x) = \lambda u(x).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Une application linéaire est appelée

- un **endomorphisme** de E si $F = E$; on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$;
- un **isomorphisme** si elle est bijective, et un **automorphisme** si c'est un endomorphisme bijectif ;
- une **forme linéaire** sur E si $F = \mathbb{K}$.

Proposition 15 : Une application $u : E \to F$ est linéaire si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in E^2,\quad u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y).$$

Dans ce cas, $u(0_E) = 0_F$, $u(-x) = -u(x)$, et u transforme toute combinaison linéaire en la combinaison linéaire des images, avec les mêmes coefficients :

$$u\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(x_k).$$

◦ Démonstration : Une application linéaire vérifie la condition, puisque

$$u(\lambda x + y) = u(\lambda x) + u(y) = \lambda u(x) + u(y).$$

Réciproquement, la condition avec $\lambda = 1$ donne l'additivité ; avec $x = y = 0$ et $\lambda = 1$, elle donne $u(0) = 2u(0)$, donc $u(0) = 0$; avec $y = 0$, elle donne alors $u(\lambda x) = \lambda u(x)$. Une application linéaire est un morphisme du groupe $(E, +)$ dans le groupe $(F, +)$, donc $u(-x) = -u(x)$ par le chapitre 11. La dernière formule s'obtient par récurrence sur n. □

Exemples :

- Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $x \mapsto \lambda x$ est un endomorphisme de E, appelé **homothétie** de rapport λ ; pour $\lambda = 1$, c'est l'identité id_E.
- Les applications $(x, y) \mapsto (x+y, x-y)$, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, et $(x, y, z) \mapsto x+2y-z$, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, sont linéaires ; plus généralement, toute application de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont chaque composante est de la forme $a_1x_1 + \cdots + a_px_p$ est linéaire. Le chapitre 16 montrera que ce sont les seules.
- La dérivation $D : P \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ (chapitre 13, proposition 11), et $f \mapsto f'$ est linéaire de $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. Pour a, $b \in \mathbb{K}$, l'application $y \mapsto y'' + ay' + by$ est linéaire de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$: c'est le sens précis du mot « linéaire » dans « équation différentielle linéaire », annoncé au chapitre 6.
- Pour $a \in \mathbb{K}$, l'évaluation $P \mapsto P(a)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$ (chapitre 13, proposition 6), et $f \mapsto f(a)$ une forme linéaire sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ si $a \in I$. L'application $f \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, par la linéarité de l'intégrale, utilisée depuis le chapitre 6 et démontrée au chapitre 18.
- Sur le sous-espace des suites convergentes de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, l'application $(u_n) \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est une forme linéaire, par les opérations sur les limites du chapitre 7.

Remarques :

- Une application linéaire envoie 0 sur 0 : c'est le test le plus rapide pour montrer qu'une application *n'est pas* linéaire. Une translation $x \mapsto x + a$ avec $a \neq 0$ n'est pas linéaire, ni la fonction affine $x \mapsto 2x + 1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, malgré le nom que lui donnait le collège.
- La linéarité dépend du corps des scalaires. La conjugaison $z \mapsto \bar{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, mais elle n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire, car $\overline{\mathrm{i} \cdot 1} = -\mathrm{i}$ alors que $\mathrm{i} \cdot \bar{1} = \mathrm{i}$. En revanche, la rotation $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$ du chapitre 4 est $\mathbb{C}$-linéaire, donc $\mathbb{R}$-linéaire.

14.6.2 Opérations sur les applications linéaires

Proposition 16 : Soit u, u_1, $u_2 \in \mathcal{L}(E, F)$, v, v_1, $v_2 \in \mathcal{L}(F, G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

(ii) La composée $v \circ u$ est linéaire de E dans G, et la composition est **bilinéaire** :

$$v \circ (\lambda u_1 + u_2) = \lambda\, v \circ u_1 + v \circ u_2, \qquad (\lambda v_1 + v_2) \circ u = \lambda\, v_1 \circ u + v_2 \circ u.$$

(iii) Si u est un isomorphisme, sa réciproque u^{-1} est linéaire : c'est un isomorphisme de F dans E.

◦ Démonstration :

▷ *(i)* L'application nulle est linéaire. Si u_1 et u_2 sont linéaires, pour tous $\mu \in \mathbb{K}$ et x, $y \in E$,

$$(\lambda u_1 + u_2)(\mu x + y) = \lambda\big(\mu u_1(x) + u_1(y)\big) + \mu u_2(x) + u_2(y) = \mu(\lambda u_1 + u_2)(x) + (\lambda u_1 + u_2)(y).$$

▷ *(ii)* On a $v(u(\mu x+y)) = v(\mu u(x)+u(y)) = \mu v(u(x))+v(u(y))$. Pour la bilinéarité, si $x \in E$, la linéarité de v donne

$$v\big(\lambda u_1(x) + u_2(x)\big) = \lambda v(u_1(x)) + v(u_2(x)),$$

et la seconde égalité est la définition des lois de $\mathcal{F}(E, G)$ appliquée au point $u(x)$.

▷ *(iii)* Soit y, $y' \in F$ et $\mu \in \mathbb{K}$, et $x = u^{-1}(y)$, $x' = u^{-1}(y')$. Par linéarité de u, $u(\mu x + x') = \mu y + y'$, donc $u^{-1}(\mu y + y') = \mu x + x' = \mu u^{-1}(y) + u^{-1}(y')$. □

Seule la première égalité de la bilinéarité utilise la linéarité : la seconde est vraie pour des applications quelconques. Deux espaces sont dits **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de l'un sur l'autre ; un isomorphisme transporte toutes les propriétés linéaires, et permet de calculer dans l'espace le plus commode.

Exemples :

- L'application $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto (a_0, \dots, a_n)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$: elle est linéaire par définition des lois de $\mathbb{K}[X]$, et bijective par l'unicité de l'écriture d'un polynôme.
- L'application $z \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ est un isomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}^2$: c'est l'identification du plan complexe du chapitre 4.
- Soit $x_1, \dots, x_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$. L'application $P \mapsto \big(P(x_1), \dots, P(x_n)\big)$, de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$, est linéaire ; le théorème 13 du chapitre 13 dit qu'elle est bijective, l'existence du polynôme interpolateur donnant la surjectivité et son unicité l'injectivité. Son isomorphisme réciproque est $(y_1, \dots, y_n) \mapsto \sum y_i L_i$.

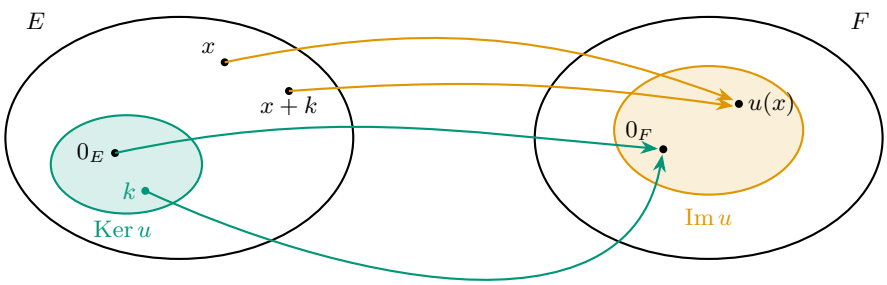
14.6.3 Noyau et image

Proposition 17 : Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. L'image directe $u(E')$ d'un sous-espace E' de E est un sous-espace de F, et l'image réciproque $u^{-1}(F')$ d'un sous-espace F' de F est un sous-espace de E.

∘ Démonstration : Le vecteur $0_F = u(0_E)$ appartient à $u(E')$, et $\lambda u(x)+u(x') = u(\lambda x+x')$ appartient à $u(E')$ si x, $x' \in E'$. De même, $0_E \in u^{-1}(F')$, et si $u(x)$, $u(x') \in F'$, alors $u(\lambda x+x') = \lambda u(x)+u(x') \in F'$. □

Définition : Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Le **noyau** et l'**image** de u sont les sous-espaces de E et de F définis par

$$\operatorname{Ker} u = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0\}, \qquad \operatorname{Im} u = u(E) = \{u(x) \mid x \in E\}.$$



Le noyau est écrasé sur 0_F, et deux vecteurs qui diffèrent d'un élément k du noyau ont la même image, puisque $u(x + k) = u(x) + u(k) = u(x)$. L'injectivité revient donc à demander que le noyau soit réduit à $\{0\}$: c'est le théorème suivant, déjà vu pour les morphismes de groupes au chapitre 11.

Théorème 3 : Injectivité, surjectivité :
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$, et u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$.

∘ Démonstration : La seconde équivalence est la définition de la surjectivité. Si u est injective, le seul antécédent de 0_F est 0_E, donc $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$. Réciproquement, si $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$ et $u(x) = u(y)$, alors $u(x-y) = u(x) - u(y) = 0$, donc $x - y \in \operatorname{Ker} u$, et $x = y$. □

Proposition 18 : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(x_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E. Alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\big(u(x_i)\big)_{i\in I}$.

∘ Démonstration : Tout $x \in E$ est combinaison linéaire d'une sous-famille finie $(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$, ce qui s'écrit $x = \sum \lambda_k x_{i_k}$; par la proposition 15, on a alors

$$u(x) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k u(x_{i_k}),$$

et $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$. L'inclusion réciproque vient du théorème 1, puisque $\operatorname{Im} u$ est un sous-espace qui contient les $u(x_i)$. □

♡ **Méthode : Pour déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire u :**

- ▶ Pour le noyau, on résout l'équation $u(x) = 0$; dans $\mathbb{K}^p$, c'est un système homogène, dont on exprime les solutions à l'aide de paramètres, ce qui écrit $\operatorname{Ker} u$ comme un sous-espace engendré.
- ▶ Pour l'image, on calcule les images des vecteurs d'une famille génératrice de E (proposition 18), puis l'on simplifie cette famille par les opérations de la proposition 6.
- ▶ Pour obtenir des équations de l'image, on cherche à quelle condition sur y l'équation $u(x) = y$ admet une solution.

Exemples :

- Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $u(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$. Le système $x-y = y-z = z-x = 0$ équivaut à $x = y = z$, donc $\operatorname{Ker} u = \mathbb{R}(1,1,1)$ et u n'est pas injective. Les images des vecteurs de la base canonique sont $(1,0,-1)$, $(-1,1,0)$ et $(0,-1,1)$; la troisième est l'opposée de la somme des deux premières, et l'on peut la supprimer (proposition 6). Comme $(-1,1,0) = (0,1,-1) - (1,0,-1)$, on obtient

  $$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\big((1,0,-1),(0,1,-1)\big),$$

  qui est le plan P d'équation $a+b+c=0$ de la section 14.3.3. On le voit aussi directement : les trois coordonnées de $u(x,y,z)$ ont une somme nulle.
- La dérivation D de $\mathbb{K}[X]$ a pour noyau l'ensemble des polynômes constants, et elle est surjective, puisque $\sum a_k X^k$ est la dérivée de $\sum \dfrac{a_k}{k+1} X^{k+1}$: c'est un endomorphisme surjectif non injectif. Restreinte à $\mathbb{K}_n[X]$, elle a pour image $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, par la proposition 18 appliquée à la base canonique.
- L'évaluation $P \mapsto P(a)$ a pour noyau $(X-a)\mathbb{K}[X]$, ensemble des polynômes divisibles par $X-a$, par la proposition 7 du chapitre 13 ; son image est $\mathbb{K}$, puisque la constante c a pour image c.
- Le noyau de l'application $y \mapsto y'' + ay' + by$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée : le chapitre 6 l'a décrit comme le sous-espace engendré par deux fonctions.

Remarque : Le théorème 3 remplace la vérification de $u(x) = u(y) \implies x = y$ pour tous les couples (x,y) par la résolution d'une seule équation, $u(x) = 0$. L'erreur la plus répandue est d'en oublier l'hypothèse : pour une application non linéaire, comme $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'image réciproque de $\{0\}$ est $\{0\}$, et pourtant l'application n'est pas injective.

14.6.4 Détermination par l'image d'une base

Théorème 4 : Application linéaire définie sur une base :
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs de F. Il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u(e_k) = f_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. De plus :

(i) u est injective si et seulement si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre ;

(ii) u est surjective si et seulement si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ engendre F ;

(iii) u est un isomorphisme si et seulement si $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de F.

∘ Démonstration :

▷ *Unicité.* Si u convient, et si $x = \sum \lambda_k e_k$ est l'écriture de x dans la base, la proposition 15 impose $u(x) = \sum \lambda_k f_k$.

▷ *Existence.* On définit $u(x) = \sum \lambda_k f_k$, où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont les coordonnées de x, ce qui a un sens par le théorème 2. Les coordonnées de $\mu x + y$ sont les $\mu\lambda_k + \lambda'_k$, si les λ'_k sont celles de y, donc $u(\mu x + y) = \mu u(x) + u(y)$; et $u(e_k) = f_k$, puisque les coordonnées de e_k sont 1 en position k et 0 ailleurs.

▷ *(i)* Le vecteur $x = \sum \lambda_k e_k$ appartient au noyau si et seulement si $\sum \lambda_k f_k = 0$. Si $(f_1, \dots, f_n)$ est libre, cela impose $\lambda_k = 0$ pour tout k, donc $x = 0$, et u est injective par le théorème 3. Réciproquement, si u est injective et si $\sum \lambda_k f_k = 0$, alors $u(\sum \lambda_k e_k) = 0$, donc $\sum \lambda_k e_k = 0$, et les λ_k sont nuls, puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

▷ *(ii) et (iii)* Par la proposition 18, $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(f_1, \dots, f_n)$: (ii) en découle, et (iii) est la réunion de (i) et de (ii). □

En particulier, deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales : une application linéaire est entièrement connue par les images des vecteurs d'une base. Le chapitre 16 rangera ces images dans un tableau, la matrice de u.

Remarque : Le théorème 4 et sa démonstration restent valables pour la base infinie $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$, puisqu'un polynôme a des coefficients uniques : pour toute suite $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes, il existe un unique endomorphisme u de $\mathbb{K}[X]$ tel que $u(X^k) = Q_k$ pour tout k, à savoir $u\Big(\sum a_k X^k\Big) = \sum a_k Q_k$. La dérivation est celui qui vérifie $D(X^k) = kX^{k-1}$, et la composition $P \mapsto P(X+1)$ celui qui vérifie $X^k \mapsto (X+1)^k$.

Exemple : L'unique endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ tel que $u(e_1) = (2, 1)$ et $u(e_2) = (1, -1)$ est $u(x, y) = x(2, 1) + y(1, -1) = (2x + y, x - y)$. La famille $\big((2, 1), (1, -1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$: l'équation $a(2, 1) + b(1, -1) = (p, q)$ a pour unique solution

$$a = \frac{p+q}{3}, \qquad b = \frac{p-2q}{3}.$$

Donc u est un automorphisme, et le calcul précédent donne sa réciproque :

$$u^{-1}(p, q) = \Big(\frac{p+q}{3}, \frac{p-2q}{3}\Big).$$

Proposition 19 : Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E, $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ qui coïncide avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2 ; elle est donnée par

$$u(y + z) = u_1(y) + u_2(z) \qquad (y \in E_1,\ z \in E_2).$$

∘ Démonstration : Si u convient, sa linéarité impose la formule, ce qui prouve l'unicité. Réciproquement, la formule définit une application, puisque la décomposition $x = y + z$ est unique. Elle est linéaire : si $x = y + z$ et $x' = y' + z'$, la décomposition de $\lambda x + x'$ est $(\lambda y + y') + (\lambda z + z')$, donc

$$u(\lambda x + x') = u_1(\lambda y + y') + u_2(\lambda z + z') = \lambda u(x) + u(x').$$

Enfin, $u(y) = u(y + 0) = u_1(y)$ pour $y \in E_1$, et de même sur E_2. □

Le choix $u_1 = \mathrm{id}_{E_1}$ et $u_2 = 0$ fournit les projecteurs, étudiés dans la section suivante ; le choix $u_1 = \mathrm{id}_{E_1}$ et $u_2 = -\mathrm{id}_{E_2}$ fournit les symétries.

14.7 Endomorphismes, projecteurs et symétries

14.7.1 L'anneau $\mathcal{L}(E)$ et le groupe $\mathrm{GL}(E)$

Pour u, $v \in \mathcal{L}(E)$, on note souvent vu la composée $v \circ u$, et l'on définit les puissances u^k pour $k \in \mathbb{N}$ par $u^0 = \mathrm{id}_E$ et $u^{k+1} = u \circ u^k$.

Proposition 20 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
(i) $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, dont le neutre multiplicatif est id_E.
(ii) L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ des automorphismes de E est un groupe pour la composition, appelé le **groupe linéaire** de E : c'est le groupe des inversibles de l'anneau $\mathcal{L}(E)$.

∘ Démonstration :

▷ *(i)* Par la proposition 16, $(\mathcal{L}(E), +)$ est un groupe abélien, la composée de deux endomorphismes est un endomorphisme, et la bilinéarité de la composition donne les deux distributivités. La composition est associative et admet id_E pour neutre.

▷ *(ii)* Un élément u est inversible dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$ s'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $uv = vu = \mathrm{id}_E$, c'est-à-dire si u est bijective et si sa réciproque est linéaire ; la seconde condition découle de la première, par la proposition 16. Le groupe des inversibles d'un anneau est un groupe (chapitre 11). □

Pour $u \in \mathrm{GL}(E)$, on définit aussi $u^{-k} = (u^{-1})^k$, ce qui donne un sens à u^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$, comme dans tout groupe.

Exemples :

- L'anneau $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ n'est pas commutatif. Soit $s(x, y) = (y, x)$ et $p(x, y) = (x, 0)$: alors $s \circ p(x, y) = (0, x)$, tandis que $p \circ s(x, y) = (y, 0)$.
- Il n'est pas intègre. Avec $q(x, y) = (0, y)$, on a $p \circ q = 0$, bien que ni p ni q ne soient nuls.
- Dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])$, la dérivation D est **nilpotente** : $D^{n+1} = 0$, puisque dériver $n + 1$ fois un polynôme de degré au plus n donne 0. Comme id et D commutent, la factorisation de $a^m - b^m$ dans un anneau (chapitre 11) donne

$$(\mathrm{id} + D) \circ \sum_{j=0}^{n} (-1)^j D^j = \mathrm{id} - (-D)^{n+1} = \mathrm{id},$$

et de même dans l'autre ordre. Donc $\mathrm{id} + D$ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$: pour tout $Q \in \mathbb{K}_n[X]$, il existe un unique $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P + P' = Q$, à savoir $P = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j Q^{(j)}$. Pour $Q = X^2$, on trouve $P = X^2 - 2X + 2$: c'est la solution polynomiale de $y' + y = x^2$ que fournissait la méthode du chapitre 6.

14.7.2 Projecteurs

Définition : Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. L'application $p : x \mapsto y$ est la **projection**, ou le **projecteur**, sur F parallèlement à G.

Proposition 21 : Soit p le projecteur sur F parallèlement à G.
(i) p est un endomorphisme de E, et $p \circ p = p$.
(ii) $\mathrm{Im}\, p = F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \{x \in E \mid p(x) = x\}$ et $\mathrm{Ker}\, p = G$.
(iii) $q = \mathrm{id}_E - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F, et $p \circ q = q \circ p = 0$.

∘ Démonstration :

▷ *(i)* L'application p est celle de la proposition 19, avec $u_1 = \mathrm{id}_F$ et $u_2 = 0$; elle est donc linéaire. Si $x = y + z$, alors $p(x) = y = y + 0$, donc $p(p(x)) = y = p(x)$.

▷ *(ii)* Par définition, $\mathrm{Im}\, p \subset F$, et tout $y \in F$ vérifie $p(y) = y$, donc $F \subset \{x \mid p(x) = x\} \subset \mathrm{Im}\, p$. Enfin, $p(x) = 0$ si et seulement si la composante de x sur F est nulle, c'est-à-dire si $x \in G$.

▷ *(iii)* On a $q(y+z) = z$: c'est le projecteur annoncé. Et $p \circ q(x) = p(z) = 0$, $q \circ p(x) = q(y) = 0$. □

Théorème 5 : Caractérisation des projecteurs :
Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$. Alors $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires dans E, et p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$. De plus, $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.

○ Démonstration :

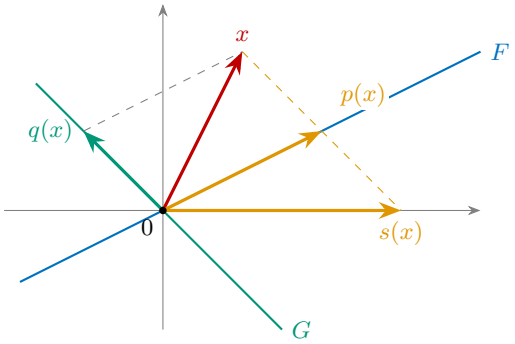
▷ $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id})$. Si $y = p(x)$, alors $p(y) = p(p(x)) = p(x) = y$. Réciproquement, si $p(y) = y$, alors y est l'image de y.

▷ *Somme directe.* Si $y \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$, alors $y = p(y) = 0$.

▷ *Somme égale à E.* Tout $x \in E$ s'écrit $x = p(x) + \big(x - p(x)\big)$, avec $p(x) \in \operatorname{Im} p$ et

$$p\big(x - p(x)\big) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0.$$

▷ *Conclusion.* Dans cette décomposition, la composante de x sur $\operatorname{Im} p$ est $p(x)$: p est le projecteur annoncé. □



On obtient $p(x)$ en menant par l'extrémité de x la parallèle à G jusqu'à F ; le symétrique $s(x)$ de la section suivante est sur la même parallèle, de l'autre côté de F, à la même distance. Ici $x = (1,2)$, $p(x) = (2,1)$, $q(x) = (-1,1)$ et $s(x) = (3,0)$; l'exemple de la section 14.6.4 donne la formule générale $p(x,y) = \frac{x+y}{3}(2,1)$.

♡ **Méthode : Pour reconnaître un projecteur et déterminer ses éléments :**
- ▶ On vérifie que p est linéaire, puis que $p \circ p = p$.
- ▶ On détermine $\operatorname{Im} p$ en résolvant l'équation $p(x) = x$, et $\operatorname{Ker} p$ en résolvant $p(x) = 0$.
- ▶ On conclut, par le théorème 5, que p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Exemples :

- Soit $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par $p(x) = x - m\,(1,1,1)$, où m est la moyenne des coordonnées de x :
$$p(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{3}\big(2x_1 - x_2 - x_3,\ -x_1 + 2x_2 - x_3,\ -x_1 - x_2 + 2x_3\big).$$
Il est linéaire, et la moyenne des coordonnées de $p(x)$ est nulle, donc $p(p(x)) = p(x)$. L'équation $p(x) = x$ équivaut à $m = 0$, et $p(x) = 0$ à $x = m(1,1,1)$. C'est le projecteur sur le plan P d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ parallèlement à la droite $\mathbb{R}(1,1,1)$, ce que l'on attendait de la décomposition de la section 14.5.2.
- L'application qui associe à $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sa partie paire $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est le projecteur sur les fonctions paires parallèlement aux fonctions impaires (proposition 13).
- Si $\deg B = n \geqslant 1$, l'application qui associe à un polynôme le reste de sa division euclidienne par B est le projecteur sur $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ parallèlement à $B\,\mathbb{K}[X]$. En particulier, elle est linéaire : le reste d'une somme est la somme des restes.

Remarque : L'erreur la plus répandue est de parler du « projecteur sur F » sans préciser la direction de projection. Sur la figure, changer la droite G change le point $p(x)$, bien que F reste le même. La projection « à angle droit » du lycée, dite orthogonale, n'est qu'un cas particulier, qui demande un produit scalaire : ce sera l'objet du chapitre 19.

14.7.3 Symétries

Définition : Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. La **symétrie** par rapport à F parallèlement à G est l'application

$$s : y + z \mapsto y - z \qquad (y \in F,\ z \in G).$$

Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, on a $s = 2p - \mathrm{id}_E$.

En effet, $2p(x) - x = 2y - (y + z) = y - z$. La symétrie s est donc linéaire, elle fixe les vecteurs de F et change en leur opposé ceux de G, et $s \circ s = \mathrm{id}_E$, puisque $s(y - z) = y + z$.

Théorème 6 : Caractérisation des symétries :
Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s \circ s = \mathrm{id}_E$. Alors $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E, et s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G. En particulier, s est un automorphisme et $s^{-1} = s$.

∘ Démonstration : Soit $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{id}_E)$, endomorphisme de E. Comme s et id_E commutent,

$$p \circ p = \frac{1}{4}(s^2 + 2s + \mathrm{id}_E) = \frac{1}{4}(2s + 2\,\mathrm{id}_E) = p.$$

Par le théorème 5, p est le projecteur sur $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$. Or $p(x) = x$ équivaut à $s(x) = x$, et $p(x) = 0$ à $s(x) = -x$: on a donc $\mathrm{Im}\, p = F$ et $\mathrm{Ker}\, p = G$. Enfin, $s = 2p - \mathrm{id}_E$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G. □

Exemples :

- L'application $f \mapsto \big(x \mapsto f(-x)\big)$ est la symétrie de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par rapport aux fonctions paires parallèlement aux fonctions impaires.
- La conjugaison $z \mapsto \bar{z}$ est une symétrie du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$: elle fixe les réels et change en leur opposé les imaginaires purs. C'est la symétrie par rapport à $\mathbb{R}$ parallèlement à $\mathrm{i}\mathbb{R}$, la réflexion d'axe réel du chapitre 4.
- L'endomorphisme $(x, y) \mapsto (y, x)$ de $\mathbb{R}^2$ vérifie $s \circ s = \mathrm{id}$: c'est la symétrie par rapport à la droite $\mathbb{R}(1, 1)$ parallèlement à la droite $\mathbb{R}(1, -1)$.

Remarque : La démonstration divise par 2, ce qui est permis dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$. C'est le même calcul que celui de la proposition 13 : la symétrie $f \mapsto f(-\cdot)$ a pour projecteurs associés les applications « partie paire » et « partie impaire ».

14.8 Formes linéaires et hyperplans

14.8.1 Formes linéaires

Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ (section 14.6.1) ; leur ensemble est $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Définition : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, la **k-ième forme coordonnée** relativement à $\mathcal{B}$ est l'application e_k^* qui associe à un vecteur x sa k-ième coordonnée dans $\mathcal{B}$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x)\, e_k.$$

Les formes coordonnées sont linéaires, puisque les coordonnées de $\lambda x+y$ sont les $\lambda e_k^*(x)+e_k^*(y)$ (démonstration du théorème 4) ; elles sont caractérisées par $e_k^*(e_j)=1$ si $j=k$ et 0 sinon. Par le théorème 4, une forme linéaire φ sur $\mathbb{K}^n$ est déterminée par les nombres $a_k=\varphi(e_k)$, et

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n.$$

Proposition 22 : Une forme linéaire non nulle φ sur E est surjective.

∘ Démonstration : Soit $a\in E$ tel que $\varphi(a)\neq 0$. Pour tout $t\in\mathbb{K}$, $\varphi\Big(\dfrac{t}{\varphi(a)}\,a\Big)=t$. □

14.8.2 Hyperplans

Définition : Un **hyperplan** de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E. Si $H=\operatorname{Ker}\varphi$, on dit que $\varphi(x)=0$ est une **équation** de H.

Exemples :

- Dans $\mathbb{K}^n$, les hyperplans sont les ensembles d'équation $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$, où les a_k ne sont pas tous nuls. Ce sont les droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, et les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ de la section 14.3.
- Dans $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble $(X-a)\mathbb{K}[X]$ des polynômes qui s'annulent en a est l'hyperplan d'équation $P(a)=0$.
- Dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, les fonctions d'intégrale nulle forment un hyperplan.

Théorème 7 : Hyperplans et droites :

(i) Si H est un hyperplan de E et D une droite vectorielle non contenue dans H, alors $E=H\oplus D$.

(ii) Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite vectorielle est un hyperplan.

∘ Démonstration :

▷ *(i)* Soit $H=\operatorname{Ker}\varphi$ et $D=\mathbb{K}a$, avec $a\notin H$, c'est-à-dire $\varphi(a)\neq 0$. Si $\lambda a\in H$, alors $\lambda\varphi(a)=0$, donc $\lambda=0$: la somme est directe. Pour $x\in E$, on cherche λ tel que $x-\lambda a\in H$, c'est-à-dire $\varphi(x)=\lambda\varphi(a)$; avec $\lambda=\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}$, on obtient

$$x=\Big(x-\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\,a\Big)+\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\,a\in H+D.$$

▷ *(ii)* Soit $E=H\oplus\mathbb{K}a$, avec $a\neq 0$. Tout x s'écrit de façon unique $x=h+\lambda a$ avec $h\in H$; posons $\varphi(x)=\lambda$. L'application φ est la composée du projecteur sur $\mathbb{K}a$ parallèlement à H et de l'isomorphisme réciproque de $\lambda\mapsto\lambda a$, donc elle est linéaire. Elle n'est pas nulle, puisque $\varphi(a)=1$, et $\varphi(x)=0$ si et seulement si $x\in H$: $H=\operatorname{Ker}\varphi$ est un hyperplan. □

Proposition 23 : Deux formes linéaires non nulles φ et ψ ont le même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles : il existe $\lambda\in\mathbb{K}^*$ tel que $\psi=\lambda\varphi$. Deux équations d'un même hyperplan sont donc proportionnelles.

∘ Démonstration : Si $\psi=\lambda\varphi$ avec $\lambda\neq 0$, les deux formes s'annulent aux mêmes points. Réciproquement, soit H le noyau commun et $a\notin H$. On pose $\lambda=\frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$, qui est non nul puisque $a\notin\operatorname{Ker}\psi$. La forme linéaire $\psi-\lambda\varphi$ s'annule sur H et en a, donc sur $H+\mathbb{K}a$, qui est égal à E par le théorème 7 : $\psi=\lambda\varphi$. □

Exemples :

- Pour $H=(X-a)\mathbb{K}[X]$ et $D=\mathbb{K}_0[X]$, droite des polynômes constants, le théorème 7 redonne la division euclidienne par $X-a$: $P=\big(P-P(a)\big)+P(a)$, le premier terme étant divisible par $X-a$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, les équations $x+2y-z=0$ et $-2x-4y+2z=0$ définissent le même plan, et $3x+y=0$ un autre plan, puisque $(3,1,0)$ n'est pas proportionnel à $(1,2,-1)$.

Remarque : Le chapitre 15 caractérisera les hyperplans par la dimension : dans un espace de dimension n, ce sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$, et une intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$. C'est ce que suggèrent les exemples de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, où les hyperplans sont les droites et les plans.

14.9 Sous-espaces affines

14.9.1 Points et vecteurs

Dans la géométrie du lycée, un point n'est pas un vecteur : on ajoute un vecteur à un point pour obtenir un autre point, et deux points définissent un vecteur. Dans un espace vectoriel E, on peut adopter ce point de vue : lorsqu'on regarde un élément A de E comme une position, on l'appelle un **point**, et pour deux points A et B on note $\overrightarrow{AB} = B - A$. On a alors

$$B = A + \vec{u} \iff \overrightarrow{AB} = \vec{u}, \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \text{(relation de Chasles)}.$$

Pour $u \in E$, la **translation** de vecteur u est l'application $t_u : x \mapsto x + u$. C'est une bijection de E, de réciproque t_{-u}, et $t_u \circ t_v = t_{u+v}$; elle n'est pas linéaire si $u \neq 0$, puisqu'elle n'envoie pas 0 sur 0.

14.9.2 Sous-espaces affines

Définition : Une partie $\mathcal{V}$ de E est un **sous-espace affine** s'il existe un point $A \in E$ et un sous-espace vectoriel F de E tels que

$$\mathcal{V} = A + F = \{A + x \mid x \in F\}.$$

Proposition 24 : Soit $\mathcal{V} = A + F$ un sous-espace affine de E.

(i) Pour tout point $B \in \mathcal{V}$, on a $\mathcal{V} = B + F$.

(ii) Le sous-espace F est déterminé par $\mathcal{V}$: $F = \{\overrightarrow{MN} \mid M, N \in \mathcal{V}\}$. On l'appelle la **direction** de $\mathcal{V}$.

∘ Démonstration :

▷ *(i)* Soit $B = A + b$ avec $b \in F$. Pour $x \in F$, $A + x = B + (x - b)$, avec $x - b \in F$, et $B + x = A + (b + x)$, avec $b + x \in F$: les deux ensembles sont égaux.

▷ *(ii)* Si $M = A + x$ et $N = A + y$ avec $x, y \in F$, alors $\overrightarrow{MN} = y - x \in F$. Réciproquement, tout $x \in F$ s'écrit $\overrightarrow{AN}$ avec $N = A + x \in \mathcal{V}$. □

Un sous-espace affine dont la direction est une droite (resp. un plan, un hyperplan) est une **droite affine** (resp. un **plan affine**, un **hyperplan affine**). Deux sous-espaces affines de même direction sont dits **parallèles**.

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}^2$, la droite d'équation $y = 2x + 1$ est la droite affine $(0,1) + \mathbb{R}(1,2)$: elle passe par le point $(0,1)$ et elle est dirigée par le vecteur $(1,2)$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, le plan d'équation $x + y + z = 1$ est le plan affine $(1,0,0) + P$, où P est le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$.
- Un sous-espace affine $A + F$ est un sous-espace vectoriel si et seulement s'il contient 0, c'est-à-dire si $A \in F$: par la proposition 24, il est alors égal à $0 + F = F$.

Proposition 25 : L'intersection de deux sous-espaces affines $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ de directions F et G est vide, ou bien c'est un sous-espace affine de direction $F \cap G$. En particulier, deux sous-espaces affines parallèles sont disjoints ou égaux.

∘ Démonstration : Si l'intersection contient un point C, alors $\mathcal{V} = C + F$ et $\mathcal{W} = C + G$ par la proposition 24. Un point $C + x$ appartient aux deux si et seulement si $x \in F$ et $x \in G$, donc $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = C + (F \cap G)$. Si $F = G$, cette intersection, quand elle n'est pas vide, vaut $C + F = \mathcal{V} = \mathcal{W}$. □

Remarque : Deux droites affines de $\mathbb{R}^3$ de directions distinctes ont une intersection vide ou réduite à un point : c'est le cas $F \cap G = \{0\}$. Lorsqu'elle est vide, les droites ne sont pas pour autant parallèles ; on les dit non coplanaires.

14.9.3 Équations linéaires

Une **équation linéaire** est une équation de la forme $u(x) = b$, d'inconnue $x \in E$, où $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. L'équation $u(x) = 0$ est l'**équation homogène associée**.

Théorème 8 : Structure des solutions d'une équation linéaire :
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $u(x) = b$ est vide si $b \notin \operatorname{Im} u$. Si $b \in \operatorname{Im} u$ et si x_0 est une solution, alors

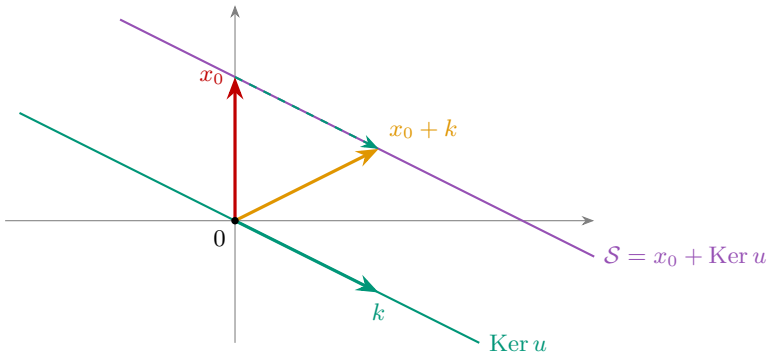
$$\mathcal{S} = x_0 + \operatorname{Ker} u :$$

c'est un sous-espace affine de direction $\operatorname{Ker} u$.

∘ Démonstration : La première assertion est la définition de l'image. Si $u(x_0) = b$, alors pour tout $x \in E$,

$$u(x) = b \iff u(x) = u(x_0) \iff u(x - x_0) = 0 \iff x - x_0 \in \operatorname{Ker} u.$$

□



Pour $u(x, y) = x + 2y$, les solutions de $u(x, y) = 4$ forment la droite violette, parallèle au noyau, la droite verte d'équation $x + 2y = 0$. Ajouter à la solution $x_0 = (0, 2)$ un vecteur k du noyau, ici $(2, -1)$, donne une autre solution, $(2, 1)$, et on les obtient toutes ainsi.

♡ **Méthode : Pour résoudre une équation linéaire $u(x) = b$:**

- ▶ On vérifie que l'application u est linéaire.
- ▶ On résout l'équation homogène $u(x) = 0$, ce qui donne $\operatorname{Ker} u$.
- ▶ On cherche une solution particulière x_0, en devinant sa forme ou en décomposant le second membre b en une somme de termes plus simples, dont on additionne les solutions.
- ▶ On conclut, par le théorème 8, que les solutions sont les $x_0 + k$, k parcourant $\operatorname{Ker} u$.

La troisième étape est le principe de superposition : si $u(x_1) = b_1$ et $u(x_2) = b_2$, alors $u(x_1 + x_2) = b_1 + b_2$.

Le théorème 8 unifie plusieurs résultats des chapitres précédents, qui en sont des cas particuliers.

Exemples :

- *Systèmes linéaires.* Un système de n équations à p inconnues s'écrit $u(x) = b$, où l'application u, de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, est linéaire. S'il est compatible, ses solutions s'obtiennent en ajoutant à l'une d'elles les solutions du système homogène, ce que le chapitre 3 annonçait.
- *Équations différentielles.* L'équation $y' + a(x)y = b(x)$ s'écrit $u(y) = b$, avec $u : y \mapsto y' + ay$ linéaire de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. La « solution particulière plus la solution générale de l'équation homogène » du chapitre 6 est exactement l'écriture $\mathcal{S} = y_0 + \operatorname{Ker} u$; il en va de même pour $y'' + ay' + by = f(x)$.

- *Suites arithmético-géométriques.* Soit $a \neq 1$. La relation $u_{n+1} = au_n + b$ s'écrit $\Phi\big((u_n)\big) = \beta$, où β est la suite constante égale à b et où l'application

$$\Phi : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1} - au_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

est un endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, dont le noyau est la droite $\text{Vect}\big((a^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ des suites géométriques de raison a. La suite constante égale à $c = \frac{b}{1-a}$ est une solution particulière, d'où les solutions $u_n = c + \lambda a^n$ de la proposition 15 du chapitre 7.

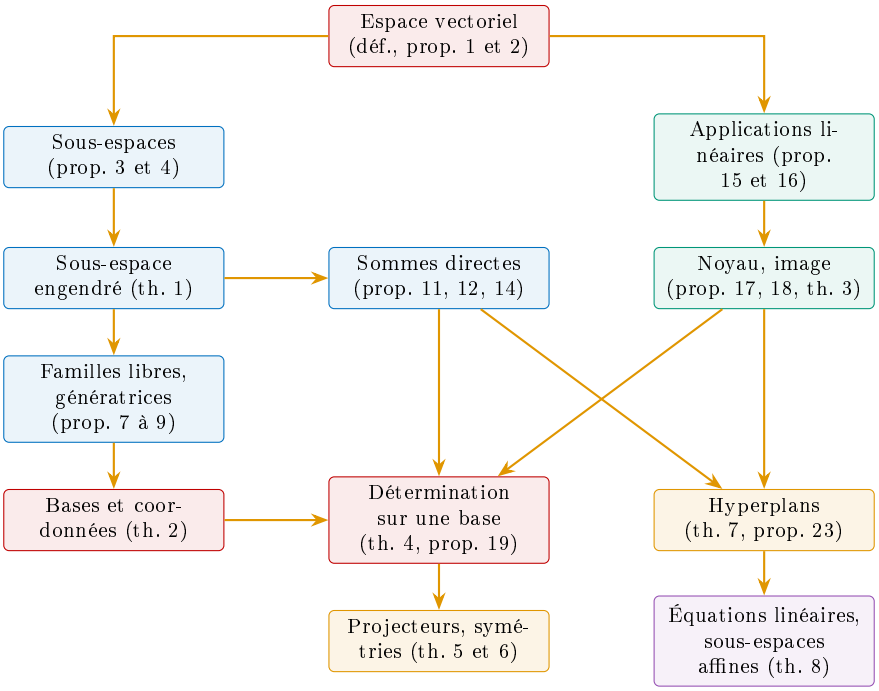
- *Interpolation.* Avec les notations du chapitre 13, l'application $\Psi : P \mapsto \big(P(x_1), \dots, P(x_n)\big)$ est linéaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$, de noyau $N\,\mathbb{K}[X]$ par la proposition 8 du chapitre 13. Les polynômes Q tels que $Q(x_i) = y_i$ sont donc les $P + AN$, $A \in \mathbb{K}[X]$, où P est le polynôme de Lagrange : c'est la proposition 19 du chapitre 13.

- *Hyperplans affines.* Si φ est une forme linéaire non nulle et $c \in \mathbb{K}$, l'ensemble d'équation $\varphi(x) = c$ est un hyperplan affine de direction $\text{Ker}\,\varphi$: il n'est pas vide, puisque φ est surjective (proposition 22).

Remarque : Le chapitre 12 a rencontré la même structure sans espace vectoriel : les solutions entières de $ax + by = c$ s'obtiennent en ajoutant à l'une d'elles les solutions de $ax + by = 0$. Le théorème 8 n'utilise en effet que l'additivité de u, c'est-à-dire le fait que u soit un morphisme de groupes.

14.10 Bilan

Le chapitre a construit deux familles de notions, les espaces et les applications, qui se répondent : un sous-espace est souvent un noyau, une famille génératrice décrit une image, et une somme directe définit des projecteurs. Le schéma montre l'enchaînement des résultats ; une flèche signifie « sert à démontrer ».



Les boîtes bleues décrivent les espaces, les vertes les applications, les rouges les résultats centraux et les orange les objets géométriques qui en découlent ; les deux branches se rejoignent dans le théorème 4, qui dit qu'une application linéaire est connue par les images d'une base. Le tableau rappelle comment l'on démontre les propriétés les plus fréquentes.

Pour montrer que...	on peut...
F est un sous-espace de E	vérifier $0 \in F$ et $\lambda x + y \in F$, ou reconnaître un noyau, un Vect, une intersection
$(x_1, \dots, x_n)$ est libre	résoudre $\sum \lambda_k x_k = 0$; pour des polynômes, comparer les degrés
(e_i) est une base	montrer l'existence et l'unicité des coordonnées (théorème 2)
$E = F \oplus G$	raisonner par analyse-synthèse, ou montrer $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$
u est injective	montrer que $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ (théorème 3)
p est un projecteur	montrer que p est linéaire et que $p \circ p = p$ (théorème 5)
une équation est résolue	ajouter une solution particulière au noyau (théorème 8)

Le chapitre 15 introduira la dimension, qui compte le nombre de vecteurs d'une base et permettra de calculer sans résoudre : le théorème du rang reliera les tailles du noyau et de l'image. Le chapitre 16 représentera les applications linéaires par des matrices, une fois des bases choisies.