Chapitre 15

Dimension finie et rang

15.1 Introduction historique

Je le vois, mais je ne le crois pas.

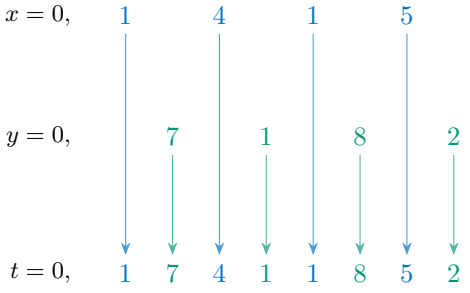
Georg Cantor - Lettre à Richard Dedekind, 29 juin 1877

15.1.1 Une ligne qui remplit un carré

Qu'est-ce que la dimension ? Pour Euclide, une ligne a une dimension et une surface deux ; chacun croit qu'il faut deux nombres pour repérer un point du plan, et qu'un seul ne saurait suffire. En juin 1877, **Georg Cantor** écrit à **Richard Dedekind** qu'il a trouvé une bijection entre le segment $[0,1]$ et le carré $[0,1]^2$: à un point (x,y) du carré, il associe le nombre dont on lit alternativement les chiffres de x et ceux de y. Il demande à son ami de vérifier la démonstration, et la phrase en exergue, écrite en français au milieu d'une lettre allemande, exprime moins de l'incrédulité devant le résultat que l'attente de cette vérification. Dedekind répond quelques jours plus tard que la bijection de Cantor n'est pas continue, et conjecture que la dimension d'un espace se conserve par les bijections continues dans les deux sens : **Brouwer** le démontrera en 1911. La dimension n'est donc pas le nombre d'éléments, puisque la ligne et le carré en ont « autant ». En algèbre linéaire, la difficulté disparaît : la dimension est le nombre de vecteurs d'une base, et le théorème central du chapitre dit que ce nombre ne dépend pas de la base choisie. **Grassmann** en avait l'idée dès 1862, et **Steinitz** en publie en 1913 l'énoncé général, sous le nom de théorème d'échange.

15.1.2 Le procédé de Cantor

Le schéma montre le principe sur deux nombres décimaux. Cantor utilisait en réalité des fractions continues, pour éviter l'ambiguïté des développements décimaux comme $0{,}1999\ldots = 0{,}2$; le chapitre montrera qu'aucune application *linéaire* ne peut réussir ce tour de force, puisqu'un isomorphisme conserve la dimension.



un point (x,y) du carré $[0,1]^2$
devient un point t du segment $[0,1]$
en alternant les chiffres de x et de y

15.2 Espaces de dimension finie

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Les familles sont finies, sauf mention contraire, et l'on utilise les définitions du chapitre 14 : familles libres, génératrices, bases.

15.2.1 Définition et lemme fondamental

Définition : Un espace vectoriel E est **de dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, il est **de dimension infinie**.

Exemples :

- Les espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{C}$, vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, sont de dimension finie, engendrés par leurs bases canoniques du chapitre 14. L'espace des solutions de $y''+ay'+by=0$ l'est aussi, puisque le chapitre 6 l'a décrit comme engendré par deux fonctions.
- L'espace $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie : des polynômes $P_1,\dots,P_p$ n'engendrent que des polynômes de degré au plus $\max \deg P_i$, et $X^{1+\max \deg P_i}$ n'est pas l'un d'eux. Les espaces $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, qui contiennent des copies de $\mathbb{K}[X]$, sont aussi de dimension infinie ; on le justifiera après le théorème 5.

Tout le chapitre repose sur le résultat suivant, qui compare la taille d'une famille libre à celle d'une famille génératrice.

Théorème 1 : Lemme fondamental :
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. Par conséquent, toute famille libre a au plus n éléments.

∘ Démonstration : On raisonne par récurrence sur n. Si $n=0$, l'espace est $\{0\}$, et une famille d'un vecteur est (0), qui est liée.

▷ *Hérédité.* Supposons le résultat vrai au rang $n-1$, et soit $E=\mathrm{Vect}(g_1,\dots,g_n)$ et $y_1,\dots,y_{n+1}\in E$. On note $F=\mathrm{Vect}(g_1,\dots,g_{n-1})$, et l'on écrit $y_j=z_j+a_jg_n$ avec $z_j\in F$ et $a_j\in\mathbb{K}$.

- Si tous les a_j sont nuls, les n vecteurs $y_1,\dots,y_n$ appartiennent à F, engendré par $n-1$ vecteurs : ils sont liés par hypothèse de récurrence, et la famille entière est liée.
- Sinon, quitte à renuméroter, $a_{n+1}\neq 0$. Les n vecteurs $y'_j=y_j-\frac{a_j}{a_{n+1}}y_{n+1}$, $j\leqslant n$, ont une composante nulle sur g_n, donc appartiennent à F : ils sont liés, et une relation $\sum_{j\leqslant n}\lambda_j y'_j=0$, à coefficients non tous nuls, s'écrit
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j-\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j a_j}{a_{n+1}}\Big)y_{n+1}=0,$$
qui est une relation de dépendance entre $y_1,\dots,y_{n+1}$.

□

Remarque : C'est la méthode du pivot du chapitre 3 : on se sert d'un vecteur dont la composante sur g_n est non nulle pour éliminer cette composante dans les autres, et l'on se ramène à un espace engendré par un vecteur de moins.

15.2.2 Existence de bases

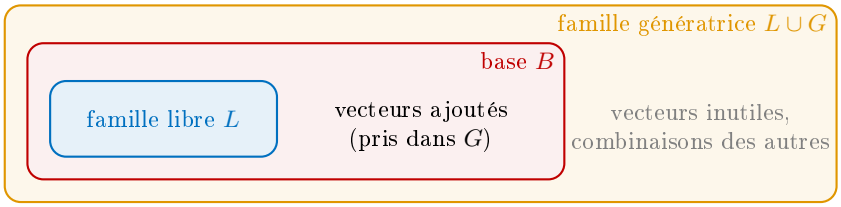
Théorème 2 : Existence de bases :
Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une famille génératrice de E, et $I\subset[\![1\,,p]\!]$ une partie telle que la famille $(x_i)_{i\in I}$ soit libre. Il existe une partie J de $[\![1\,,p]\!]$ contenant I telle que $(x_j)_{j\in J}$ soit une base de E. En particulier :

(i) tout espace de dimension finie possède une base ;
(ii) **théorème de la base extraite** : de toute famille génératrice finie, on peut extraire une base ;
(iii) **théorème de la base incomplète** : toute famille libre de E peut être complétée en une base de E, à l'aide de vecteurs d'une famille génératrice donnée.

∘ Démonstration :

▷ *Énoncé principal.* Parmi les parties J telles que $I \subset J \subset [\![1\,,p]\!]$ et que $(x_j)_{j\in J}$ soit libre, il y en a au moins une, I elle-même ; on en choisit une de cardinal maximal. Pour tout $k \in [\![1\,,p]\!]$, le vecteur x_k appartient à $\mathrm{Vect}(x_j)_{j\in J}$: c'est clair si $k \in J$, et sinon, la famille obtenue en ajoutant x_k serait libre par la proposition 8 du chapitre 14, ce qui contredirait la maximalité. Donc $\mathrm{Vect}(x_j)_{j\in J}$ contient tous les x_k, et vaut E : la famille est une base.

▷ *Conséquences.* Le point (ii) est le cas $I = \varnothing$, et (i) en découle, la famille vide étant par convention la base de $\{0\}$. Pour (iii), si $(\ell_1, \dots, \ell_q)$ est libre et $(g_1, \dots, g_r)$ génératrice, on applique l'énoncé principal à la famille génératrice $(\ell_1, \dots, \ell_q, g_1, \dots, g_r)$ et à $I = [\![1\,,q]\!]$. □



On obtient une base en complétant la famille libre par des vecteurs de la famille génératrice, tant que la famille reste libre ; les vecteurs restants sont alors des combinaisons des vecteurs déjà choisis.

15.2.3 Dimension

Théorème 3 : Dimension :
Dans un espace de dimension finie E, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est la **dimension** de E, notée $\dim E$; par convention, $\dim\{0\} = 0$.

∘ Démonstration : Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases, à n et n' éléments. Comme $\mathcal{B}$ engendre E et que $\mathcal{B}'$ est libre, le théorème 1 donne $n' \leqslant n$; en échangeant les rôles, $n \leqslant n'$. □

Exemples :

- $\dim \mathbb{K}^n = n$ et $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$, par leurs bases canoniques. L'espace $\mathbb{C}$ est de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, de base $(1, \mathrm{i})$, et de dimension 1 sur $\mathbb{C}$: la dimension dépend du corps des scalaires, et l'on note parfois $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.
- Si E et F sont de dimension finie, de bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_p)$, la famille
$$\big((e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_p)\big)$$
est une base de $E \times F$, donc $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Proposition 1 : *(Dimensions des espaces de solutions.)* Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, et $a, b \in \mathbb{K}$.
(i) Si $\alpha : I \to \mathbb{K}$ est continue, l'espace des solutions sur I de $y' + \alpha(x)y = 0$ est une droite.
(ii) L'espace des solutions sur I de $y'' + ay' + by = 0$ est de dimension 2.
(iii) L'espace des suites $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout n est de dimension 2.

∘ Démonstration :

▷ *(i)* Le théorème 2 du chapitre 6 décrit ces solutions comme les $x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-A(x)}$: c'est la droite engendrée par la fonction e^{-A}, qui ne s'annule pas.

▷ *(ii)* Par le théorème 6 du chapitre 6, il existe une unique solution φ telle que $\varphi(x_0) = 1$ et $\varphi'(x_0) = 0$, et une unique solution ψ telle que $\psi(x_0) = 0$ et $\psi'(x_0) = 1$. Si y est une solution, y et $y(x_0)\varphi + y'(x_0)\psi$ sont deux solutions ayant les mêmes conditions initiales, donc elles sont égales : (φ, ψ) est génératrice. Elle est libre : si $\lambda\varphi + \mu\psi = 0$, l'évaluation en x_0 de la fonction et de sa dérivée donne $\lambda = \mu = 0$.

▷ *(iii)* Même raisonnement, avec les suites e et f définies par $(e_0, e_1) = (1, 0)$, $(f_0, f_1) = (0, 1)$ et la relation de récurrence : une suite vérifiant la relation est déterminée par ses deux premiers termes, et $u = u_0 e + u_1 f$. □

Les chapitres 6 et 7 donnaient deux solutions « fondamentales », comme $\mathrm{e}^{r_1 x}$ et $\mathrm{e}^{r_2 x}$; la proposition 1 explique pourquoi il en faut exactement deux : n'importe quelle base de cet espace de dimension 2 convient, et l'on choisit celle qui rend les calculs les plus simples.

15.2.4 Familles libres et génératrices en dimension n

Théorème 4 : Bases en dimension n :
Soit E un espace de dimension n.

(i) Toute famille libre de E a au plus n éléments, et toute famille génératrice en a au moins n.

(ii) Pour une famille de *exactement* n vecteurs, on a les équivalences

$$\text{base} \iff \text{libre} \iff \text{génératrice}.$$

∘ Démonstration :

▷ *(i)* Une base de E a n éléments et engendre E : le théorème 1 limite à n le nombre d'éléments d'une famille libre. Une famille génératrice contient une base (théorème 2), qui a n éléments.

▷ *(ii)* Une famille libre de n vecteurs se complète en une base (théorème 2), qui a n éléments : on n'a rien ajouté, et la famille est une base. Une famille génératrice de n vecteurs contient une base, à n éléments : c'est elle-même. □

♡ **Méthode : Pour montrer qu'une famille est une base d'un espace de dimension connue n :**

- ▶ On vérifie que la famille a exactement n vecteurs.
- ▶ On montre qu'elle est libre, ce qui est en général plus facile que de montrer qu'elle est génératrice.
- ▶ On conclut par le théorème 4 (ii).

Exemples :

- Pour $a \neq b$, la famille $\big((X-a)^k(X-b)^{n-k}\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est formée de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$, espace de dimension $n+1$. Elle est libre, par l'évaluation en b et une récurrence (exercice 24 du chapitre 14) : c'est une base, sans qu'il soit nécessaire de prouver qu'elle engendre $\mathbb{K}_n[X]$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\big((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\big)$ est libre (chapitre 14) : c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
- La famille $(1,\mathrm{i})$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, de dimension 2 : c'est une base, comme on l'a vu directement au chapitre 14.

Remarque : L'erreur la plus répandue est d'appliquer le théorème 4 (ii) sans avoir vérifié que la famille a *exactement* n vecteurs, ou sans connaître la dimension. En dimension infinie, le théorème est faux : la famille $(X^k)_{k\geqslant 1}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$ sans être une base, et l'endomorphisme de dérivation du chapitre 14 est surjectif sans être injectif.

15.2.5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition : Le **rang** d'une famille finie $(x_1,\dots,x_p)$ de vecteurs de E est la dimension du sous-espace qu'elle engendre :

$$\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_p) = \dim \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_p).$$

Proposition 2 : Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace E de dimension n. Alors $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_p) \leqslant \min(p,n)$, avec

$$\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_p) = p \iff (x_1,\dots,x_p) \text{ est libre,}$$

$$\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_p) = n \iff (x_1,\dots,x_p) \text{ engendre } E.$$

Le rang ne change pas par les opérations de la proposition 6 du chapitre 14.

∘ Démonstration : La famille engendre $V = \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_p)$; par le théorème 4 (i) appliqué à V, $\dim V \leqslant p$, avec égalité si et seulement si la famille, génératrice de V, en est une base, c'est-à-dire si elle

est libre (théorème 4 (ii)). L'inégalité $\dim V \leqslant n$ et son cas d'égalité, $V = E$, relèvent du théorème 5 de la section suivante. La dernière phrase vient de ce que ces opérations ne changent pas V. □

Exemple : Le rang de $\big((1,0,-1),(-1,1,0),(0,-1,1)\big)$ vaut 2 : la somme des trois vecteurs est nulle, et les deux premiers ne sont pas colinéaires. On retrouve que l'endomorphisme $(x,y,z) \mapsto (x-y, y-z, z-x)$ du chapitre 14 a une image plane : son rang, au sens de la section 15.4, vaut 2.

15.3 Sous-espaces et dimension

15.3.1 Dimension d'un sous-espace

Théorème 5 : Dimension d'un sous-espace :
Soit E un espace de dimension n et F un sous-espace de E. Alors F est de dimension finie, $\dim F \leqslant \dim E$, et

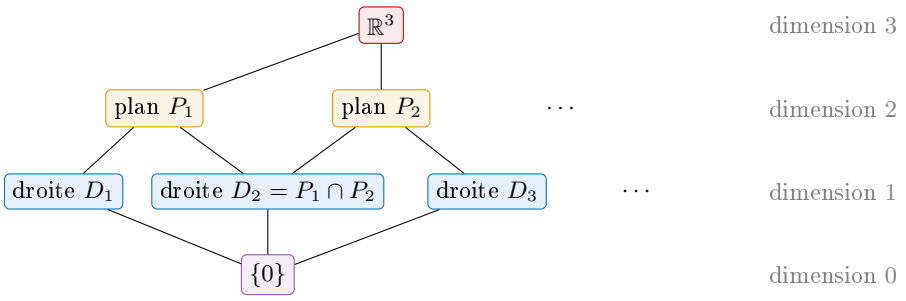
$$\dim F = \dim E \iff F = E.$$

∘ Démonstration : Les familles libres de F sont libres dans E, donc ont au plus n éléments (théorème 4). Choisissons-en une, $(f_1, \dots, f_p)$, de cardinal maximal. Elle engendre F : si $x \in F$ n'était pas dans $\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)$, la famille $(f_1, \dots, f_p, x)$ serait libre (proposition 8 du chapitre 14), ce qui contredirait la maximalité. C'est donc une base de F, qui est de dimension finie $p \leqslant n$. Si $p = n$, c'est une famille libre de n vecteurs de E, donc une base de E (théorème 4), et $F = E$. □

Remarques :

- Un espace qui contient une famille libre infinie est de dimension infinie : sinon, par le théorème 4, ses familles libres auraient au plus $\dim E$ éléments. C'est le cas de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, qui contient la famille libre $\big((n^k)_{n\in\mathbb{N}}\big)_{k\in\mathbb{N}}$, et de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, qui contient les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ (chapitre 14).
- Le cas d'égalité est l'outil le plus utilisé du chapitre : pour montrer que deux sous-espaces sont égaux, il suffit de montrer que l'un est contenu dans l'autre et qu'ils ont la même dimension.

Exemple : Les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ sont classés par leur dimension : $\{0\}$, les droites vectorielles, les plans vectoriels, et $\mathbb{R}^3$ lui-même. En effet, un sous-espace de dimension 1 est engendré par un vecteur non nul, un sous-espace de dimension 2 par deux vecteurs non colinéaires, et le seul sous-espace de dimension 3 est $\mathbb{R}^3$ (théorème 5).



Chaque trait relie un sous-espace à un sous-espace qui le contient et dont la dimension vaut un de plus. Deux plans distincts se coupent toujours selon une droite, ce qu'expliquera la formule de Grassmann.

15.3.2 Supplémentaires et bases adaptées

Théorème 6 : Existence de supplémentaires :
Soit E un espace de dimension finie. Tout sous-espace F de E admet un supplémentaire, et tous les supplémentaires de F ont pour dimension $\dim E - \dim F$.

∘ Démonstration : Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F. Par le théorème de la base incomplète, on la complète en une base $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ de E, et l'on pose $G = \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_q)$. Tout vecteur s'écrit de façon unique dans cette base, donc de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G : $E = F \oplus G$. La dimension des supplémentaires est l'objet de la proposition 3. □

Définition : Soit $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$. Une base de E est **adaptée** à cette décomposition si elle est obtenue en mettant bout à bout une base de chacun des F_i. Une base de E est adaptée à un sous-espace F si ses premiers vecteurs forment une base de F.

Proposition 3 : Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces de E, de dimension finie, et $\mathcal{B}_i$ une base de F_i pour chaque i. La somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe si et seulement si la famille $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant les $\mathcal{B}_i$ est libre. Dans ce cas, $\mathcal{B}$ est une base de la somme, et

$$\dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_p) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_p.$$

∘ Démonstration : La famille $\mathcal{B}$ engendre $F_1 + \cdots + F_p$ (proposition 11 du chapitre 14). Une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$ s'écrit $x_1 + \cdots + x_p$, où x_i est la partie portant sur les vecteurs de $\mathcal{B}_i$, et $x_i = 0$ si et seulement si ses coefficients sont nuls, puisque $\mathcal{B}_i$ est libre. Donc $\mathcal{B}$ est libre si et seulement si la seule décomposition $x_1 + \cdots + x_p = 0$ est la décomposition triviale, c'est-à-dire, par la proposition 14 du chapitre 14, si la somme est directe. La formule s'obtient en comptant les vecteurs de $\mathcal{B}$. □

Si $E = F \oplus G$, la proposition 3 donne $\dim G = \dim E - \dim F$: c'est la seconde partie du théorème 6. Dans une base adaptée à $E = F \oplus G$, le projecteur sur F parallèlement à G conserve les premiers vecteurs et annule les autres ; c'est l'écriture la plus simple d'un projecteur, que le chapitre 16 traduira par une matrice diagonale.

15.3.3 Formule de Grassmann

Théorème 7 : Formule de Grassmann :
Soit F et G deux sous-espaces de dimension finie de E. Alors $F + G$ est de dimension finie, et

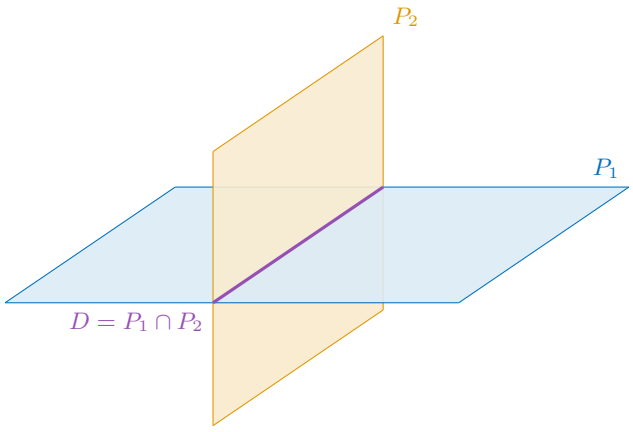
$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

∘ Démonstration : Soit S un supplémentaire de $F \cap G$ dans G (théorème 6, appliqué dans l'espace G), de sorte que $\dim S = \dim G - \dim(F \cap G)$. Montrons que $F + G = F \oplus S$.

▷ *Somme.* Comme $S \subset G$, on a $F + S \subset F + G$. Réciproquement, tout $z \in G$ s'écrit $z = t + s$ avec $t \in F \cap G$ et $s \in S$, donc $y + z = (y + t) + s \in F + S$ pour tout $y \in F$.

▷ *Somme directe.* Si $x \in F \cap S$, alors $x \in F \cap G$, puisque $S \subset G$, et $x \in S$: il appartient à $(F \cap G) \cap S = \{0\}$.

▷ *Conclusion.* Par la proposition 3, $\dim(F + G) = \dim F + \dim S = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$. □



Deux plans distincts P_1 et P_2 de $\mathbb{R}^3$ ont pour somme $\mathbb{R}^3$, puisque $P_1 + P_2$ contient strictement P_1 ; la formule de Grassmann donne alors $\dim(P_1 \cap P_2) = 2 + 2 - 3 = 1$: ils se coupent selon une droite.

Proposition 4 : *(Caractérisation dimensionnelle des supplémentaires.)* Soit E de dimension finie, et F, G deux sous-espaces de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = F \oplus G$;

(ii) $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$;

(iii) $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

∘ Démonstration : Si $E = F \oplus G$, la proposition 3 donne la formule des dimensions, et les autres conditions sont la définition. Sous (ii), la formule de Grassmann donne $\dim(F + G) = \dim E$, donc $F + G = E$ (théorème 5). Sous (iii), elle donne $\dim(F \cap G) = 0$, donc $F \cap G = \{0\}$. □

♡ **Méthode : Pour montrer que $E = F \oplus G$ en dimension finie :**

- ▶ On calcule $\dim F$ et $\dim G$, et l'on vérifie que leur somme vaut $\dim E$.
- ▶ On montre que $F \cap G = \{0\}$, ce qui demande en général moins de travail que d'établir $F + G = E$.
- ▶ On conclut par la proposition 4.

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}^3$, le plan P d'équation $x+y+z = 0$ et la droite $\mathbb{R}(1,1,1)$ ont des dimensions de somme 3, et leur intersection est nulle, puisque $(t,t,t) \in P$ impose $t = 0$: ils sont supplémentaires, ce que le chapitre 14 avait établi par analyse-synthèse.
- Dans $\mathbb{K}_n[X]$, les polynômes pairs forment le sous-espace engendré par les X^{2k}, et les polynômes impairs celui engendré par les X^{2k+1}. Leur intersection est nulle, et leurs bases mises bout à bout forment la base canonique : $\mathbb{K}_n[X]$ est leur somme directe, et leurs dimensions ont pour somme $n + 1$.

Proposition 5 : Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces de dimension finie de E. Alors

$$\dim(F_1 + \cdots + F_p) \leqslant \dim F_1 + \cdots + \dim F_p,$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

∘ Démonstration : La famille $\mathcal{B}$ de la proposition 3 engendre $F_1 + \cdots + F_p$, et elle a $\sum \dim F_i$ éléments : le théorème 4 donne l'inégalité. Il y a égalité si et seulement si $\mathcal{B}$ est une base de la somme, c'est-à-dire si elle est libre (proposition 2), donc si la somme est directe (proposition 3). □

Remarque : Pour $p = 2$, l'inégalité découle de la formule de Grassmann, puisque $\dim(F \cap G) \geqslant 0$. Pour $p \geqslant 3$, il n'existe pas de formule analogue faisant intervenir les seules intersections deux à deux, comme le montre l'exemple des trois droites du plan (chapitre 14).

15.4 Applications linéaires en dimension finie

15.4.1 Rang d'une application linéaire

Définition : Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est **de rang fini** si son image est de dimension finie ; son **rang** est alors $\operatorname{rg}(u) = \dim \operatorname{Im} u$.

Si E est de dimension finie, de base $(e_1, \dots, e_n)$, la proposition 18 du chapitre 14 donne

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big) :$$

u est de rang fini, et

$$\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big) \leqslant \dim E.$$

Si F est aussi de dimension finie, $\operatorname{rg}(u) \leqslant \dim F$ par le théorème 5, avec égalité si et seulement si u est surjective.

Proposition 6 : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ un isomorphisme. L'image par u d'une base de E est une base de F. En particulier, si E et F sont de dimension finie et isomorphes, $\dim E = \dim F$.

∘ Démonstration : C'est le théorème 4 (iii) du chapitre 14 : u est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base est une base. Les deux bases ont le même nombre d'éléments. □

15.4.2 Théorème du rang

Théorème 8 : Forme géométrique du théorème du rang :
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E. Alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$:

$$\tilde{u} : \left| \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right. \quad \text{est bijective.}$$

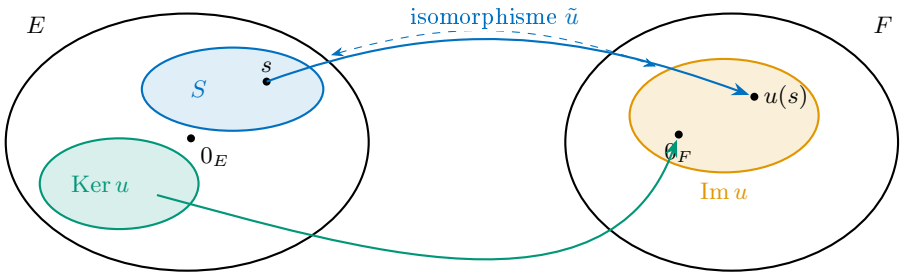
∘ Démonstration : L'application $\tilde{u}$ est linéaire, à valeurs dans $\operatorname{Im} u$. Elle est injective : son noyau est $\operatorname{Ker} u \cap S = \{0\}$. Elle est surjective : si $y = u(x)$, on écrit $x = k + s$ avec $k \in \operatorname{Ker} u$ et $s \in S$, et $y = u(k) + u(s) = \tilde{u}(s)$. □

Ce théorème vaut en dimension quelconque, dès que $\operatorname{Ker} u$ admet un supplémentaire ; en dimension finie, c'est toujours le cas (théorème 6), et il en découle une formule.

Théorème 9 : Théorème du rang :
Soit E un espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors u est de rang fini, et

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg}(u).$$

∘ Démonstration : Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ (théorème 6). Par le théorème 8 et la proposition 6, $\dim S = \dim \operatorname{Im} u = \operatorname{rg}(u)$, et par la proposition 3, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim S$. □



Le noyau est écrasé sur 0_F, et un supplémentaire S du noyau est envoyé bijectivement sur l'image : la dimension de E se partage entre ce qui est perdu, $\dim \operatorname{Ker} u$, et ce qui est conservé, $\operatorname{rg}(u)$.

♡ **Méthode : Pour déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire en dimension finie :**

- On calcule l'un des deux, en général le noyau, en résolvant $u(x) = 0$.
- On en déduit la dimension de l'autre par le théorème du rang.
- Pour l'image, il suffit alors de trouver $\operatorname{rg}(u)$ vecteurs libres dans $\operatorname{Im} u$, ou une famille de vecteurs de $\operatorname{Im} u$ de rang $\operatorname{rg}(u)$.

Exemples :

- L'endomorphisme $u : (x,y,z) \mapsto (x-y, y-z, z-x)$ de $\mathbb{R}^3$ a pour noyau la droite $\mathbb{R}(1,1,1)$, donc $\operatorname{rg}(u) = 2$. L'image est contenue dans le plan P d'équation $a+b+c=0$, de dimension 2 : elle est égale à P (théorème 5), sans autre calcul.
- La dérivation D de $\mathbb{K}_n[X]$ dans lui-même a pour noyau $\mathbb{K}_0[X]$, de dimension 1 : son rang est n, et son image, contenue dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui est de dimension n, est égale à $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

15.4.3 Conséquences

Théorème 10 : Injectivité, surjectivité en dimension finie :
Soit E et F deux espaces de *même* dimension finie n, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors

$$u \text{ injective} \iff u \text{ surjective} \iff u \text{ bijective}.$$

En particulier, un endomorphisme u d'un espace de dimension finie est un automorphisme dès qu'il admet un inverse à gauche ($v \circ u = \mathrm{id}$) ou un inverse à droite ($u \circ v = \mathrm{id}$).

∘ Démonstration : Par le théorème du rang, u est injective si et seulement si $\dim \operatorname{Ker} u = 0$, si et seulement si $\operatorname{rg}(u) = n = \dim F$, si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$ (théorème 5). Si $v \circ u = \mathrm{id}$, alors u est injective, donc bijective, et $v = v \circ u \circ u^{-1} = u^{-1}$. Si $u \circ v = \mathrm{id}$, alors u est surjective, donc bijective, et $v = u^{-1}$. □

♡ **Méthode : Pour montrer qu'un problème linéaire a une unique solution en dimension finie :**

- On écrit le problème sous la forme $u(x) = b$, avec $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\dim E = \dim F$.
- On montre l'unicité, c'est-à-dire que $\operatorname{Ker} u = \{0\}$.
- L'existence en découle par le théorème 10, sans avoir à construire la solution.

Exemples :

- *Interpolation de Lagrange.* Soit $x_1, \dots, x_n$ distincts. L'application $P \mapsto \big(P(x_1), \dots, P(x_n)\big)$, de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$, est injective, puisqu'un polynôme non nul de degré au plus $n-1$ a au plus $n-1$ racines. Les deux espaces sont de dimension n : elle est bijective, ce qui redonne l'existence du polynôme interpolateur (théorème 13 du chapitre 13) sans la formule de Lagrange.
- Pour tout $Q \in \mathbb{K}_n[X]$, il existe un unique $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P + P' = Q$: l'endomorphisme $P \mapsto P + P'$ de $\mathbb{K}_n[X]$ est injectif, puisque $P + P' = 0$ impose, en comparant les degrés, $P = 0$. Le chapitre 14 avait construit la solution ; ici, l'existence est gratuite.

Remarque : L'hypothèse de dimension finie est indispensable. Dans $\mathbb{K}[X]$, la dérivation est surjective sans être injective, et l'endomorphisme $P \mapsto XP$ est injectif sans être surjectif ; de même, la dérivation admet pour inverse à droite l'application qui associe à P sa primitive nulle en 0, mais elle n'est pas inversible. L'erreur la plus répandue est d'invoquer le théorème 10 sans vérifier que les deux espaces ont la même dimension, et qu'elle est finie.

Théorème 11 : Classification des espaces de dimension finie :
Deux espaces de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension. En particulier, tout espace E de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, par l'application qui associe à un vecteur ses coordonnées dans une base.

∘ Démonstration : Le sens direct est la proposition 6. Réciproquement, si $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ sont des bases de E et de F, l'unique application linéaire telle que $u(e_k) = f_k$ envoie une base sur une base : c'est un isomorphisme (théorème 4 du chapitre 14). Pour $F = \mathbb{K}^n$ et la base canonique, u^{-1} associe à x ses coordonnées. □

Remarque : Les espaces $\mathbb{K}^2$, $\mathbb{K}_1[X]$ et l'espace des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ sont tous de dimension 2 : ils sont donc « le même » espace, vu à travers des bases différentes. C'est ce qui rend possible le calcul matriciel du chapitre 16 : tout calcul linéaire en dimension n se ramène à un calcul sur des n-uplets.

Proposition 7 : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, avec E et F de dimension finie.

(i) $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min\big(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v)\big)$.

(ii) Si v est un isomorphisme, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$; si u est un isomorphisme, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$.

∘ Démonstration :

▷ *(i)* On a $\operatorname{Im}(v\circ u)\subset \operatorname{Im} v$, donc $\operatorname{rg}(v\circ u)\leqslant \operatorname{rg}(v)$. Et $\operatorname{Im}(v\circ u)=v(\operatorname{Im} u)$ est l'image de $\operatorname{Im} u$ par l'application linéaire v, donc de dimension au plus $\dim \operatorname{Im} u$, par le théorème du rang appliqué à la restriction de v à $\operatorname{Im} u$.

▷ *(ii)* Si v est un isomorphisme, sa restriction à $\operatorname{Im} u$ est injective, donc $\dim v(\operatorname{Im} u)=\dim \operatorname{Im} u$. Si u est un isomorphisme, $\operatorname{Im} u=F$ et $\operatorname{Im}(v\circ u)=v(F)=\operatorname{Im} v$. □

Proposition 8 : Si E et F sont de dimension finie, $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie, et

$$\dim \mathcal{L}(E,F)=\dim E\times \dim F.$$

∘ Démonstration : Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. L'application

$$u\mapsto \big(u(e_1),\dots,u(e_n)\big),$$

de $\mathcal{L}(E,F)$ dans F^n, est linéaire. Elle est bijective par le théorème 4 du chapitre 14 : une application linéaire est déterminée de façon unique par les images des vecteurs d'une base, et ces images peuvent être choisies arbitrairement. Donc $\dim \mathcal{L}(E,F)=\dim F^n=n\dim F$. □

Le chapitre 16 rangera les n vecteurs $u(e_k)$, écrits dans une base de F, dans un tableau à $\dim F$ lignes et n colonnes : la matrice de u. La proposition 8 dit qu'il faut exactement np nombres pour décrire une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$.

15.5 Hyperplans et systèmes d'équations

15.5.1 Hyperplans en dimension finie

Le chapitre 14 a défini un hyperplan comme le noyau d'une forme linéaire non nulle. En dimension finie, la dimension les caractérise.

Théorème 12 : Hyperplans en dimension finie :
Soit E un espace de dimension $n\geqslant 1$. Les hyperplans de E sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, un hyperplan H admet une équation de la forme

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0,\qquad (a_1,\dots,a_n)\neq(0,\dots,0),$$

où $x_1,\dots,x_n$ sont les coordonnées d'un vecteur, et deux telles équations de H sont proportionnelles.

∘ Démonstration :

▷ *Dimension.* Si $H=\operatorname{Ker}\varphi$ avec φ non nulle, φ est surjective sur $\mathbb{K}$ (proposition 22 du chapitre 14), donc de rang 1, et le théorème du rang donne $\dim H=n-1$. Réciproquement, si $\dim H=n-1$, H admet un supplémentaire de dimension 1 (théorème 6), c'est-à-dire une droite, et le théorème 7 du chapitre 14 dit qu'un supplémentaire d'une droite est un hyperplan.

▷ *Équations.* Une forme linéaire φ s'écrit $\varphi=\sum\varphi(e_k)e_k^*$, puisque $\varphi(x)=\sum x_k\varphi(e_k)$: on pose $a_k=\varphi(e_k)$, non tous nuls puisque $\varphi\neq 0$. La proportionnalité est la proposition 23 du chapitre 14. □

Exemples :

- Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites vectorielles, d'équation $ax+by=0$; ceux de $\mathbb{R}^3$ sont les plans vectoriels, d'équation $ax+by+cz=0$.
- Dans $\mathbb{K}_n[X]$, de dimension $n+1$, l'ensemble des polynômes qui s'annulent en a est un hyperplan ; on retrouve que $(X-a)\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est de dimension n.

15.5.2 Intersections d'hyperplans

Théorème 13 : Intersections d'hyperplans :
Soit E un espace de dimension n.
(i) L'intersection de m hyperplans de E est de dimension au moins $n-m$.
(ii) Réciproquement, tout sous-espace de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.

∘ Démonstration :

▷ *(i)* Soit $H_i = \operatorname{Ker}\varphi_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$. L'application

$$u : x \mapsto \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)\big),$$

de E dans $\mathbb{K}^m$, est linéaire ; son noyau est l'intersection $H_1 \cap \dots \cap H_m$, et son rang est au plus m. Le théorème du rang donne $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_m) = n - \operatorname{rg}(u) \geqslant n-m$.

▷ *(ii)* Soit F de dimension $n-m$, et $(e_1, \dots, e_{n-m})$ une base de F, complétée en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Un vecteur appartient à F si et seulement si ses m dernières coordonnées sont nulles : F est l'intersection des hyperplans $\operatorname{Ker} e_k^*$, pour $n-m < k \leqslant n$. □

Remarque : L'inégalité peut être stricte : deux équations proportionnelles définissent le même hyperplan, et leur intersection est de dimension $n-1$, et non $n-2$. La démonstration montre qu'en général la dimension vaut $n-r$, où r est le rang de l'application u, c'est-à-dire le nombre d'équations « vraiment différentes ».

15.5.3 Systèmes linéaires et représentations d'un sous-espace

Un système homogène de m équations linéaires à p inconnues s'écrit $u(x) = 0$, avec $u : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^m$ linéaire, et l'ensemble S de ses solutions est $\operatorname{Ker} u$. Le **rang du système** est $r = \operatorname{rg}(u)$.

Proposition 9 : L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de m équations à p inconnues, de rang r, est un sous-espace de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p-r \geqslant p-m$. Si le système avec second membre est compatible, ses solutions forment un sous-espace affine de même direction, donc de même dimension.

∘ Démonstration : La première assertion est le théorème du rang, avec $r \leqslant m$; la seconde est le théorème 8 du chapitre 14. □

Le chapitre 14 a décrit un sous-espace de deux façons : par une *paramétrisation*, c'est-à-dire une famille génératrice, ou par des *équations*. La dimension relie les deux : un sous-espace de dimension d de $\mathbb{K}^n$ se paramètre par d vecteurs libres, et se décrit par $n-d$ équations indépendantes. Ainsi une droite de $\mathbb{R}^3$ demande deux équations, et un plan une seule.

♡ **Méthode : Pour passer d'une représentation d'un sous-espace F de $\mathbb{K}^n$ à l'autre :**
- *Des équations à une base* : on résout le système par la méthode du pivot, on exprime les inconnues principales en fonction de d paramètres, et les d vecteurs obtenus forment une base de F.
- *D'une base à des équations* : si $(v_1, \dots, v_d)$ est une base de F, on cherche les formes $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ qui s'annulent sur les v_j, ce qui est un système de d équations d'inconnues $a_1, \dots, a_n$; on en choisit $n-d$ indépendantes.
- On contrôle le résultat en comptant : d vecteurs libres, $n-d$ équations indépendantes.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^4$, le sous-espace F engendré par $(1,1,0,0)$ et $(0,1,1,1)$ est de dimension 2. Les formes $ax+by+cz+dt$ qui s'annulent sur les deux vecteurs vérifient $a+b=0$ et $b+c+d=0$, soit

$$(a,b,c,d) = \lambda(1,-1,1,0) + \mu(1,-1,0,1).$$

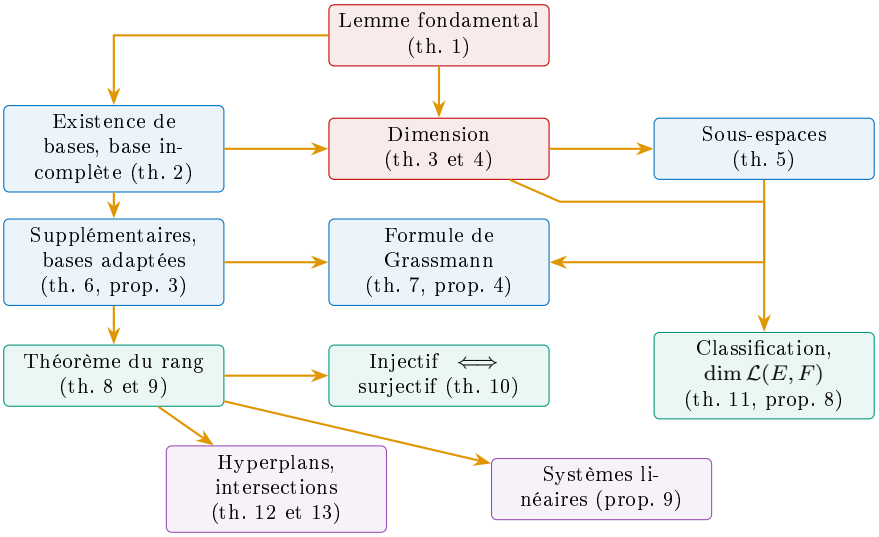
On en déduit deux équations indépendantes de F :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z=0 \text{ et } x-y+t=0\}.$$

L'ensemble défini par ces deux équations est de dimension $4-2=2$ par la proposition 9, et il contient F : il lui est égal, par le théorème 5.

15.6 Bilan

Le chapitre a tiré du lemme fondamental une seule notion, la dimension, et l'a appliquée aux sous-espaces puis aux applications linéaires. Le schéma montre l'enchaînement des résultats ; une flèche signifie « sert à démontrer ».



Les boîtes bleues concernent les espaces et leurs sous-espaces, les vertes les applications linéaires, les violettes les équations. Le tableau rassemble les formules de dimension du chapitre.

Situation	Formule
espaces usuels	$\dim \mathbb{K}^n = n$, $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$
produit	$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$
applications linéaires	$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \cdot \dim F$
somme de deux sous-espaces	$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$
somme directe	$\dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_p) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_p$
théorème du rang	$\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg}(u)$
hyperplans, équations	$\dim H = n-1$, $\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_m) \geqslant n-m$
système homogène de rang r	solutions de dimension $p-r$

Le chapitre 16 représentera une application linéaire entre espaces de dimension finie par une matrice, et il définira le rang d'une matrice comme celui de l'application associée ; le chapitre 17 introduira le déterminant, qui détecte les familles de n vecteurs formant une base d'un espace de dimension n.