Chapitre 17

Groupe symétrique et déterminants

17.1 Introduction historique

> *Le nombre des équations et des inconnues étant n, on trouvera la valeur de chaque inconnue en formant n fractions dont le dénominateur commun a autant de termes qu'il y a de divers arrangements de n choses différentes.*
>
> Gabriel Cramer - *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Genève, 1750

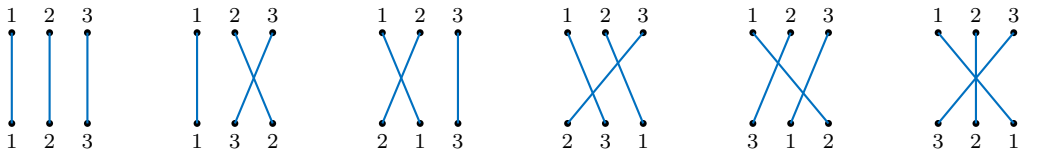
17.1.1 Une règle énoncée sans démonstration

En 1750, dans un appendice de son traité sur les courbes algébriques, **Gabriel Cramer** donne la règle qui résout un système de n équations à n inconnues. Le dénominateur commun est une somme de produits de n coefficients, un par équation et un par inconnue : il y a un terme par « arrangement » des indices, soit $n!$ termes. Pour le signe, Cramer invente une règle de comptage : lorsqu'un indice est suivi, dans le même terme, d'un indice plus petit, il parle de *dérangement* ; le terme reçoit le signe $+$ si le nombre de dérangements est pair, le signe $-$ s'il est impair. Cramer ne démontre rien. Le japonais **Seki Takakazu** (1683) et **Leibniz**, dans une lettre à L'Hôpital (1693), avaient déjà rencontré ces expressions ; **Vandermonde** et **Laplace** les étudient pour elles-mêmes en 1772, et **Cauchy**, dans un mémoire de 1812, leur donne le nom de *déterminants* et démontre la formule du produit, en s'appuyant sur une étude des permutations.

17.1.2 L'ordre historique et l'ordre du chapitre

L'histoire est partie d'une formule, dont il a fallu ensuite établir les propriétés. Le chapitre suit l'ordre inverse. La section 17.2 étudie les permutations et leur *signature*, qui n'est autre que la parité du nombre de dérangements de Cramer. La section 17.3 part de deux propriétés géométriques de l'aire orientée d'un parallélogramme, la linéarité par rapport à chaque côté et l'annulation lorsque les côtés sont égaux, et montre qu'elles déterminent une unique fonction : la formule de Cramer apparaît alors comme une conséquence, et non comme une définition. Les sections suivantes en tirent les propriétés du déterminant, ses méthodes de calcul et la formule de l'inverse.

Pour trois équations, les six arrangements de 1, 2, 3 donnent les six termes du dénominateur, écrits ci-dessous sous la forme $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$. On relie i, en haut, à $\sigma(i)$, en bas : chaque croisement de deux traits est un dérangement, et la parité du nombre de croisements donne le signe.



0 croisement	1 croisement	1 croisement	2 croisements	2 croisements	3 croisements
$+a_{11}a_{22}a_{33}$	$-a_{11}a_{23}a_{32}$	$-a_{12}a_{21}a_{33}$	$+a_{12}a_{23}a_{31}$	$+a_{13}a_{21}a_{32}$	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

17.2 Le groupe symétrique

Dans tout le chapitre, n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

17.2.1 Permutations

Le chapitre 11 a montré (théorème 1) que l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ des bijections de $[\![1\,,n]\!]$ dans lui-même, muni de la composition, est un groupe, non abélien dès que $n \geqslant 3$ (proposition 5 du chapitre 11). Ses éléments sont les **permutations** de $[\![1\,,n]\!]$, et son neutre est $\mathrm{id} = \mathrm{id}_{[\![1\,,n]\!]}$. On note simplement $\sigma\sigma'$ la composée $\sigma \circ \sigma'$: la permutation écrite à droite s'applique en premier. Une permutation σ se représente par un tableau à deux lignes, la seconde contenant les images des éléments de la première :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Proposition 1 : Le groupe $\mathfrak{S}_n$ est fini, de cardinal

$$\operatorname{card} \mathfrak{S}_n = n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

∘ Démonstration : On raisonne par récurrence sur n. Le groupe $\mathfrak{S}_1$ est réduit à l'identité. Soit $n \geqslant 2$, et supposons que $\mathfrak{S}_{n-1}$ a $(n-1)!$ éléments. Pour $k \in [\![1\,,n]\!]$, on note A_k l'ensemble des $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma(n) = k$; ces n ensembles sont deux à deux disjoints et ont pour réunion $\mathfrak{S}_n$.

L'ensemble A_n est en bijection avec $\mathfrak{S}_{n-1}$: une permutation qui fixe n induit une bijection de $[\![1\,,n-1]\!]$, et réciproquement toute bijection de $[\![1\,,n-1]\!]$ se prolonge de façon unique en une permutation qui fixe n. Si τ_k désigne la permutation qui échange k et n et fixe les autres éléments, l'application $\sigma \mapsto \tau_k\sigma$ est une bijection de A_n sur A_k, de réciproque $\sigma \mapsto \tau_k\sigma$, puisque $\tau_k^2 = \mathrm{id}$. Les n ensembles A_k ont donc chacun $(n-1)!$ éléments, et le cardinal d'une réunion disjointe étant la somme des cardinaux, $\operatorname{card} \mathfrak{S}_n = n \times (n-1)! = n!$. □

Remarque : Le nombre $n!$ croît très vite : $\mathfrak{S}_{10}$ a déjà 3 628 800 éléments. La formule de Cramer, qui contient un terme par permutation, est donc inutilisable pour le calcul dès que n dépasse 4 ; la section 17.5 donnera des méthodes efficaces.

17.2.2 Cycles et décomposition

Définition : Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- Le **support** de σ est l'ensemble $\mathrm{Supp}(\sigma) = \{i \in [\![1\,,n]\!] \mid \sigma(i) \neq i\}$ des éléments qu'elle déplace.
- Soit $p \geqslant 2$ et a_1, …, a_p des éléments deux à deux distincts de $[\![1\,,n]\!]$. La permutation qui envoie a_1 sur a_2, a_2 sur a_3, …, a_{p-1} sur a_p, a_p sur a_1, et fixe les autres éléments, est notée $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_p)$. C'est un **cycle** de **longueur** p, ou p-cycle, de support $\{a_1, \ldots, a_p\}$.
- Un cycle de longueur 2, qui échange deux éléments a et b et fixe les autres, est une **transposition**, notée $(a\ b)$.

Remarques :

- L'écriture d'un cycle n'est pas unique : $(1\ 3\ 5) = (3\ 5\ 1) = (5\ 1\ 3)$, puisqu'on peut commencer la liste par n'importe lequel de ses éléments. En revanche $(1\ 3\ 5) \neq (1\ 5\ 3)$, qui parcourt les mêmes éléments en sens inverse.
- Une transposition est son propre inverse : $(a\ b)^2 = \mathrm{id}$. Plus généralement, l'inverse du cycle $(a_1\ \cdots\ a_p)$ est $(a_p\ \cdots\ a_1)$, et un p-cycle c vérifie $c^p = \mathrm{id}$.

Proposition 2 : Deux permutations de supports disjoints commutent.

∘ Démonstration : Soit σ et σ' de supports disjoints, et $i \in [\![1\,,n]\!]$. Si $i \in \mathrm{Supp}(\sigma)$, alors $\sigma(i) \in \mathrm{Supp}(\sigma)$, sinon $\sigma(\sigma(i)) = \sigma(i)$ entraînerait $\sigma(i) = i$ par injectivité. Ainsi i et $\sigma(i)$ sont hors du support de σ', et $\sigma\sigma'(i) = \sigma(i) = \sigma'\sigma(i)$. Le cas $i \in \mathrm{Supp}(\sigma')$ est symétrique. Si i n'appartient à aucun des deux supports, les deux composées fixent i. □

Théorème 1 : Décomposition en cycles à supports disjoints :
Toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ différente de l'identité s'écrit comme un produit de cycles à supports deux à deux disjoints :

$$\sigma = c_1 c_2 \cdots c_r.$$

Cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près, et ces facteurs commutent deux à deux.

∘ Démonstration :

▷ *Les orbites.* Sur $[\![1\,,n]\!]$, la relation « il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $j = \sigma^k(i)$ » est une relation d'équivalence : elle est réflexive avec $k = 0$, symétrique en changeant k en $-k$, et transitive en ajoutant les exposants. Ses classes, appelées **orbites** de σ, forment une partition de $[\![1\,,n]\!]$ (chapitre 2).

▷ *Description d'une orbite.* Soit $i \in [\![1\,,n]\!]$. Les éléments $\sigma^k(i)$, pour $k \in \mathbb{N}$, appartiennent à un ensemble fini : il existe $a < b$ tels que $\sigma^a(i) = \sigma^b(i)$, et l'injectivité de σ^a donne $\sigma^{b-a}(i) = i$. Soit p le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que $\sigma^k(i) = i$. Les éléments i, $\sigma(i)$, …, $\sigma^{p-1}(i)$ sont distincts, par minimalité de p, et la division euclidienne de k par p montre que $\sigma^k(i)$ est l'un d'eux pour tout $k \in \mathbb{Z}$. L'orbite de i est donc $\{i, \sigma(i), \ldots, \sigma^{p-1}(i)\}$, et σ y agit comme le cycle $(i\ \sigma(i)\ \cdots\ \sigma^{p-1}(i))$ lorsque $p \geqslant 2$.

▷ *Existence.* Soit O_1, …, O_r les orbites ayant au moins deux éléments, et c_k le cycle associé à O_k. Ces cycles sont à supports disjoints. Si $j \in O_k$, tous les c_ℓ avec $\ell \neq k$ fixent j, et $c_k(j) = \sigma(j)$; si j est fixé par σ, tous les cycles le fixent. Donc $\sigma = c_1 \cdots c_r$, et $r \geqslant 1$ puisque $\sigma \neq \mathrm{id}$.

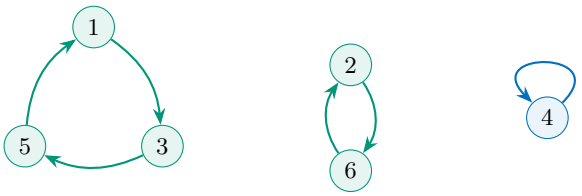
▷ *Unicité.* Soit $\sigma = c'_1 \cdots c'_s$ une autre écriture. Le support de chaque c'_ℓ est stable par σ, qui y coïncide avec c'_ℓ : c'est donc une orbite de σ à au moins deux éléments, sur laquelle c'_ℓ est la restriction de σ. Les c'_ℓ sont donc les c_k, à l'ordre près. La commutativité est la proposition 2. □

♡ **Méthode : Pour décomposer une permutation en cycles à supports disjoints :**
- On part du plus petit élément non fixé, et l'on suit ses images successives jusqu'à revenir à lui : on obtient un premier cycle.
- On recommence avec le plus petit élément non fixé qui n'a pas encore été rencontré.
- On s'arrête quand tous les éléments non fixés ont été rencontrés ; les points fixes n'apparaissent pas dans l'écriture.

Exemple : Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. En partant de 1, on lit $1 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 1$; en partant de 2, on lit $2 \mapsto 6 \mapsto 2$; il reste 4, qui est fixe. Donc

$$\sigma = (1\ 3\ 5)(2\ 6) = (2\ 6)(1\ 3\ 5).$$

La figure représente σ par des flèches : chaque cycle apparaît comme une boucle, et l'on voit que les trois orbites $\{1,3,5\}$, $\{2,6\}$ et $\{4\}$ partitionnent $[\![1\,,6]\!]$.



cycle (1 3 5) transposition (2 6) point fixe

On lit sur la figure la décomposition $\sigma = (1\ 3\ 5)(2\ 6)$: chaque orbite à au moins deux éléments fournit un cycle, et l'ordre dans lequel on écrit les deux cycles est indifférent, puisqu'ils agissent sur des éléments différents.

Proposition 3 : Toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ est un produit de transpositions. Plus précisément, pour $a_1, \ldots, a_p$ deux à deux distincts,

$$(a_1\ a_2\ \cdots\ a_p) = (a_1\ a_2)(a_2\ a_3)\cdots(a_{p-1}\ a_p).$$

∘ Démonstration : Notons c le produit de droite, et appliquons-le en commençant par le facteur de droite. Pour $k < p$, les transpositions $(a_j\ a_{j+1})$ avec $j > k$ fixent a_k, puis $(a_k\ a_{k+1})$ l'envoie sur a_{k+1}, que les facteurs restants, d'indices $j < k$, fixent : $c(a_k) = a_{k+1}$. L'élément a_p est envoyé successivement sur a_{p-1}, a_{p-2}, …, a_1, donc $c(a_p) = a_1$. Les autres éléments sont fixés par tous les facteurs. Ainsi c est le cycle annoncé. Par le théorème 1, toute permutation différente de l'identité est un produit de cycles, donc de transpositions ; enfin $\mathrm{id} = (1\ 2)(1\ 2)$ si $n \geqslant 2$, et id est le produit vide si $n = 1$. □

Remarque : L'écriture comme produit de transpositions n'est pas unique, et les facteurs ne commutent pas en général : $(1\ 2\ 3) = (1\ 2)(2\ 3) = (2\ 3)(1\ 3) = (1\ 2)(1\ 3)(2\ 3)(1\ 2)$. Le nombre de facteurs varie, mais on va voir que sa parité ne varie pas.

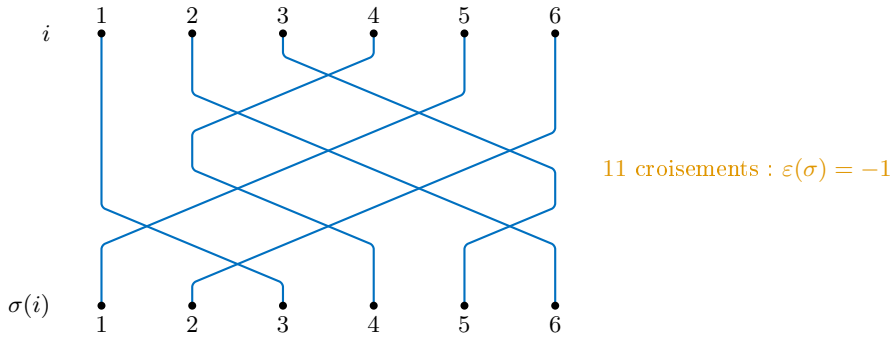
17.2.3 Signature

Définition : Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Une **inversion** de σ est un couple (i, j) tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. On note $\mathrm{Inv}(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ, et l'on appelle **signature** de σ le nombre

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\mathrm{Inv}(\sigma)} \in \{-1, 1\}.$$

La permutation est dite **paire** si $\varepsilon(\sigma) = 1$, **impaire** si $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Les inversions de σ sont exactement les « dérangements » de Cramer : dans la suite $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$, ce sont les couples formés d'un terme et d'un terme plus petit placé après lui. Si l'on relie chaque i, placé sur une première ligne, à $\sigma(i)$, placé sur une seconde, par des chemins qui ne se croisent pas plus d'une fois deux à deux, les chemins issus de $i < j$ se croisent si et seulement si $\sigma(i) > \sigma(j)$: le nombre de croisements est $\mathrm{Inv}(\sigma)$. Sur la figure, chaque croisement est un échange de deux voisins, et l'on reconnaît un tri de la suite $3, 6, 5, 4, 1, 2$ par échanges successifs de termes voisins mal rangés.



Pour la permutation $\sigma = (1\ 3\ 5)(2\ 6)$ de l'exemple précédent, la suite des images est $3, 6, 5, 4, 1, 2$: le terme 3 précède deux termes plus petits, 6 en précède quatre, 5 trois, 4 deux, et 1 aucun. On compte $2 + 4 + 3 + 2 = 11$ inversions, autant que de croisements sur la figure, et σ est impaire.

Proposition 4 : Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, avec $n \geqslant 2$,

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

∘ Démonstration : Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties à deux éléments de $[\![1, n]\!]$. Comme σ est injective, l'application $\{i, j\} \mapsto \{\sigma(i), \sigma(j)\}$ envoie $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, et elle est bijective, de réciproque associée à σ^{-1}. Le facteur $|\sigma(j) - \sigma(i)|$ ne dépend que de la paire $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$; par changement d'indice,

$$\prod_{i<j} |\sigma(j) - \sigma(i)| = \prod_{\{k,\ell\} \in \mathcal{P}} |\ell - k| = \prod_{i<j} (j - i).$$

Le produit de l'énoncé a donc pour valeur absolue 1. Son signe est $(-1)^{\mathrm{Inv}(\sigma)}$, puisque le facteur d'indice (i,j) est négatif exactement lorsque (i,j) est une inversion. □

Théorème 2 : La signature est un morphisme :
On suppose $n \geqslant 2$.

(i) Pour toutes permutations σ et σ', $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$: la signature est un morphisme du groupe $\mathfrak{S}_n$ dans le groupe $(\{-1,1\},\times)$.

(ii) Toute transposition τ vérifie $\varepsilon(\tau) = -1$.

(iii) La signature est l'unique morphisme de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1,1\}$ qui envoie toute transposition sur -1.

∘ Démonstration :

▷ *(i)* Par la proposition 4, on écrit chaque facteur de $\varepsilon(\sigma\sigma')$ comme un produit :

$$\varepsilon(\sigma\sigma') = \prod_{i<j} \frac{\sigma(\sigma'(j)) - \sigma(\sigma'(i))}{\sigma'(j) - \sigma'(i)} \times \prod_{i<j} \frac{\sigma'(j) - \sigma'(i)}{j-i}.$$

Le second produit vaut $\varepsilon(\sigma')$. Dans le premier, le facteur $\frac{\sigma(\ell)-\sigma(k)}{\ell-k}$ ne change pas quand on échange k et ℓ : il ne dépend que de la paire $\{k,\ell\} = \{\sigma'(i),\sigma'(j)\}$. Comme $\{i,j\} \mapsto \{\sigma'(i),\sigma'(j)\}$ est une bijection de $\mathcal{P}$, le premier produit vaut $\prod_{k<\ell} \frac{\sigma(\ell)-\sigma(k)}{\ell-k} = \varepsilon(\sigma)$.

▷ *(ii)* La transposition $(1\ 2)$ a pour seule inversion le couple $(1,2)$: sa signature vaut -1. Soit $\tau = (a\ b)$ une transposition quelconque, et ρ une permutation telle que $\rho(1) = a$ et $\rho(2) = b$. Alors $\rho(1\ 2)\rho^{-1}$ envoie a sur b, b sur a, et fixe tout $x \notin \{a,b\}$, car $\rho^{-1}(x) \notin \{1,2\}$: c'est τ. Par (i), dans le groupe abélien $\{-1,1\}$,

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\rho)\,\varepsilon\big((1\ 2)\big)\,\varepsilon(\rho)^{-1} = -1.$$

▷ *(iii)* Soit φ un morphisme qui envoie toute transposition sur -1. Si $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ est un produit de transpositions (proposition 3), alors $\varphi(\sigma) = (-1)^k = \varepsilon(\sigma)$. □

Proposition 5 : Soit $n \geqslant 2$.

(i) Si σ est le produit de k transpositions, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$: la parité de k ne dépend que de σ.

(ii) Un cycle de longueur p a pour signature $(-1)^{p-1}$.

(iii) Si σ a m orbites, points fixes compris, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-m}$.

∘ Démonstration : Le point (i) découle du théorème 2. Par la proposition 3, un p-cycle est un produit de $p-1$ transpositions, d'où (ii). Si les orbites ont p_1, …, p_m éléments, le théorème 1 et (ii) donnent $\varepsilon(\sigma) = \prod_k (-1)^{p_k-1}$, les orbites réduites à un point contribuant par un facteur 1 ; et $\sum_k (p_k - 1) = n - m$. □

♡ **Méthode : Pour calculer la signature d'une permutation :**

- ▶ On la décompose en cycles à supports disjoints, par la méthode précédente.
- ▶ On multiplie les signatures des cycles : un cycle de longueur p contribue par $(-1)^{p-1}$, de sorte qu'un cycle de longueur paire change le signe et qu'un cycle de longueur impaire ne le change pas.

Le comptage des inversions ne convient qu'aux petites permutations, ou sert de vérification.

Exemples :

- La permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ se décompose en $(1\ 3\ 8\ 4\ 5)(2\ 7\ 6)$. Ses deux cycles, de longueurs 5 et 3, sont pairs : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^4(-1)^2 = 1$. Le comptage donne 16 inversions, nombre pair, ce qui confirme le résultat.
- La permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, qui renverse l'ordre, a pour inversions tous les couples (i, j) avec $i < j$: elle en compte $\frac{n(n-1)}{2}$, et sa signature est $(-1)^{n(n-1)/2}$. Elle est paire pour $n = 4$ ou $n = 5$, impaire pour $n = 2$ ou $n = 3$.

Remarques :

- Le noyau de la signature est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ (chapitre 11), formé des permutations paires : c'est le **groupe alterné** $\mathfrak{A}_n$. Pour $n \geqslant 2$, l'application $\sigma \mapsto (1\ 2)\sigma$ échange permutations paires et impaires, et c'est une bijection de $\mathfrak{S}_n$: il y a donc autant de permutations paires que d'impaires, soit $\frac{n!}{2}$ de chaque sorte.
- L'erreur la plus répandue est de croire qu'un cycle de longueur p a la signature $(-1)^p$. Un cycle de longueur 3 est pair : il s'écrit avec deux transpositions.

17.3 Formes n-linéaires alternées et déterminant d'une famille

Dans cette section, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

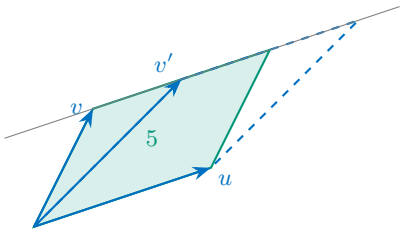
17.3.1 L'aire orientée comme modèle

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, l'aire du parallélogramme construit sur deux vecteurs u et v est le produit d'une base par la hauteur correspondante. On l'affecte d'un signe : positif si l'on passe de u à v en tournant dans le sens trigonométrique, négatif sinon. Cette *aire orientée* $\mathcal{A}(u, v)$ a trois propriétés, que la figure rend visibles.

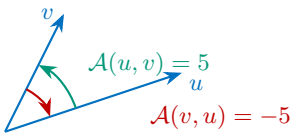
— Elle est linéaire par rapport à chaque vecteur : à base u fixée, la hauteur est une fonction linéaire de v, qui ne change pas si l'on ajoute à v un multiple de u.

— Elle est nulle lorsque $u = v$, le parallélogramme étant aplati.

— Elle vaut 1 pour le carré construit sur les vecteurs de la base canonique.



$v' = v + \frac{1}{2}u$: même base, même hauteur



échanger u et v change le signe

À gauche, les deux parallélogrammes construits sur (u, v) et sur (u, v') ont la même base u et leurs sommets opposés sur une même parallèle à u : ils ont la même aire, égale à 5. À droite, la flèche verte va de u à v dans le sens trigonométrique, et l'aire est positive ; parcourir les vecteurs dans l'ordre inverse change son signe.
Ces trois propriétés vont suffire : on va montrer qu'une seule fonction les possède, et la calculer. On les transpose à un espace de dimension n, avec n vecteurs au lieu de deux.

Définition : Une application $f : E^n \to \mathbb{K}$ est une **forme n-linéaire** si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables, les autres étant fixées : pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, tous $x_1, \ldots, x_n, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$f(x_1, \ldots, \lambda x_k + y, \ldots, x_n) = \lambda f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n).$$

Elle est **alternée** si $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dès que deux des vecteurs x_i sont égaux.

Remarques :

- Une forme n-linéaire n'est pas linéaire sur E^n : multiplier les n vecteurs par λ multiplie f par λ^n, et non par λ. L'erreur la plus répandue, au moment du calcul, est d'écrire $f(2x_1, \dots, 2x_n) = 2f(x_1, \dots, x_n)$.
- Pour $n = 1$, toute forme linéaire $f : E \to \mathbb{K}$ est 1-linéaire et alternée, la condition d'alternance étant vide.

Proposition 6 : Soit f une forme n-linéaire alternée sur E, et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

(i) *Antisymétrie.* Échanger deux des vecteurs change $f(x_1, \dots, x_n)$ en son opposé.

(ii) *Effet d'une permutation.* Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\, f(x_1, \dots, x_n)$.

(iii) Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

(iv) On ne change pas $f(x_1, \dots, x_n)$ en ajoutant à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.

∘ Démonstration :

▷ *(i)* Soit $i < j$. On écrit que f s'annule lorsque les places i et j sont toutes deux occupées par $x_i + x_j$, et l'on développe par linéarité en chacune de ces deux places, sans écrire les autres variables :

$$0 = f(x_i + x_j, x_i + x_j) = f(x_i, x_i) + f(x_i, x_j) + f(x_j, x_i) + f(x_j, x_j) = f(x_i, x_j) + f(x_j, x_i).$$

▷ *(ii)* On montre la formule pour toute famille, par récurrence sur le nombre de transpositions dont σ est le produit (proposition 3). Elle est vraie pour $\sigma = \mathrm{id}$. Si elle est vraie pour σ_1 et si $\sigma = \sigma_1\tau$, avec τ une transposition, on pose $y_k = x_{\sigma_1(k)}$. Alors $x_{\sigma(k)} = y_{\tau(k)}$, et la famille $(y_{\tau(1)}, \dots, y_{\tau(n)})$ est la famille $(y_1, \dots, y_n)$ dans laquelle on a échangé deux vecteurs. Par (i), puis par l'hypothèse de récurrence et le théorème 2,

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = -f(y_1, \dots, y_n) = -\varepsilon(\sigma_1) f(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n).$$

▷ *(iii)* Si la famille est liée, l'un des vecteurs, disons x_i, est combinaison linéaire des autres :

$$x_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j.$$

Par linéarité en la i-ième place, $f(x_1, \dots, x_n)$ est la somme des $\lambda_j f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$, où x_j occupe la i-ième place ; chacun de ces termes contient deux fois x_j, donc est nul.

▷ *(iv)* Par linéarité, ajouter à x_i une combinaison des autres vecteurs ajoute à $f(x_1, \dots, x_n)$ la valeur de f en une famille liée, nulle par (iii). □

17.3.2 Déterminant dans une base

Théorème 3 : Existence et unicité du déterminant :
Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

(i) Il existe une unique forme n-linéaire alternée f sur E telle que $f(e_1, \dots, e_n) = 1$. On la note $\det_e$ et on l'appelle **déterminant dans la base** e.

(ii) Si $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, alors

$$\det_e(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j}.$$

(iii) Toute forme n-linéaire alternée f sur E vérifie $f = f(e_1, \dots, e_n) \det_e$.

∘ Démonstration : On note $D(x_1, \dots, x_n)$ la somme de l'énoncé.

▷ *Analyse.* Soit f une forme n-linéaire alternée. En développant par linéarité en chacune des n places, on obtient une somme indexée par les applications $\varphi : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$, qui choisissent dans chaque x_j le terme $a_{\varphi(j)j} e_{\varphi(j)}$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\varphi} \Big(\prod_{j=1}^{n} a_{\varphi(j)j} \Big) f(e_{\varphi(1)}, \dots, e_{\varphi(n)}).$$

Si φ n'est pas injective, la famille $(e_{\varphi(1)}, \dots, e_{\varphi(n)})$ contient deux vecteurs égaux, et le terme est nul. Les applications injectives de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même sont les permutations, et la proposition 6 (ii) donne $f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(e_1, \dots, e_n)$. Ainsi $f = f(e_1, \dots, e_n)\, D$. Cela démontre (iii) dès que l'on sait que $D = \det_e$, ainsi que l'unicité dans (i).

▷ *Synthèse.* Il reste à voir que D est n-linéaire, alternée, et vaut 1 en e. Chaque terme $\prod_j a_{\sigma(j)j}$ contient exactement un facteur issu des coordonnées de x_k, à savoir $a_{\sigma(k)k}$, qui dépend linéairement de x_k : D est n-linéaire. Pour $x = e$, on a $a_{ij} = \delta_{ij}$, et seul le terme de $\sigma = \mathrm{id}$ est non nul : $D(e) = 1$.

Supposons $x_k = x_\ell$ avec $k < \ell$, et notons $\tau = (k\ \ell)$. Les colonnes de coordonnées k et ℓ sont égales, donc $a_{i\tau(j)} = a_{ij}$ pour tous i, j. L'application $\sigma \mapsto \sigma\tau$ est une bijection du groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ sur l'ensemble des permutations impaires, et l'on regroupe les termes deux par deux. Par le changement d'indice $j \mapsto \tau(j)$,

$$\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma\tau(j)j} = \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)\tau(j)} = \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j},$$

tandis que $\varepsilon(\sigma\tau) = -\varepsilon(\sigma)$. Les termes associés à σ et à $\sigma\tau$ sont opposés, et $D(x_1, \dots, x_n) = 0$. □

Remarques :

- Le terme associé à σ est le produit de n coefficients pris dans des lignes et des colonnes toutes différentes. C'est la règle de Cramer : un terme par arrangement, et un signe donné par la parité du nombre d'inversions, c'est-à-dire de dérangements.
- Le résultat (iii) dit que les formes n-linéaires alternées sur E forment une droite vectorielle, dirigée par $\det_e$: une seule fonction, à un facteur près, a les propriétés de l'aire orientée.

Exemples :

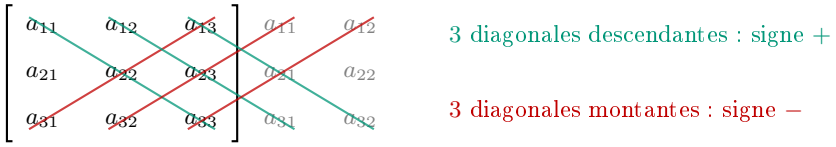
- Pour $n = 2$, les permutations sont id et $(1\ 2)$: si $x_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$ et $x_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$,

$$\det_e(x_1, x_2) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

  On retrouve le nombre $ad - bc$ de la proposition 9 du chapitre 16. Pour $u = (3, 1)$ et $v = (1, 2)$, on trouve $3 \times 2 - 1 \times 1 = 5$, l'aire de la figure précédente.

- Pour $n = 3$, les six permutations de $\mathfrak{S}_3$, avec leurs signatures, donnent la **règle de Sarrus** :

$$\det_e(x_1, x_2, x_3) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$



On recopie les deux premières colonnes à droite du tableau : les trois diagonales descendantes, en vert, donnent les termes de signe +, et les trois diagonales montantes, en rouge, ceux de signe −. Chaque diagonale rencontre une fois chaque ligne et chaque colonne du tableau initial.

Remarque : La règle de Sarrus ne vaut que pour $n = 3$. Pour $n = 4$, le déterminant a 24 termes, alors qu'un schéma analogue n'en fournirait que 8 : l'erreur est fréquente, et la section 17.5 donnera les bonnes méthodes.

17.3.3 Changement de base et caractérisation des bases

Proposition 7 : Soit e et e' deux bases de E. Alors

$$\det_{e'} = \det_{e'}(e)\,\det_{e} \qquad \text{et} \qquad \det_{e'}(e)\,\det_{e}(e') = 1.$$

∘ Démonstration : La forme $\det_{e'}$ est n-linéaire alternée : par le théorème 3 (iii) appliqué dans la base e, elle vaut $\det_{e'}(e)\det_e$. En évaluant cette égalité en e', on obtient $1 = \det_{e'}(e)\det_e(e')$. □

Théorème 4 : Caractérisation des bases :
Soit e une base de E. Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de n vecteurs de E est une base de E si et seulement si

$$\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$

∘ Démonstration : Si la famille n'est pas une base, elle est liée, puisqu'une famille libre de n vecteurs en dimension n est une base (chapitre 15), et la proposition 6 (iii) donne $\det_e(x_1, \dots, x_n) = 0$. Si c'est une base x, la proposition 7 donne $\det_e(x)\det_x(e) = 1$, donc $\det_e(x) \neq 0$. □

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $(1, t)$ et $(t, 4)$ forment une base si et seulement si $1\times4 - t\times t \neq 0$, c'est-à-dire $t \notin \{-2, 2\}$. Pour $t = 2$, on vérifie que $(2, 4) = 2(1, 2)$: la famille est liée, ce que le déterminant a détecté sans qu'on cherche la relation.

Remarques :

- Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, $|\det(u, v)|$ est l'aire du parallélogramme construit sur u et v ; dans $\mathbb{R}^3$, $|\det(u, v, w)|$ est le volume du parallélépipède construit sur u, v, w, et le signe indique l'orientation. Cette interprétation, que l'on admet, motive la définition.
- Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, deux bases e et e' ont la **même orientation** si $\det_e(e') > 0$. La proposition 7, qui donne $\det_e(e'') = \det_e(e')\det_{e'}(e'')$ pour trois bases, montre que c'est une relation d'équivalence à deux classes ; **orienter** E, c'est choisir l'une d'elles, dont les bases sont dites *directes*. Échanger deux vecteurs d'une base, ou changer l'un d'eux en son opposé, change l'orientation.

17.4 Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

17.4.1 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 8 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le scalaire $\det_e\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$ ne dépend pas de la base e de E ; on l'appelle **déterminant** de u et on le note $\det u$. Pour toute base e et tous $x_1, \dots, x_n \in E$,

$$\det_e\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big) = \det(u)\,\det_e(x_1, \dots, x_n).$$

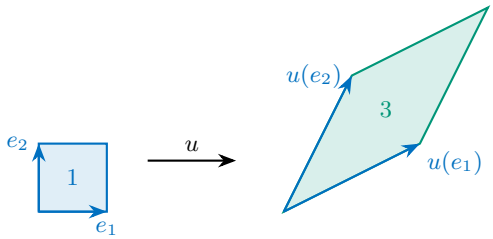
∘ Démonstration : Fixons une base e. L'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_e\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big)$ est n-linéaire, par linéarité de u, et alternée, puisque $x_i = x_j$ entraîne $u(x_i) = u(x_j)$. Par le théorème 3 (iii), elle est égale à $c_e \det_e$, avec $c_e = \det_e\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$: c'est la formule annoncée, avec c_e à la place de $\det u$.

Soit e' une autre base. Par la proposition 7, appliquée deux fois,

$$c_{e'} = \det_{e'}\big(u(e')\big) = \det_{e'}(e)\,\det_e\big(u(e')\big) = \det_{e'}(e)\,c_e\,\det_e(e') = c_e.$$

□

Dans le plan, la formule dit que u multiplie toutes les aires orientées par le même facteur $\det u$. La figure le montre pour l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ défini par $u(e_1) = (2, 1)$ et $u(e_2) = (1, 2)$, de déterminant $2 \times 2 - 1 \times 1 = 3$.



$$\det_e\big(u(e_1),u(e_2)\big) = 3\times\det_e(e_1,e_2)$$

Le carré unité, d'aire 1, est envoyé sur un parallélogramme d'aire 3 ; par linéarité, toute figure du plan voit son aire multipliée par 3, et son orientation conservée, puisque $\det u > 0$.

Théorème 5 : Propriétés du déterminant d'un endomorphisme :
Soit u, $v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) $\det(\mathrm{id}_E) = 1$ et $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$.

(ii) $\det(v\circ u) = \det(v)\det(u)$.

(iii) u est un automorphisme de E si et seulement si $\det u \neq 0$, et alors $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det u}$.

En particulier, det est un morphisme du groupe $\big(\mathrm{GL}(E),\circ\big)$ dans le groupe $(\mathbb{K}^*,\times)$.

∘ Démonstration :

▷ *(i)* On a $\det(\mathrm{id}_E) = \det_e(e) = 1$. Par n-linéarité, $\det_e\big(\lambda u(e_1),\dots,\lambda u(e_n)\big) = \lambda^n \det_e\big(u(e_1),\dots,u(e_n)\big)$.

▷ *(ii)* La proposition 8, appliquée à v et aux vecteurs $u(e_1)$, …, $u(e_n)$, donne

$$\det(v\circ u) = \det_e\big(v(u(e_1)),\dots,v(u(e_n))\big) = \det(v)\det_e\big(u(e_1),\dots,u(e_n)\big) = \det(v)\det(u).$$

▷ *(iii)* L'endomorphisme u est un automorphisme si et seulement si l'image $\big(u(e_1),\dots,u(e_n)\big)$ de la base e est une base (chapitre 15), c'est-à-dire, par le théorème 4, si et seulement si $\det u \neq 0$. Dans ce cas, (ii) appliqué à $u^{-1}\circ u = \mathrm{id}_E$ donne $\det(u^{-1})\det(u) = 1$. □

Exemples :

- Soit s une symétrie de E, par rapport à F parallèlement à G, avec $\dim F = p$. Dans une base adaptée à $E = F\oplus G$, l'image de la base est $(e_1,\dots,e_p,-e_{p+1},\dots,-e_n)$, et la n-linéarité donne $\det s = (-1)^{n-p}$. Un projecteur $p \neq \mathrm{id}_E$ n'est pas bijectif : son déterminant est nul.
- La rotation d'angle θ de $\mathbb{R}^2$, de matrice $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ dans la base canonique, a pour déterminant $\cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$: elle conserve les aires et l'orientation.

Remarque : Le déterminant n'est pas additif : en général $\det(u+v) \neq \det u + \det v$. Par exemple, $\det(\mathrm{id}_E+\mathrm{id}_E) = \det(2\,\mathrm{id}_E) = 2^n$, et non 2, dès que $n \geqslant 2$.

17.4.2 Déterminant d'une matrice carrée

Définition : Le **déterminant** d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le déterminant de la famille de ses colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$:

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}, \qquad \text{noté aussi} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Proposition 9 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) L'application qui à n colonnes C_1, …, C_n associe le déterminant de la matrice de colonnes C_1, …, C_n est n-linéaire alternée.

(ii) Si $u \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice A dans une base $\mathcal{B}$ de E, alors $\det u = \det A$. En particulier, $\det A$ est le déterminant de l'endomorphisme $X \mapsto AX$ de $\mathbb{K}^n$.

∘ Démonstration : Le point (i) est le théorème 3 dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour (ii), les coordonnées de $u(e_j)$ dans $\mathcal{B}$ forment la j-ième colonne de A : la formule du théorème 3 (ii) appliquée à $\det_{\mathcal{B}}\big(u(e_1),\dots,u(e_n)\big)$ est exactement la définition de $\det A$. □

Théorème 6 : Propriétés du déterminant d'une matrice :
Soit A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $\det(I_n) = 1$ et $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

(ii) A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$, et alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

(iii) Deux matrices semblables ont le même déterminant.

(iv) $\det(A^T) = \det A$; par conséquent, le déterminant est aussi n-linéaire alterné par rapport aux lignes.

∘ Démonstration :

▷ *(i) et (ii)* Par le théorème 2 du chapitre 16, $u_{AB} = u_A \circ u_B$ et $u_{\lambda A} = \lambda u_A$, et A est inversible si et seulement si u_A est un automorphisme. La proposition 9 (ii) et le théorème 5 concluent.

▷ *(iii)* Si $A' = P^{-1}AP$, alors $\det A' = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det A$, puisque les scalaires commutent et que $\det(P^{-1})\det(P) = 1$. On peut aussi dire que A et A' représentent le même endomorphisme dans deux bases, et utiliser la proposition 9 (ii).

▷ *(iv)* Le coefficient d'indice (i,j) de A^T est a_{ji}, donc

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma(j)} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(i)i},$$

en posant $i = \sigma(j)$ dans le produit. L'application $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$, et $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$ par le théorème 2 ; le changement d'indice $\sigma' = \sigma^{-1}$ fait apparaître $\det A$. Les lignes de A étant les colonnes de A^T, la proposition 9 (i) appliquée à A^T donne la dernière affirmation. □

Exemples :

- Le chapitre 16 a inversé les matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La règle de Sarrus donne $\det C = 1+1+0-0-0-0 = 2$ et $\det A = 1+2+0-1-1-0 = 1$, tous deux non nuls, ce qui confirme leur inversibilité ; on retrouve les valeurs annoncées au chapitre 16, dont la section 17.6 expliquera le rôle.
- Une matrice antisymétrique $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ n'est jamais inversible : on a $\det A = \det(A^T)$ et $\det(-A) = (-1)^3 \det A$, donc $\det A = -\det A$, et $\det A = 0$.

Remarques :

- Le déterminant est, avec la trace (proposition 14 du chapitre 16), un invariant de similitude. Il ne suffit pas, même avec la trace, à reconnaître deux matrices semblables : I_2 et $I_2 + E_{12}$ ont même trace et même déterminant, sans être semblables.
- L'erreur la plus répandue est d'écrire $\det(\lambda A) = \lambda \det A$: chaque colonne est multipliée par λ, d'où le facteur λ^n.

17.5 Calcul des déterminants

17.5.1 Opérations élémentaires et matrices triangulaires

Proposition 10 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) L'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, avec $j \neq i$, ne change pas $\det A$.

(ii) L'opération $C_i \leftarrow \alpha C_i$ multiplie $\det A$ par α.

(iii) L'échange de deux colonnes change $\det A$ en son opposé.

Il en est de même pour les opérations sur les lignes. Avec les notations de la proposition 16 du chapitre 16,

$$\det T_{ij}(\lambda) = 1, \qquad \det D_i(\alpha) = \alpha, \qquad \det P_{ij} = -1.$$

∘ Démonstration : Les trois points découlent de la proposition 6 (iv), de la linéarité par rapport à la colonne C_i, et de la proposition 6 (i), appliquées à la forme n-linéaire alternée de la proposition 9 (i). Pour les lignes, on utilise le théorème 6 (iv). Les déterminants des matrices élémentaires s'obtiennent en appliquant ces opérations à I_n, de déterminant 1. □

Proposition 11 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $p, q \geqslant 1$ tels que $p + q = n$.

(i) Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux :

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(ii) *Matrices triangulaires par blocs.* Si $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, avec $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors

$$\det A = \det(B)\det(D).$$

∘ Démonstration :

▷ *(i)* Supposons A triangulaire supérieure : $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$. Dans la formule du déterminant, le terme associé à σ n'est non nul que si $\sigma(j) \leqslant j$ pour tout j. Alors $\sigma(1) = 1$, puis $\sigma(2) \leqslant 2$ et $\sigma(2) \neq 1$ donnent $\sigma(2) = 2$, et ainsi de suite : $\sigma = \mathrm{id}$. Le seul terme restant est $a_{11}\cdots a_{nn}$. Le cas triangulaire inférieur s'en déduit par transposition.

▷ *(ii)* Pour $j \leqslant p$, les coefficients a_{ij} avec $i > p$ sont nuls. Le terme associé à σ n'est donc non nul que si σ envoie $[\![1\,,p]\!]$ dans lui-même, donc sur lui-même par injectivité ; elle envoie alors aussi $[\![p+1\,,n]\!]$ sur lui-même. Une telle permutation est déterminée par sa restriction β à $[\![1\,,p]\!]$ et sa restriction δ à $[\![p+1\,,n]\!]$, et toute paire de permutations (β, δ) de ces deux ensembles s'obtient ainsi. Aucune inversion de σ ne mêle les deux blocs, puisque $\sigma(i) \leqslant p < \sigma(j)$ si $i \leqslant p < j$: le nombre d'inversions de σ est la somme de ceux de β et de δ, et $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\beta)\varepsilon(\delta)$. La somme se factorise :

$$\det A = \Big(\sum_{\beta} \varepsilon(\beta) \prod_{j=1}^{p} a_{\beta(j)j}\Big)\Big(\sum_{\delta} \varepsilon(\delta) \prod_{j=p+1}^{n} a_{\delta(j)j}\Big) = \det(B)\det(D).$$

□

♡ **Méthode : Pour calculer un déterminant par la méthode du pivot :**

- On effectue des opérations $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, qui ne changent pas le déterminant, pour faire apparaître des zéros sous les pivots, comme au chapitre 16.
- On tient le compte des échanges de lignes, qui changent le signe, et des multiplications d'une ligne par un scalaire, qui multiplient le déterminant.
- On conclut par le produit des coefficients diagonaux de la matrice triangulaire obtenue.

Exemple : On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, puis $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$, ne changent pas le déterminant :

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -17 \end{vmatrix} = -17.$$

La formule générale aurait demandé de sommer 24 produits de quatre facteurs ; trois étapes de pivot ont suffi, et le résultat non nul montre que M est inversible.

17.5.2 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant 2$, et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Le **mineur** Δ_{ij} est le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant de A la i-ième ligne et la j-ième colonne. Le **cofacteur** d'indice (i,j) est

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}$$

Δ_{23} : on retire la ligne 2 et la colonne 3

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

signe $(-1)^{i+j}$ du cofacteur

À gauche, le mineur Δ_{23} est le déterminant des neuf coefficients restants, en violet, pris dans le même ordre. À droite, le damier des signes, qui commence par + en haut à gauche : le cofacteur C_{23} vaut $-\Delta_{23}$.

Théorème 7 : Développement d'un déterminant :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant 2$.

(i) *Développement par rapport à la j-ième colonne :* pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}.$$

(ii) *Développement par rapport à la i-ième ligne :* pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}.$$

∘ Démonstration :

▷ *Linéarité.* La j-ième colonne de A s'écrit $\sum_i a_{ij}E_i$, où $(E_1,\dots,E_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Par linéarité par rapport à cette colonne, $\det A = \sum_i a_{ij} \det A_{(i,j)}$, où $A_{(i,j)}$ est la matrice A dans laquelle la j-ième colonne est remplacée par E_i.

▷ *Calcul de* $\det A_{(i,j)}$. On ramène la j-ième colonne en première position en l'échangeant successivement avec les colonnes $j-1$, …, 1 : cela fait $j-1$ échanges, et l'ordre des autres colonnes est conservé. On ramène de même la i-ième ligne en première position par $i-1$ échanges. La matrice obtenue est triangulaire par blocs :

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & A'_{ij} \end{pmatrix},$$

où A'_{ij} est la matrice obtenue en supprimant de A la ligne i et la colonne j. Par la proposition 10 (iii) et la proposition 11 (ii),

$$\det A_{(i,j)} = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \times 1 \times \Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij} = C_{ij}.$$

Cela démontre (i). Le point (ii) s'en déduit en appliquant (i) à A^T, dont les mineurs sont ceux de A transposés, avec le théorème 6 (iv). □

♡ **Méthode : Pour développer un déterminant :**

- ▶ On choisit la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros, après en avoir éventuellement créé par des opérations élémentaires.
- ▶ On écrit la somme des coefficients de cette ligne ou colonne multipliés par leurs cofacteurs, en lisant les signes sur le damier.
- ▶ On calcule les mineurs restants, de taille $n-1$, par la même méthode, ou par la règle de Sarrus pour $n-1=3$.

Exemples :

- Reprenons M après la première série d'opérations. Le développement par rapport à la première colonne, qui ne contient qu'un coefficient non nul, ramène à un déterminant d'ordre 3, calculé par la règle de Sarrus :

$$\det M = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 0 - 8 - 0 - 10 - 2 = -17.$$

  On retrouve le résultat de la méthode du pivot.

- Soit D_n le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux valent 2, ceux qui sont juste au-dessus ou juste au-dessous de la diagonale valent -1, et les autres 0. Le développement par rapport à la première ligne donne $2D_{n-1}$ et un second terme, qu'un nouveau développement par rapport à la première colonne ramène à $-D_{n-2}$. Ainsi, pour $n \geqslant 3$,

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}, \qquad D_1 = 2, \quad D_2 = 3.$$

  La suite (D_n) est arithmétique, et $D_n = n+1$; un calcul direct le confirme jusqu'à $n = 6$. Le développement transforme un déterminant de taille variable en une suite récurrente du chapitre 7.

17.5.3 Déterminant de Vandermonde

Proposition 12 : Pour $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$, avec $n \geqslant 2$,

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

En particulier, $V(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

∘ Démonstration : On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 2$, $V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$. Soit $n \geqslant 3$, et supposons la formule vraie au rang $n-1$. Si deux des $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont égaux, le déterminant a deux lignes égales et le produit contient un facteur nul : la formule est vraie. Sinon, on remplace x_n par une indéterminée X et l'on pose $P(X) = V(x_1, \ldots, x_{n-1}, X)$. Le développement par rapport à la dernière ligne montre que P est un polynôme de degré au plus $n-1$, dont le coefficient de X^{n-1} est le cofacteur correspondant, $V(x_1, \ldots, x_{n-1})$, non nul par hypothèse de récurrence. Pour $i \leqslant n-1$, $P(x_i) = 0$, car le déterminant a alors deux lignes égales. Le polynôme P, de degré $n-1$, a donc les $n-1$ racines distinctes $x_1, \ldots, x_{n-1}$, et le chapitre 13 donne

$$P(X) = V(x_1, \ldots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (X - x_i).$$

En évaluant en x_n et en appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient la formule au rang n. □

Remarque : La matrice de Vandermonde est celle de l'application $P \mapsto \big(P(x_1), \dots, P(x_n)\big)$ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$, dans les bases canoniques. Son inversibilité, pour des x_i distincts, exprime l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange (chapitre 13) : le déterminant le prouve en un calcul.

17.6 Comatrice et formules de Cramer

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant 2$. La **comatrice** de A est la matrice $\mathrm{Com}(A) = (C_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de ses cofacteurs.

Théorème 8 : Comatrice et inverse :
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant 2$,

$$A\,\mathrm{Com}(A)^T = \mathrm{Com}(A)^T\,A = \det(A)\,I_n.$$

En particulier, si A est inversible, $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,\mathrm{Com}(A)^T$.

∘ Démonstration : Le coefficient d'indice (i,k) de $A\,\mathrm{Com}(A)^T$ est $\sum_{j=1}^n a_{ij}C_{kj}$. Pour $k = i$, c'est le développement de $\det A$ par rapport à la i-ième ligne. Pour $k \neq i$, soit A' la matrice obtenue en remplaçant la k-ième ligne de A par la i-ième. Les cofacteurs C_{kj} ne font pas intervenir la k-ième ligne : ce sont aussi ceux de A', et la somme est le développement de $\det A'$ par rapport à sa k-ième ligne. Or A' a deux lignes égales, donc $\det A' = 0$. Le produit $\mathrm{Com}(A)^T\,A$ se traite de même avec les colonnes. Si A est inversible, on divise par $\det A \neq 0$. □

Exemples :

- Pour $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on trouve $\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$, et l'on retrouve la formule de la proposition 9 du chapitre 16 :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

- Pour la matrice C du chapitre 16, de déterminant 2, le calcul des neuf cofacteurs donne

$$\mathrm{Com}(C)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est l'inverse obtenu au chapitre 16 : le facteur $\frac{1}{2}$ est l'inverse du déterminant.

Proposition 13 : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à coefficients entiers est inversible et d'inverse à coefficients entiers si et seulement si $\det A \in \{-1, 1\}$.

∘ Démonstration : Le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est un entier, par la formule du théorème 3. Si A et A^{-1} sont à coefficients entiers, $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ est un produit de deux entiers, qui valent donc tous deux 1 ou tous deux -1. Réciproquement, si $\det A = \pm 1$, les cofacteurs sont des entiers, et le théorème 8 donne $A^{-1} = \pm\mathrm{Com}(A)^T$, à coefficients entiers. □

C'est l'explication promise au chapitre 16 : la matrice A de la section 16.5, de déterminant 1, a un inverse à coefficients entiers, tandis que C, de déterminant 2, n'en a pas.

Proposition 14 : *Formules de Cramer.* Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. L'unique solution $X = (x_1, \dots, x_n)$ du système $AX = B$ est donnée par

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la i-ième colonne de A par B.

∘ Démonstration : Si C_1, …, C_n sont les colonnes de A, l'égalité $AX = B$ s'écrit $B = \sum_j x_j C_j$ (proposition 2 du chapitre 16). Par linéarité par rapport à la i-ième colonne, $\det A_i$ est la somme des x_j multipliés par le déterminant de la matrice où C_j occupe la i-ième place. Pour $j \neq i$, cette matrice a deux colonnes égales, et il reste $\det A_i = x_i \det A$. □

Exemple : Le système $x + 2y - z = 2$, $2x + y + z = 7$, $-x + y + 2z = 3$, résolu au chapitre 3, a une matrice de déterminant -12. Les déterminants obtenus en remplaçant successivement chaque colonne par le second membre valent -24, -12 et -24, d'où

$$x = \frac{-24}{-12} = 2, \qquad y = \frac{-12}{-12} = 1, \qquad z = \frac{-24}{-12} = 2.$$

On retrouve la solution $(2, 1, 2)$: c'est, deux siècles et demi plus tard, la règle énoncée par Cramer en 1750.

Remarque : Les formules de Cramer et la comatrice ont un intérêt théorique : elles montrent que les coefficients de A^{-1} et la solution d'un système de Cramer sont des quotients de polynômes en les coefficients de A et de B. Pour le calcul, elles sont très coûteuses dès que $n \geqslant 4$: la méthode du pivot, qui demande de l'ordre de n^3 opérations, leur est toujours préférée.

17.7 Bilan

Le chapitre a construit un nombre qui décide si n vecteurs forment une base, si un endomorphisme est bijectif, si une matrice est inversible. Sa définition géométrique, par l'aire orientée, et sa formule, héritée de Cramer, se rejoignent grâce à la signature.

Notion	Énoncé	Référence
signature	morphisme, $\varepsilon(\tau) = -1$, $\varepsilon(p\text{-cycle}) = (-1)^{p-1}$	théorème 2, proposition 5
forme n-linéaire alternée	multiple de $\det_e$	théorème 3
base	$\det_e(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$	théorème 4
endomorphisme	$\det(v \circ u) = \det v \det u$	théorème 5
matrice inversible	$\det A \neq 0$, $\det(AB) = \det A \det B$	théorème 6
calcul	pivot, triangulaire, blocs	propositions 10 et 11
développement	$\det A = \sum_i a_{ij} C_{ij}$	théorème 7
inverse	$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{Com}(A)^T$	théorème 8

Trois idées sont à retenir. Le déterminant est caractérisé par des propriétés, la multilinéarité et l'alternance, et non par sa formule, qui en est une conséquence. Il transforme la composition en produit de nombres, ce qui en fait un test d'inversibilité. Enfin, il se calcule par la méthode du pivot, et non par la formule à $n!$ termes. Le chapitre 19 retrouvera les déterminants en géométrie euclidienne, avec les isométries de déterminant 1, les rotations, et le chapitre 21 retrouvera le groupe symétrique en dénombrement, où le nombre $n!$ compte les façons d'ordonner n objets.