Chapitre 18

Intégration sur un segment

18.1 Introduction historique

L'incertitude qui règne encore sur quelques points fondamentaux de la théorie des intégrales définies nous oblige à dire d'abord quelques mots de la notion d'intégrale définie et de l'étendue de sa validité. Donc, d'abord : que faut-il entendre par $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *?*

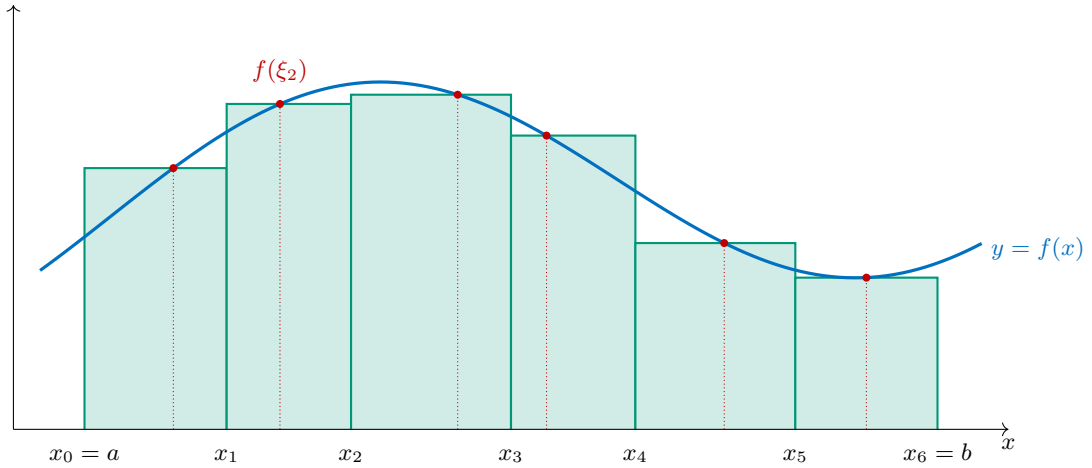
Bernhard Riemann - *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique*, mémoire d'habilitation, 1854

18.1.1 Deux mille ans d'aires sans définition

Au III^{e} siècle avant notre ère, dans *La Quadrature de la parabole*, **Archimède** montre qu'un segment de parabole a pour aire les quatre tiers du triangle inscrit de même base : il l'épuise par des triangles dont les aires forment une progression géométrique de raison $\frac{1}{4}$. En 1675, dans ses manuscrits, **Leibniz** écrit $\int$, un s allongé, pour désigner une somme d'une infinité de termes infiniment petits ; le symbole paraît en 1686 dans les *Acta Eruditorum*. Pendant un siècle et demi, pourtant, intégrer signifie trouver une primitive : c'est le point de vue du chapitre 6, qui a dû admettre l'existence des primitives.

18.1.2 L'aire devient une limite de sommes

En 1823, dans son *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*, **Cauchy** renverse la perspective : il définit l'intégrale d'une fonction continue comme une limite de sommes de rectangles, et en déduit l'existence des primitives. Sa démonstration utilise sans la nommer la continuité uniforme, que **Heine** dégagera en 1872 (chapitre 8). **Riemann**, en 1854, étend la définition par les sommes à des fonctions discontinues, et **Darboux**, en 1875, encadre l'aire par des sommes inférieures et supérieures. Le chapitre suit cet ordre logique, qui renverse celui du chapitre 6 : il encadre une fonction par des fonctions en escalier (section 18.2), définit l'intégrale comme la valeur commune de deux bornes (section 18.3), et retrouve ensuite les primitives (section 18.4). La figure montre une somme de Riemann : chaque rectangle a pour hauteur la valeur de f en un point choisi librement dans sa base.



18.2 Fonctions en escalier et fonctions continues par morceaux

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $a < b$ sont deux réels. Les fonctions considérées sont définies sur le segment $[a\,,b]$; l'ensemble $\mathcal{F}([a\,,b],\mathbb{K})$ des fonctions de $[a\,,b]$ dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (chapitre 14) et un anneau commutatif (chapitre 11) pour les opérations usuelles.

18.2.1 Subdivisions

Définition :

— Une **subdivision** du segment $[a\,,b]$ est une suite finie $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, avec $n \geqslant 1$, telle que
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$
Son **pas** est le réel $\delta(\sigma) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} (x_i - x_{i-1})$, longueur du plus grand des intervalles $[x_{i-1}\,, x_i]$.

— La subdivision est **régulière** si ces intervalles ont tous la même longueur : $x_i = a + i\,\dfrac{b-a}{n}$, et le pas vaut alors $\dfrac{b-a}{n}$.

— Une subdivision σ' est **plus fine** que σ si tout point de σ est un point de σ'.

On identifie une subdivision à l'ensemble fini de ses points, qui la détermine puisqu'on les range dans l'ordre croissant. Pour deux subdivisions σ et σ', la subdivision $\sigma \cup \sigma'$, formée de tous leurs points, est plus fine que chacune d'elles : c'est l'outil qui permet, dans toute la suite, de comparer deux fonctions découpées différemment.

18.2.2 Fonctions en escalier

Définition : Une fonction $\varphi : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ est **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a\,,b]$ telle que φ soit constante sur chaque intervalle ouvert $]x_{i-1}\,, x_i[$. Une telle subdivision est dite **adaptée** à φ. On note $\mathcal{E}([a\,,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a\,,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Aucune condition ne porte sur les valeurs $\varphi(x_i)$ aux points de la subdivision, qui sont arbitraires. Toute subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée est encore adaptée, puisqu'un intervalle ouvert de la nouvelle subdivision est contenu dans un intervalle ouvert de l'ancienne.

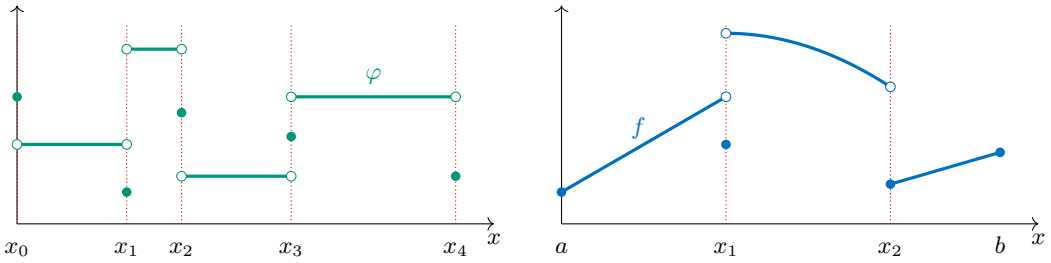
Proposition 1 : L'ensemble $\mathcal{E}([a\,,b],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{F}([a\,,b],\mathbb{K})$. Si φ est en escalier, $|\varphi|$ l'est aussi, et φ est bornée.

∘ Démonstration : La fonction constante égale à 1 est en escalier. Soit φ et χ en escalier, de subdivisions adaptées σ et σ', et $\lambda \in \mathbb{K}$. La subdivision $\sigma \cup \sigma'$ est adaptée aux deux fonctions : sur chacun de ses intervalles ouverts, φ et χ sont constantes, donc $\lambda\varphi + \chi$, $\varphi\chi$ et $|\varphi|$ aussi. Enfin φ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, une par intervalle ouvert et une par point de la subdivision : elle est bornée. □

18.2.3 Fonctions continues par morceaux

Définition : Une fonction $f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a\,,b]$ telle que, pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$, la restriction de f à $]x_{i-1}\,, x_i[$ soit continue et admette des limites finies en x_{i-1} à droite et en x_i à gauche. La subdivision est encore dite **adaptée** à f, et l'on note $\mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{K})$ l'ensemble de ces fonctions.

De manière équivalente, la restriction de f à chaque $]x_{i-1}\,, x_i[$ se prolonge en une fonction f_i *continue sur le segment* $[x_{i-1}\,, x_i]$ (chapitre 8, prolongement par continuité) : on l'appellera le **morceau** d'indice i. Une fonction continue sur $[a\,,b]$ est continue par morceaux, avec la subdivision (a, b) ; une fonction en escalier aussi, ses morceaux étant constants.



À gauche, une fonction en escalier φ : elle est constante sur chaque intervalle ouvert, et ses valeurs aux points de la subdivision, marquées par des points pleins, sont quelconques. À droite, une fonction f continue par morceaux : chaque morceau, prolongé aux extrémités par ses limites (points creux), est une fonction continue sur un segment ; en x_1, la valeur $f(x_1)$ n'est égale à aucune des deux limites.

Proposition 2 : L'ensemble $\mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{F}([a\,,b],\mathbb{K})$, qui contient $\mathcal{E}([a\,,b],\mathbb{K})$ et l'ensemble $\mathcal{C}([a\,,b],\mathbb{K})$ des fonctions continues. Si f est continue par morceaux, $|f|$ l'est aussi, et f est bornée.

∘ Démonstration : Comme pour la proposition 1, la réunion de deux subdivisions adaptées à f et à g est adaptée aux deux fonctions, et les opérations sur les fonctions continues et sur les limites (chapitre 8, théorème 2 et proposition 9, et proposition 20 pour le cas complexe) montrent que $\lambda f+g$, fg et $|f|$ sont continues par morceaux. Pour le caractère borné, chaque morceau f_i est continu sur le segment $[x_{i-1}\,,x_i]$, donc borné par le théorème des bornes atteintes (chapitre 8, théorème 10), appliqué à $|f_i|$; la fonction f est bornée par le plus grand de ces n majorants et des $n+1$ nombres $|f(x_i)|$. □

Exemples :

- La partie entière, restreinte à $[0\,,3]$, est en escalier, de subdivision adaptée $(0,1,2,3)$. La fonction $x\mapsto x-\lfloor x\rfloor$ est continue par morceaux sur $[0\,,3]$ sans être en escalier : ses morceaux sont affines.
- La fonction f définie sur $[0\,,1]$ par $f(0)=0$ et $f(x)=\frac{1}{x}$ pour $x>0$ n'est pas continue par morceaux : sur tout intervalle $]0\,,x_1[$, sa limite en 0 est infinie. Elle n'est d'ailleurs pas bornée, ce qui contredirait la proposition 2.
- La fonction g définie par $g(0)=0$ et $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ pour $x\in]0\,,1]$ est bornée, mais elle n'est pas continue par morceaux : sa restriction à $]0\,,x_1[$ n'a pas de limite en 0, puisque g prend les valeurs 1 et -1 aussi près de 0 que l'on veut.

Remarque : L'erreur la plus répandue est de croire qu'une fonction qui n'a qu'un nombre fini de discontinuités est continue par morceaux. Les deux derniers exemples n'ont qu'une discontinuité, en 0, et ne le sont pas : la définition exige en outre des limites finies de part et d'autre de chaque point de la subdivision.

18.2.4 Le théorème d'approximation

Le résultat suivant est le cœur de la construction : une fonction continue par morceaux peut être serrée d'aussi près que l'on veut entre deux fonctions en escalier. C'est ici qu'intervient la continuité uniforme, comme l'annonçait le chapitre 8.

Théorème 1 : Approximation par des fonctions en escalier :
Soit $f\in\mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{R})$ et $\varepsilon>0$. Il existe deux fonctions en escalier φ et ψ sur $[a\,,b]$ telles que

$$\varphi\leqslant f\leqslant\psi \qquad \text{et} \qquad \psi-\varphi\leqslant\varepsilon.$$

∘ Démonstration :

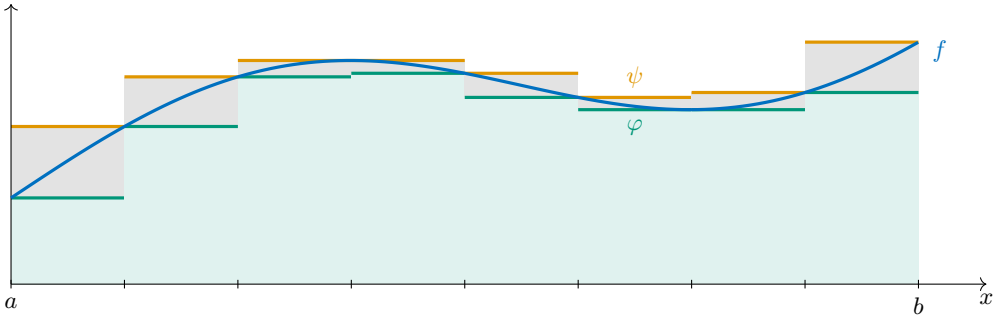
▷ *Un morceau.* Soit $\sigma=(x_0,\dots,x_n)$ une subdivision adaptée à f, et f_i le morceau d'indice i, continu sur le segment $[x_{i-1}\,,x_i]$. Par le théorème de Heine (chapitre 8, théorème 12), f_i y est uniformément continue : il existe $\delta_i>0$ tel que $|f_i(u)-f_i(v)|\leqslant\varepsilon$ dès que u, v sont dans $[x_{i-1}\,,x_i]$ et $|u-v|\leqslant\delta_i$.

▷ *Une subdivision fine.* On découpe chaque $[x_{i-1}\,,x_i]$ en intervalles de longueur au plus δ_i, par exemple par une subdivision régulière assez fine. On obtient une subdivision $\tau=(t_0,\dots,t_m)$ de $[a\,,b]$, plus fine que σ, telle que chaque $[t_{j-1}\,,t_j]$ soit contenu dans un $[x_{i-1}\,,x_i]$ et soit de longueur au plus δ_i.

▷ *Les fonctions en escalier.* Sur $[t_{j-1}\,,t_j]\subset[x_{i-1}\,,x_i]$, la fonction continue f_i atteint un minimum m_j et un maximum M_j (chapitre 8, théorème 10), en des points v et u de ce segment. On pose $\varphi=m_j$ et $\psi=M_j$ sur $]t_{j-1}\,,t_j[$, et $\varphi(t_j)=\psi(t_j)=f(t_j)$ aux points de τ. Ces fonctions sont en escalier, de subdivision adaptée τ. Pour $x\in]t_{j-1}\,,t_j[$, on a $f(x)=f_i(x)\in[m_j\,,M_j]$, donc $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$, et

$$\psi(x)-\varphi(x)=M_j-m_j=f_i(u)-f_i(v)\leqslant\varepsilon, \qquad \text{puisque } |u-v|\leqslant t_j-t_{j-1}\leqslant\delta_i.$$

Aux points t_j, les trois fonctions sont égales, et l'encadrement vaut encore. □



La fonction f, en bleu, est encadrée par φ, en vert, et ψ, en orange, construites sur une subdivision régulière en huit intervalles : sur chacun, φ et ψ sont le minimum et le maximum de f. La bande grise, où l'écart $\psi - \varphi$ est le plus grand près des fortes pentes, s'amincit partout lorsque l'on raffine la subdivision : c'est ce que garantit la continuité uniforme.

Remarques :

- Le pas de la subdivision est choisi une fois pour toutes sur chaque morceau, et c'est la continuité *uniforme* qui le permet. Avec la seule continuité, le δ dépendrait du point, et rien ne garantirait qu'un nombre fini d'intervalles suffise.
- Pour une fonction f à valeurs complexes, on applique le théorème à $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ avec $\frac{\varepsilon}{2}$: en notant φ_1 et φ_2 les minorantes obtenues, la fonction en escalier $\chi = \varphi_1 + \mathrm{i}\varphi_2$ vérifie $|f - \chi| \leqslant |\operatorname{Re} f - \varphi_1| + |\operatorname{Im} f - \varphi_2| \leqslant \varepsilon$.

18.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

18.3.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Pour une fonction en escalier, l'aire sous la courbe est une somme d'aires de rectangles : il n'y a rien à définir, sinon à vérifier que le résultat ne dépend pas du découpage choisi.

Proposition 3 : Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a\,,b],\mathbb{K})$ et $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à φ ; on note c_i la valeur de φ sur $]x_{i-1}\,,x_i[$. Le nombre

$$I_\sigma(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, c_i$$

ne dépend pas de la subdivision adaptée σ. On le note $I(\varphi)$, ou $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$: c'est l'**intégrale** de la fonction en escalier φ.

∘ Démonstration :

▷ *Ajout d'un point.* Si σ' s'obtient en ajoutant à σ un point $y \in]x_{k-1}\,,x_k[$, la fonction φ vaut c_k sur $]x_{k-1}\,,y[$ et sur $]y\,,x_k[$. Le seul terme qui change est celui d'indice k, et il est remplacé dans $I_{\sigma'}(\varphi)$ par

$$(y - x_{k-1})c_k + (x_k - y)c_k = (x_k - x_{k-1})c_k.$$

Donc $I_{\sigma'}(\varphi) = I_\sigma(\varphi)$.

▷ *Conclusion.* Une subdivision plus fine que σ s'obtient en ajoutant un nombre fini de points : par récurrence, elle donne la même valeur. Si σ et σ' sont deux subdivisions adaptées, $\sigma \cup \sigma'$ est plus fine que chacune, d'où $I_\sigma(\varphi) = I_{\sigma\cup\sigma'}(\varphi) = I_{\sigma'}(\varphi)$. □

Proposition 4 : Soit $\varphi,\ \chi \in \mathcal{E}([a\,,b],\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) *Linéarité :* $I(\lambda\varphi + \chi) = \lambda I(\varphi) + I(\chi)$.

(ii) *Croissance* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) : si $\varphi \geqslant 0$, alors $I(\varphi) \geqslant 0$; si $\varphi \leqslant \chi$, alors $I(\varphi) \leqslant I(\chi)$.

(iii) *Majoration :* $|I(\varphi)| \leqslant I(|\varphi|) \leqslant (b-a) \sup_{[a,b]} |\varphi|$.

(iv) *Relation de Chasles :* pour $c \in]a\,,b[$, $I(\varphi) = I(\varphi_{|[a,c]}) + I(\varphi_{|[c,b]})$, chaque intégrale étant prise sur le segment correspondant.

∘ Démonstration : On choisit une subdivision σ adaptée à la fois à φ et à χ, par exemple la réunion de deux subdivisions adaptées, et l'on note c_i et d_i les valeurs de φ et χ sur $]x_{i-1}\,,x_i[$. Le point (i) résulte de $\sum_i(x_i-x_{i-1})(\lambda c_i+d_i)=\lambda\sum_i(x_i-x_{i-1})c_i+\sum_i(x_i-x_{i-1})d_i$. Pour (ii), les termes $(x_i-x_{i-1})c_i$ sont positifs si $\varphi\geqslant 0$, et l'on applique ce résultat à $\chi-\varphi$, par linéarité. Le point (iii) est l'inégalité triangulaire pour une somme finie, suivie de la majoration $|c_i|\leqslant\sup|\varphi|$ et de $\sum_i(x_i-x_{i-1})=b-a$. Pour (iv), on ajoute c à la subdivision : la somme se coupe en deux, l'une relative aux intervalles contenus dans $[a\,,c]$, l'autre à ceux contenus dans $[c\,,b]$. □

18.3.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $f\in\mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{R})$. On l'approche par dessous et par dessus à l'aide des ensembles

$$\mathcal{A}^-(f)=\{I(\varphi)\mid\varphi\in\mathcal{E}([a\,,b],\mathbb{R}),\ \varphi\leqslant f\}\qquad\text{et}\qquad\mathcal{A}^+(f)=\{I(\psi)\mid\psi\in\mathcal{E}([a\,,b],\mathbb{R}),\ \psi\geqslant f\}.$$

Ils ne sont pas vides : si $|f|\leqslant M$ (proposition 2), les fonctions constantes $-M$ et M conviennent. Si $\varphi\leqslant f\leqslant\psi$, la proposition 4 donne $I(\varphi)\leqslant I(\psi)$: tout élément de $\mathcal{A}^-(f)$ minore $\mathcal{A}^+(f)$. Par la propriété de la borne supérieure (chapitre 7, théorème 1), on peut donc poser

$$I^-(f)=\sup\mathcal{A}^-(f)\qquad\text{et}\qquad I^+(f)=\inf\mathcal{A}^+(f),\qquad\text{et l'on a}\qquad I^-(f)\leqslant I^+(f),$$

puisque chaque $I(\psi)$ majore $\mathcal{A}^-(f)$, donc majore sa borne supérieure, qui minore alors $\mathcal{A}^+(f)$.

Théorème 2 : Intégrale d'une fonction continue par morceaux :
Pour toute fonction $f\in\mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{R})$, on a $I^-(f)=I^+(f)$. Cette valeur commune est l'**intégrale** de f sur $[a\,,b]$, notée

$$\int_{[a,b]}f=\int_a^b f=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\sup_{\substack{\varphi\in\mathcal{E}\\ \varphi\leqslant f}}I(\varphi)=\inf_{\substack{\psi\in\mathcal{E}\\ \psi\geqslant f}}I(\psi).$$

Lorsque f est en escalier, elle coïncide avec l'intégrale $I(f)$ de la proposition 3.

∘ Démonstration : Soit $\varepsilon>0$. Le théorème 1, appliqué avec $\frac{\varepsilon}{b-a}$, donne φ et ψ en escalier telles que $\varphi\leqslant f\leqslant\psi$ et $\psi-\varphi\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}$. Par la proposition 4, $I(\psi)-I(\varphi)=I(\psi-\varphi)\leqslant\varepsilon$, et donc

$$0\leqslant I^+(f)-I^-(f)\leqslant I(\psi)-I(\varphi)\leqslant\varepsilon.$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon>0$, on a $I^-(f)=I^+(f)$. Si f est en escalier, on peut prendre $\varphi=\psi=f$, d'où $I(f)\leqslant I^-(f)\leqslant I^+(f)\leqslant I(f)$. □

Remarques :

- La variable t est muette, comme au chapitre 6. La notation $\mathrm{d}t$ rappelle l'origine de la définition : une somme de produits $c_i(x_i-x_{i-1})$, où x_i-x_{i-1} est une petite variation de la variable.
- On rencontre des fonctions bornées pour lesquelles $I^-(f)<I^+(f)$. Pour l'indicatrice de $\mathbb{Q}\cap[0\,,1]$, une fonction en escalier minorante est négative sur chaque intervalle ouvert de sa subdivision, puisqu'il contient des irrationnels (chapitre 7, théorème 2), et une majorante y est supérieure à 1, puisqu'il contient des rationnels : $I^-(f)=0$ et $I^+(f)=1$. Cette fonction n'est pas intégrable au sens de Riemann, et le théorème 2 ne s'applique pas, parce qu'elle n'est pas continue par morceaux.

Proposition 5 : Soit $f\in\mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{R})$, et (φ_n), (ψ_n) deux suites de fonctions en escalier telles que $\varphi_n\leqslant f\leqslant\psi_n$ pour tout n et $\lim\limits_{n\to+\infty}I(\psi_n-\varphi_n)=0$. Alors

$$\int_a^b f=\lim_{n\to+\infty}I(\varphi_n)=\lim_{n\to+\infty}I(\psi_n).$$

∘ Démonstration : Par définition de la borne supérieure et de la borne inférieure, $I(\varphi_n) \leqslant \int_a^b f \leqslant I(\psi_n)$, donc

$$0 \leqslant \int_a^b f - I(\varphi_n) \leqslant I(\psi_n) - I(\varphi_n) = I(\psi_n - \varphi_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et le théorème d'encadrement (chapitre 7, théorème 6) donne la première limite ; la seconde s'en déduit de même. □

Exemple : Calculons $\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t$ sans primitive. Pour $n \geqslant 1$, on définit φ_n et ψ_n égales à $f : t \mapsto t^2$ aux points $\frac{k}{n}$, et à $\frac{k^2}{n^2}$ et $\frac{(k+1)^2}{n^2}$ sur $\left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Comme f est croissante sur $[0,1]$, on a $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$, et les sommes de carrés du chapitre 3 donnent

$$I(\varphi_n) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}, \qquad I(\psi_n) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

L'écart $I(\psi_n) - I(\varphi_n) = \frac{1}{n}$ tend vers 0, et les deux suites tendent vers $\frac{1}{3}$: la proposition 5 donne $\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$. Pour $n = 10$, l'encadrement $0{,}285 \leqslant \frac{1}{3} \leqslant 0{,}385$ est encore grossier : la convergence en $\frac{1}{n}$ est lente, ce que la section 18.6 améliorera.

Remarque : C'est le résultat d'Archimède. Le segment de parabole compris entre la corde $y = 1$ et la parabole $y = x^2$ a pour aire $2 - \int_{-1}^1 t^2\,\mathrm{d}t = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, la dernière intégrale s'obtenant par le même procédé, et le triangle inscrit de sommets $(-1,1)$, $(1,1)$ et $(0,0)$, dont le sommet est le point où la tangente est parallèle à la corde, a pour aire 1. Le rapport vaut bien $\frac{4}{3}$.

Interprétation géométrique. Lorsque f est positive, le domaine situé sous sa courbe contient la réunion des rectangles associés à toute fonction en escalier positive $\varphi \leqslant f$, et il est contenu dans celle des rectangles associés à toute $\psi \geqslant f$. Toute notion raisonnable d'aire doit donc donner un nombre compris entre $I^-(f)$ et $I^+(f)$: l'intégrale *est* l'aire, et c'est ainsi qu'on la définit désormais, ce qui justifie le point de vue du lycée rappelé au chapitre 6. Lorsque f change de signe, les aires des parties situées sous l'axe sont comptées négativement, puisque les rectangles correspondants ont une hauteur $c_i < 0$.

18.3.3 Propriétés de l'intégrale

Théorème 3 : Propriétés de l'intégrale :
Soit $f, g \in \mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) *Linéarité :* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g.$

(ii) *Positivité :* si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0.$

(iii) *Croissance :* si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$

(iv) *Inégalité triangulaire :* $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f| \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]}|f|.$

(v) *Relation de Chasles :* pour tout $c \in]a,b[$, $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$

∘ Démonstration :

▷ *(i)* Soit $\varepsilon > 0$, et, par le théorème 1, des fonctions en escalier telles que $\varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1$ et $\varphi_2 \leqslant g \leqslant \psi_2$, avec $\psi_k - \varphi_k \leqslant \varepsilon$. Alors $\varphi_1 + \varphi_2 \leqslant f + g \leqslant \psi_1 + \psi_2$. Les deux nombres $\int(f+g)$ et $\int f + \int g$ appartiennent donc à l'intervalle $\left[I(\varphi_1) + I(\varphi_2), I(\psi_1) + I(\psi_2)\right]$, dont la longueur est au plus $2\varepsilon(b-a)$ par la proposition 4 : ils sont égaux. Pour $\lambda \geqslant 0$, de même, $\lambda\varphi_1 \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\psi_1$ place $\int \lambda f$ et $\lambda \int f$ dans un intervalle de longueur au plus $\lambda\varepsilon(b-a)$; pour $\lambda < 0$, on échange les rôles de φ_1 et ψ_1.

▷ *(ii) et (iii)* Si $f \geqslant 0$, la fonction nulle est une fonction en escalier minorant f, donc $0 \in \mathcal{A}^-(f)$ et $\int f = I^-(f) \geqslant 0$. Si $f \leqslant g$, on applique ce résultat à $g - f$, et la linéarité conclut.

▷ *(iv)* La fonction $|f|$ est continue par morceaux (proposition 2), et $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ donne, par (i) et (iii), $-\int|f| \leqslant \int f \leqslant \int|f|$. Enfin $|f| \leqslant M = \sup|f|$, et l'intégrale de la fonction constante M vaut $M(b-a)$.

▷ *(v)* Les restrictions de f à $[a\,,c]$ et à $[c\,,b]$ sont continues par morceaux. Si $\varphi_1 \leqslant f$ sur $[a\,,c]$ et $\varphi_2 \leqslant f$ sur $[c\,,b]$ sont en escalier, la fonction φ égale à φ_1 sur $[a\,,c[$, à φ_2 sur $]c\,,b]$ et à $f(c)$ en c est en escalier et minore f, et la proposition 4 donne $I(\varphi_1)+I(\varphi_2) = I(\varphi) \leqslant \int_a^b f$. En passant à la borne supérieure sur φ_1, puis sur φ_2, on obtient $\int_a^c f + \int_c^b f \leqslant \int_a^b f$. Inversement, si $\psi \geqslant f$ est en escalier sur $[a\,,b]$, ses restrictions majorent f sur chaque segment, et $\int_a^c f + \int_c^b f \leqslant I(\psi_{|[a,c]}) + I(\psi_{|[c,b]}) = I(\psi)$; la borne inférieure sur ψ donne l'inégalité contraire. □

Remarques :

- Le point (i) affirme que $f \mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{R})$, donc sur $\mathcal{C}([a\,,b],\mathbb{R})$: c'est la démonstration annoncée au chapitre 14, où cette forme linéaire servait d'exemple.
- Le théorème 3 est la proposition 2 du chapitre 6, mais démontrée cette fois à partir de la définition, sans aucune primitive. Au chapitre 6, la positivité reposait sur le lien entre le signe de la dérivée et la monotonie (théorème 1 du chapitre 5, démontré au chapitre 9) ; ici, elle est presque évidente.

Définition : Soit I un intervalle, f une fonction continue par morceaux sur tout segment contenu dans I, et α, β deux points de I. On pose

$$\int_\alpha^\beta f = -\int_\beta^\alpha f \quad \text{si } \beta < \alpha \qquad \text{et} \qquad \int_\alpha^\alpha f = 0.$$

Avec cette convention, la relation de Chasles $\int_\alpha^\gamma f = \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f$ vaut pour tous α, β, γ de I, quel que soit leur ordre : lorsque β est entre α et γ, c'est le théorème 3, et les autres cas s'y ramènent en changeant de membre l'intégrale correspondante. La linéarité se conserve également.

Remarque : Les inégalités du théorème 3 supposent les bornes dans l'ordre croissant. L'erreur la plus répandue est d'écrire $\int_1^0 t\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ sous prétexte que $t \geqslant 0$: cette intégrale vaut $-\frac{1}{2}$. Lorsque l'ordre des bornes est inconnu, l'inégalité triangulaire s'écrit $\left|\int_\alpha^\beta f\right| \leqslant \left|\int_\alpha^\beta |f|\right|$.

Proposition 6 : Si deux fonctions f, $g \in \mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{R})$ ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.

∘ Démonstration : La fonction $g-f$ est nulle sauf en un nombre fini de points. Elle est en escalier, de subdivision adaptée formée de ces points, de a et de b, et sa valeur sur chaque intervalle ouvert est nulle : $I(g-f) = 0$, et la linéarité conclut. □

On peut donc intégrer une fonction qui n'est définie que sur $[a\,,b]$ privé d'un nombre fini de points, pourvu qu'elle s'y prolonge en une fonction continue par morceaux : la valeur de l'intégrale ne dépend pas du prolongement choisi. Ainsi $\int_{-1}^1 \frac{|t|}{t}\,\mathrm{d}t = 0$, bien que la fonction ne soit pas définie en 0.

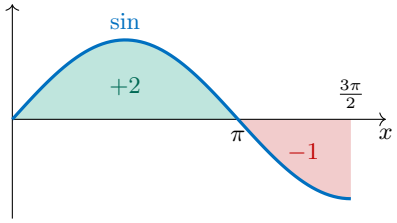
18.3.4 Valeur moyenne et intégrale nulle

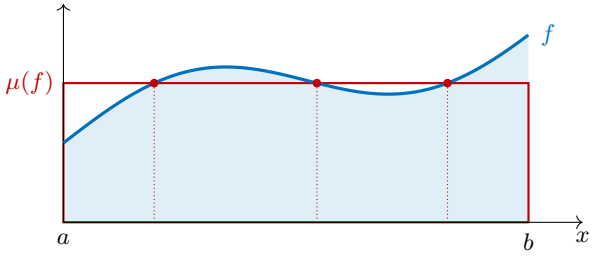
Proposition 7 : *(Inégalité de la moyenne.)* Soit $f \in \mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{R})$ et $m \leqslant M$ deux réels tels que $m \leqslant f \leqslant M$. Alors

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant M(b-a).$$

Le nombre $\mu(f) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$ est la **valeur moyenne** de f sur $[a\,,b]$. Si f est *continue*, il existe $c \in [a\,,b]$ tel que $f(c) = \mu(f)$.

∘ Démonstration : Par la croissance de l'intégrale, appliquée aux fonctions constantes égales à m et à M, on obtient l'encadrement. Si f est continue, elle atteint sur $[a\,,b]$ un minimum m et un maximum M (chapitre 8, théorème 10), et $\mu(f) \in [m\,,M]$ par ce qui précède. Comme $f([a\,,b])$ est un intervalle contenant m et M (chapitre 8, théorème 9), il contient $\mu(f)$. □





À gauche, l'intégrale de sin sur $\left[0\,,\frac{3\pi}{2}\right]$ vaut $2-1=1$: l'aire située sous l'axe compte négativement. À droite, le rectangle rouge de base $[a\,,b]$ et de hauteur $\mu(f)$ a la même aire que le domaine bleuté sous la courbe ; la valeur moyenne est atteinte ici en trois points, ce qui montre que le réel c de la proposition 7 n'est pas unique en général.

Remarque : Pour une fonction seulement continue par morceaux, la valeur moyenne n'est pas forcément atteinte : l'indicatrice de $\left[0\,,\frac{1}{2}\right]$ a pour valeur moyenne $\frac{1}{2}$ sur $[0\,,1]$, et ne prend que les valeurs 0 et 1.

Théorème 4 : Fonction continue positive d'intégrale nulle :

Soit $f:[a\,,b]\to\mathbb{R}$ continue et positive. Si $\displaystyle\int_a^b f=0$, alors f est nulle sur $[a\,,b]$.

∘ Démonstration : Supposons qu'il existe $x_0\in[a\,,b]$ tel que $f(x_0)>0$. Par continuité en x_0, avec $\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}$, il existe $\delta>0$ tel que $f(x)\geqslant\frac{f(x_0)}{2}$ pour tout $x\in[a\,,b]$ vérifiant $|x-x_0|\leqslant\delta$. L'ensemble de ces x est un segment $[\alpha\,,\beta]$ contenant x_0, de longueur $\beta-\alpha>0$ puisque $a<b$. La fonction en escalier égale à $\frac{f(x_0)}{2}$ sur $[\alpha\,,\beta]$ et nulle ailleurs minore f, qui est positive, d'où

$$\int_a^b f\geqslant(\beta-\alpha)\,\frac{f(x_0)}{2}>0,$$

ce qui contredit l'hypothèse. □

Remarques :

- Sous forme contraposée : l'intégrale sur $[a\,,b]$, avec $a<b$, d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle est *strictement* positive. Par exemple, $\int_0^1 t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t>0$ sans aucun calcul.
- L'hypothèse de continuité est indispensable : l'indicatrice de $\{0\}$ est continue par morceaux, positive, d'intégrale nulle (proposition 6), et n'est pas nulle. L'erreur la plus répandue est d'appliquer le théorème 4 à une fonction qui n'est que continue par morceaux.
- Ce théorème servira au chapitre 19 : il garantit que $\int_a^b f^2=0$ entraîne $f=0$ pour f continue, ce qui fait de $(f,g)\mapsto\int_a^b fg$ un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a\,,b],\mathbb{R})$.

18.3.5 Fonctions à valeurs complexes

Si $f\in\mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{C})$, ses parties réelle et imaginaire sont continues par morceaux et à valeurs réelles, avec la même subdivision adaptée (chapitre 8, proposition 20).

Définition : L'intégrale d'une fonction $f\in\mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{C})$ est le nombre complexe

$$\int_a^b f=\int_a^b \mathrm{Re}\,f+\mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}\,f.$$

Pour une fonction en escalier à valeurs complexes, on retrouve l'intégrale de la proposition 3, en séparant les parties réelle et imaginaire des c_i.

Proposition 8 : L'application $f\mapsto\int_a^b f$ est $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathcal{C}_m([a\,,b],\mathbb{C})$ et vérifie la relation de Chasles. De plus, $\mathrm{Re}\left(\int_a^b f\right)=\int_a^b\mathrm{Re}\,f$, $\mathrm{Im}\left(\int_a^b f\right)=\int_a^b\mathrm{Im}\,f$ et $\overline{\int_a^b f}=\int_a^b\overline{f}$.

∘ Démonstration : Les trois dernières égalités traduisent la définition. L'additivité et la relation de Chasles se lisent sur les parties réelle et imaginaire. Pour $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$, on a $\mathrm{Re}(\lambda f) = \alpha \operatorname{Re} f - \beta \operatorname{Im} f$ et $\mathrm{Im}(\lambda f) = \beta \operatorname{Re} f + \alpha \operatorname{Im} f$; la linéarité réelle donne alors $\int \lambda f = (\alpha + \mathrm{i}\beta)\big(\int \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \int \operatorname{Im} f\big) = \lambda \int f$. □

Théorème 5 : Inégalité triangulaire complexe :
Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_m([a\,,b], \mathbb{C})$,

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

∘ Démonstration : Le cas $\int_a^b f = 0$ est évident. Sinon, on écrit $\int_a^b f = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ (chapitre 4). Par $\mathbb{C}$-linéarité, $r = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \int_a^b f = \int_a^b \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f$, et ce nombre est réel ; par la proposition 8 et la croissance de l'intégrale réelle, puisque $\operatorname{Re} z \leqslant |z|$ pour tout complexe z,

$$\left| \int_a^b f \right| = r = \int_a^b \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f\right) \leqslant \int_a^b \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f\right| = \int_a^b |f|.$$

La fonction $|f|$ est bien continue par morceaux, d'après la proposition 2. □

Remarques :

- C'est l'astuce de la proposition 6 du chapitre 9 : on tourne le plan pour amener l'intégrale sur l'axe réel, où l'on dispose de l'ordre.
- L'erreur la plus répandue est de majorer séparément les parties réelle et imaginaire, ce qui ne donne que $\left|\int f\right| \leqslant \int |\operatorname{Re} f| + \int |\operatorname{Im} f|$, plus faible. L'inégalité est souvent stricte : on verra à la section suivante que $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = 0$, alors que $\int_0^{2\pi} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|\,\mathrm{d}t = 2\pi$, les valeurs $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ se compensant en tournant autour de 0.

18.4 Intégrale et primitives

Dans cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ qui n'est ni vide ni réduit à un point. Une fonction continue sur I est continue par morceaux sur tout segment contenu dans I, et l'on peut intégrer entre deux points quelconques de I, avec la convention d'orientation de la section 18.3.

18.4.1 Le théorème fondamental

Théorème 6 : Théorème fondamental de l'analyse :
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$. La fonction

$$F : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $F' = f$: c'est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a. En particulier, toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive, et pour toute primitive G de f et tous α, $\beta \in I$,

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = G(\beta) - G(\alpha).$$

∘ Démonstration :

▷ *Le taux d'accroissement.* Soit $x_0 \in I$ et $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in I$. Par la relation de Chasles, et puisque l'intégrale de la constante $f(x_0)$ entre x_0 et $x_0 + h$ vaut $hf(x_0)$, quel que soit le signe de h,

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t) - f(x_0)\big)\,\mathrm{d}t.$$

▷ *Majoration.* Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in I$ vérifiant $|t - x_0| \leqslant \delta$. Si $0 < |h| \leqslant \delta$, tout t compris entre x_0 et $x_0 + h$ vérifie $|t - x_0| \leqslant \delta$, et

l'inégalité triangulaire (théorème 3, ou théorème 5 si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), appliquée sur le segment d'extrémités x_0 et $x_0 + h$, donne

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{|h|} \times |h|\,\varepsilon = \varepsilon.$$

Ainsi F est dérivable en x_0, de dérivée $f(x_0)$. Comme $F' = f$ est continue, F est de classe $\mathcal{C}^1$, et $F(a) = 0$.

▷ *Conséquences.* L'unicité est la proposition 1 du chapitre 6. Si G est une primitive de f, la différence $G - F$ est constante, d'où $G(\beta) - G(\alpha) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_a^\beta f - \int_a^\alpha f = \int_\alpha^\beta f$, par la relation de Chasles. □

Ce théorème clôt le chapitre 6. Le théorème 1 de ce chapitre, l'existence d'une primitive pour toute fonction continue, y était *admis* : il est désormais démontré. L'intégrale y était *définie* par $G(\beta) - G(\alpha)$: la dernière formule montre que cette définition coïncide avec celle de la section 18.3. Tous les résultats du chapitre 6 s'appliquent donc à l'intégrale construite ici, et ceux qui reposaient sur l'existence de primitives sont maintenant complets : intégration par parties et changement de variable (propositions 4 et 5 du chapitre 6), parité et périodicité (proposition 6), résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre (théorèmes 2 et 3).

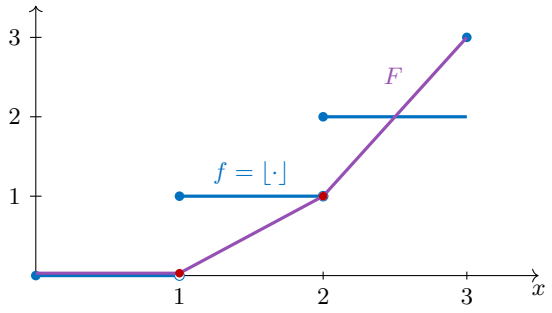
Exemples :

- Une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est $t \mapsto -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ (chapitre 6), donc $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\,(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} - 1) = 0$, ce qu'annonçait la remarque suivant le théorème 5.
- Pour calculer $\int_0^\pi \mathrm{e}^t \cos t\,\mathrm{d}t$, on y reconnaît la partie réelle de $\int_0^\pi \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t$, par la proposition 8. Une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$ est $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}}{1+\mathrm{i}}$, et $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\pi} = -\mathrm{e}^\pi$, d'où

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^t \cos t\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\frac{-\mathrm{e}^\pi - 1}{1+\mathrm{i}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{-(\mathrm{e}^\pi+1)(1-\mathrm{i})}{2}\right) = -\frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2} \approx -12{,}07.$$

  Le résultat est négatif parce que le facteur e^t donne beaucoup plus de poids à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, où le cosinus est négatif.

Remarque : Le théorème fondamental relie deux opérations de nature très différente : la dérivation, qui est locale, et l'intégration, qui est globale. L'erreur la plus répandue est de l'appliquer à une fonction seulement continue par morceaux. Pour $f \in \mathcal{C}_m([a\,,b], \mathbb{K})$, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f$ est encore continue, et même lipschitzienne de rapport $\sup|f|$, par l'inégalité triangulaire ; elle est dérivable de dérivée $f(x_0)$ en tout point x_0 où f est continue, par la même démonstration ; mais elle n'est pas forcément dérivable aux points de discontinuité de f.



La fonction partie entière f, en bleu, est en escalier sur $[0\,,3]$; la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f$, en violet, est continue et affine par morceaux, de pente $f(x)$ sur chaque intervalle ouvert. Aux points 1 et 2, marqués en rouge, ses dérivées à gauche et à droite diffèrent : F n'est pas une primitive de f.
En fait, f n'admet aucune primitive sur $[0\,,3]$. Si G en était une, $G - F$ serait de dérivée nulle sur chacun des intervalles $]0\,,1[$, $]1\,,2[$ et $]2\,,3[$, donc constante sur chacun d'eux ; comme G et F sont continues, $G - F$ serait constante sur $[0\,,3]$, et $G = F + c$ ne serait pas dérivable en 1.

18.4.2 Le logarithme et l'exponentielle construits

Le chapitre 5 a admis l'existence de l'exponentielle, solution de $y' = y$ telle que $y(0) = 1$, puis défini le logarithme comme sa réciproque. Le théorème fondamental permet de procéder en sens inverse, sans rien admettre, en définissant d'abord le logarithme par une aire.

Proposition 9 : Pour $x > 0$, on pose $L(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

(i) La fonction L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$, et $L(1) = 0$.

(ii) Pour tous x, $y > 0$, $L(xy) = L(x) + L(y)$.

(iii) La fonction L est une bijection strictement croissante de $]0\,,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

(iv) Sa réciproque $E : \mathbb{R} \to]0\,,+\infty[$ est dérivable, et vérifie $E' = E$ et $E(0) = 1$.

En particulier, la fonction exponentielle du théorème 3 du chapitre 5 *existe* : c'est E, et $L = \ln$.

∘ Démonstration :

▷ *(i)* C'est le théorème 6, appliqué à la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$.

▷ *(ii)* Fixons $y > 0$, et posons $g(x) = L(xy) - L(x)$ pour $x > 0$. Cette fonction est dérivable, de dérivée $g'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0$; elle est constante sur cet intervalle (chapitre 9, théorème 7), égale à $g(1) = L(y)$.

▷ *(iii)* La dérivée $\frac{1}{x}$ est strictement positive : L est strictement croissante (chapitre 9, théorème 7). Par (ii), $L(2^n) = nL(2)$, avec $L(2) > L(1) = 0$; la fonction L, croissante et non majorée, tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (chapitre 8, théorème 6). Comme $L\big(\frac{1}{x}\big) = -L(x)$, par (ii) avec $y = \frac{1}{x}$, elle tend vers $-\infty$ en 0. Continue et strictement croissante sur un intervalle, elle réalise une bijection de $]0\,,+\infty[$ sur $]-\infty\,,+\infty[$ (chapitre 8, théorème 11).

▷ *(iv)* La dérivée de L ne s'annule pas : par le théorème 3 du chapitre 9, la réciproque E est dérivable, et $E'(y) = \frac{1}{L'(E(y))} = E(y)$. Enfin $E(0) = 1$, puisque $L(1) = 0$. Par l'unicité démontrée au chapitre 5, E est l'exponentielle, et L, sa réciproque, est le logarithme népérien. □

Remarques :

- Il n'y a pas de cercle vicieux : la construction de l'intégrale n'a utilisé que la borne supérieure, la continuité uniforme et les théorèmes des chapitres 8 et 9 sur les fonctions continues et dérivables, dont aucun ne fait intervenir l'exponentielle. Les propriétés de exp et de ln démontrées au chapitre 5 à partir du théorème 3, ainsi que les puissances réelles, sont donc maintenant entièrement établies.
- La propriété (ii) est l'observation de Grégoire de Saint-Vincent et de Sarasa rappelée au chapitre 5 : par le changement de variable $t = yu$, l'aire sous l'hyperbole entre y et xy est égale à l'aire entre 1 et x. Le nombre $\ln 2 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \approx 0{,}6931$ est l'aire bleue de la figure du chapitre 5.
- Le chapitre 4 a admis l'existence du cosinus et du sinus. On peut aussi les construire par une intégrale : la fonction $A : x \mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est impaire, strictement croissante et majorée sur $[0\,,+\infty[$, puisque $A(x) \leqslant A(1) + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant 2$ pour $x \geqslant 1$. Sa limite en $+\infty$ peut servir de définition de $\frac{\pi}{2}$, sa réciproque est la tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$, et l'on en déduit le cosinus et le sinus ; nous ne détaillerons pas ces vérifications.

18.4.3 Inégalité des accroissements finis

Le chapitre 9 a démontré l'inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe en faisant tourner le plan (proposition 6 du chapitre 9). Il en annonçait une autre démonstration, pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, que voici.

Proposition 10 : Soit $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $K \geqslant 0$ tel que $|f'| \leqslant K$ sur I. Pour tous x, $y \in I$,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant K|y - x|.$$

◦ Démonstration : Comme f' est continue, f en est une primitive, et le théorème 6 donne

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On peut supposer $x \leqslant y$, quitte à les échanger ; l'inégalité triangulaire (théorème 5) et la croissance de l'intégrale donnent alors

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \int_x^y |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^y K\,\mathrm{d}t = K(y-x),$$

ce qui est l'inégalité annoncée. □

La démonstration du chapitre 9 est plus générale, puisqu'elle ne suppose que la dérivabilité de f, mais celle-ci explique l'inégalité : l'accroissement est l'intégrale de la vitesse, et il est majoré par la vitesse maximale multipliée par la durée. C'est ce point de vue que la section 18.5 poussera aux ordres supérieurs.

18.4.4 Intégration des fractions rationnelles

Le chapitre 13 a décomposé toute fraction rationnelle en éléments simples, et annoncé que cette décomposition permettrait de l'intégrer. On intègre ici une fraction F sur un segment $[\alpha\,,\beta]$ qui ne contient aucun pôle : la fonction rationnelle associée y est continue, et le théorème 6 s'applique.

♡ **Méthode : Pour intégrer une fraction rationnelle réelle sur un segment sans pôle :**

- ▶ On décompose la fraction en éléments simples sur $\mathbb{R}$ (chapitre 13, théorème 14) ; la partie entière est un polynôme, que l'on intègre directement.
- ▶ Un élément de première espèce $\frac{c}{(x-a)^k}$ a pour primitive $c\ln|x-a|$ si $k=1$, et $-\frac{c}{(k-1)(x-a)^{k-1}}$ si $k \geqslant 2$.
- ▶ Pour un élément $\frac{bx+d}{x^2+px+q}$ de seconde espèce, avec $p^2-4q<0$, on écrit $bx+d = \frac{b}{2}(2x+p)+d-\frac{bp}{2}$: le premier terme donne $\frac{b}{2}\ln(x^2+px+q)$, et le second se traite par la forme canonique et l'arc tangente, comme au chapitre 6.

Les éléments de seconde espèce de la forme $\frac{bx+d}{(x^2+px+q)^k}$ avec $k \geqslant 2$ se ramènent, par la forme canonique et un changement de variable affine, aux intégrales $\int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^k}$, que l'on calcule par une relation de récurrence obtenue en intégrant par parties.

Exemple : Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$. Les pôles sont -1 et les racines non réelles de X^2-X+1 : le segment $[0\,,1]$ n'en contient aucun. La proposition 23 du chapitre 13 donne le coefficient $\frac{1}{3}$ en -1, et la limite de $xF(x)$ en $+\infty$, qui est nulle, puis l'évaluation en 0, fournissent le reste :

$$\frac{1}{1+X^3} = \frac{1}{3(X+1)} - \frac{X-2}{3(X^2-X+1)}, \qquad \text{et} \qquad X-2 = \frac{1}{2}(2X-1) - \frac{3}{2}.$$

Sur $[0\,,1]$, le premier terme donne un logarithme, qui s'annule ici :

$$\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \big[\ln(x^2-x+1)\big]_0^1 = 0.$$

Avec la forme canonique $x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} = \Big[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\Big) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

En rassemblant, avec $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{3(x+1)} = \frac{\ln 2}{3}$,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \frac{\ln 2}{3} - \frac{1}{3}\Big(0 - \frac{3}{2}\times\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\Big) = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}8356.$$

Le résultat mêle un logarithme, issu du pôle réel, et un multiple de π, issu des pôles complexes conjugués : c'est la structure générale annoncée au chapitre 6. La valeur est bien comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, bornes de la fonction intégrée sur $[0\,,1]$, comme l'exige la proposition 7.

Remarque : L'hypothèse que le segment ne contient aucun pôle est essentielle. L'erreur la plus répandue est d'écrire $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2$: le résultat, négatif pour une fonction positive, est absurde, et le calcul est faux parce que $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ n'est pas continue par morceaux sur $[-1\,,1]$, et que $-\frac{1}{x}$ n'en est pas une primitive sur cet intervalle.

18.5 Formules de Taylor globales

La formule de Taylor-Young du chapitre 10 (théorème 4) décrit une fonction au voisinage d'un point, mais ne dit rien de l'erreur commise pour un écart h fixé. En écrivant $f(x) - f(a)$ comme l'intégrale de f', puis en intégrant par parties de façon répétée, on obtient une expression *exacte* de cette erreur. Dans cette section, I est un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, et pour f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $a \in I$, on note

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$$

le **polynôme de Taylor** de f à l'ordre n en a, déjà rencontré au chapitre 13 pour les polynômes.

18.5.1 La formule avec reste intégral

Théorème 7 : Formule de Taylor avec reste intégral :
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $a \in I$. Pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

∘ Démonstration : On fixe x et l'on raisonne par récurrence sur n, la propriété au rang n portant sur toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Pour $n = 0$, la formule s'écrit $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$: c'est le théorème 6, puisque f est une primitive de la fonction continue f'.

Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+2}$, à laquelle s'applique la formule au rang n. On intègre par parties le reste (proposition 4 du chapitre 6), avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

$$u(t) = f^{(n+1)}(t), \qquad v(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad \text{de sorte que} \qquad v'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}\ :$$

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(t)\Big]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le crochet vaut $\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, qui est le terme d'indice $n+1$ du polynôme de Taylor : on obtient la formule au rang $n+1$. □

Théorème 8 : Inégalité de Taylor-Lagrange :
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, a, $x \in I$, et M un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur le segment d'extrémités a et x. Alors

$$\Big|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\Big| \leqslant M\,\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

∘ Démonstration : Supposons $a \leqslant x$. Par le théorème 7 et l'inégalité triangulaire (théorème 5), le premier membre est majoré par

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\big|f^{(n+1)}(t)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = M\Big[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Big]_a^x = M\,\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Si $x < a$, on écrit le reste $-\int_x^a \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$, on le majore par $M\int_x^a \frac{(t-x)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = M\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}$, et la conclusion est la même. □

Remarques :

- Pour $n = 0$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis de la proposition 10. Le théorème 8 en est la généralisation aux ordres supérieurs, comme le théorème 7 généralise la formule $f(x) - f(a) = \int_a^x f'$.
- Comparons avec la formule de Taylor-Young. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, le théorème 8, appliqué sur un segment $[a-\eta\,,a+\eta]$ contenu dans I, donne $f(a+h) = T_n(a+h) + O(h^{n+1})$, ce qui est plus précis que le $o(h^n)$ du chapitre 10. En contrepartie, la formule de Taylor-Young n'exige que la classe $\mathcal{C}^n$. Surtout, les deux formules ne répondent pas à la même question : Taylor-Young est *locale*, elle décrit $f(a+h)$ quand h tend vers 0 ; Taylor-Lagrange est *globale*, elle majore l'erreur pour un h donné, sur tout un segment.
- L'erreur la plus répandue est de croire que $T_n(x)$ tend toujours vers $f(x)$ quand n tend vers l'infini. La fonction plate du chapitre 10, égale à $\mathrm{e}^{-1/x}$ pour $x > 0$ et à 0 sinon, a tous ses polynômes de Taylor nuls en 0, alors que $f(x) \neq 0$ pour $x > 0$: la majoration du théorème 8 ne tend pas vers 0, parce que les dérivées successives de f croissent trop vite.

18.5.2 Applications

Proposition 11 : Pour tout réel x,

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \qquad \sin x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

et pour tout $x \in [0\,,1]$, $\quad \ln(1+x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$.

∘ Démonstration :

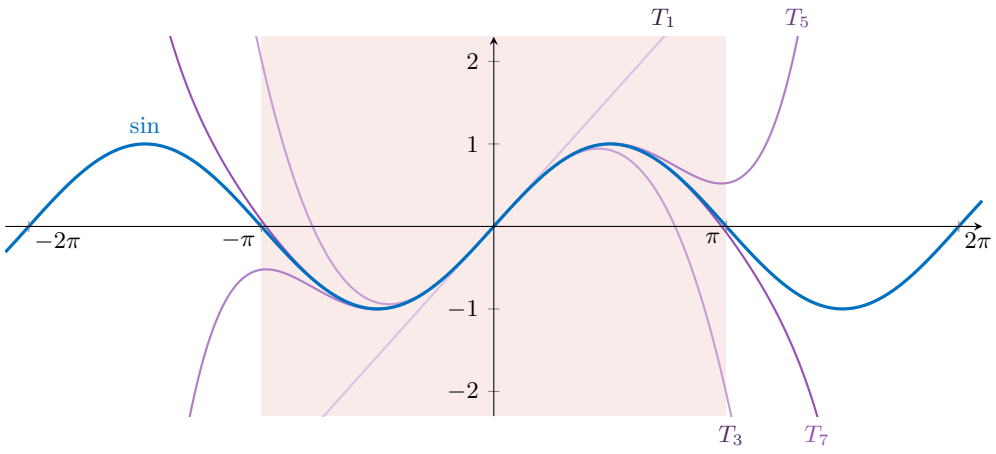
▷ *Exponentielle.* Toutes les dérivées de exp valent exp, majorée par $\mathrm{e}^{|x|}$ sur le segment d'extrémités 0 et x. Le théorème 8, en $a = 0$, donne

$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \mathrm{e}^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

par les croissances comparées du chapitre 7 (théorème 7).

▷ *Sinus et cosinus.* Les dérivées successives de sin sont $\pm\sin$ et $\pm\cos$, majorées par 1 en valeur absolue, et ses dérivées d'ordre pair sont nulles en 0 ; le polynôme de Taylor d'ordre $2n+2$ en 0 est donc la somme de l'énoncé, et l'erreur est majorée par $\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$, qui tend vers 0. Le cosinus se traite de même.

▷ *Logarithme.* La fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ vérifie $f^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+t)^k}$ pour $k \geqslant 1$, par récurrence. Pour $t \in [0\,,x]$, on a $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant n!$, et l'erreur est majorée par $n!\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$, qui tend vers 0. □



Le sinus, en bleu, et ses polynômes de Taylor en 0 d'ordres 1, 3, 5 et 7, en violet de plus en plus foncé : chacun suit la courbe sur un intervalle plus large que le précédent, puis s'en écarte brutalement. Sur la

bande rosée $[-\pi\,,\pi]$, le théorème 8 garantit $|\sin x - T_7(x)| \leqslant \frac{\pi^9}{9!} \approx 0{,}082$; l'écart maximal réel, atteint en $\pm\pi$, est d'environ 0,075.

Exemples :

- Avec $x = 1$, on obtient $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, où $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$: la limite commune des suites adjacentes (u_n) et $\left(u_n + \frac{1}{n\cdot n!}\right)$ du chapitre 7 est bien e, comme ce chapitre l'annonçait. La majoration $0 \leqslant \mathrm{e} - u_n \leqslant \frac{3}{(n+1)!}$, où l'on a utilisé $\mathrm{e} \leqslant 3$, donne pour $n = 10$ une erreur inférieure à $7{,}6\times10^{-8}$; on calcule $u_{10} \approx 2{,}718\,281\,80$, et l'écart réel avec $\mathrm{e} \approx 2{,}718\,281\,83$ est d'environ $2{,}7\times10^{-8}$.
- Avec $x = 1$ dans la dernière formule, $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$. La convergence est cette fois très lente : la somme des dix premiers termes vaut environ 0,6456, à 0,048 de $\ln 2 \approx 0{,}6931$, et il faut un millier de termes pour obtenir trois décimales. La majoration $\frac{1}{n+1}$ du théorème 8 rend compte de cette lenteur, alors que le $(n+1)!$ du dénominateur rendait la série de e très rapide.

Proposition 12 : Le nombre e est irrationnel.

∘ Démonstration : La suite (u_n) est strictement croissante de limite e, donc $u_n < u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$; la suite $v_n = u_n + \frac{1}{n\cdot n!}$ est strictement décroissante (chapitre 7), de même limite, donc $\mathrm{e} < v_n$. Supposons $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers naturels non nuls. Pour $n = q$, en multipliant par $q!$,

$$q!\,u_q < q!\,\mathrm{e} < q!\,u_q + \frac{1}{q}.$$

Or $N = q!\,u_q = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$ est un entier, de même que $q!\,\mathrm{e} = (q-1)!\,p$. On aurait un entier strictement compris entre N et $N + \frac{1}{q} \leqslant N + 1$, ce qui est impossible. □

La démonstration n'utilise que la vitesse de convergence de (u_n) : l'erreur $\mathrm{e} - u_q$ est trop petite, devant $\frac{1}{q!}$, pour que e soit une fraction de dénominateur q. C'est un exemple typique d'usage d'une majoration explicite, que la formule de Taylor-Young n'aurait pas fournie.

18.6 Sommes de Riemann et calcul approché

18.6.1 Convergence des sommes de Riemann

Définition : Une **subdivision pointée** de $[a\,,b]$ est la donnée d'une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ et de points $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ tels que $\xi_i \in [x_{i-1}\,, x_i]$. La **somme de Riemann** de $f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ associée est

$$S(f,\sigma,\xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(\xi_i).$$

Pour la subdivision régulière, de pas $h = \frac{b-a}{n}$, et les points $\xi_i = x_{i-1}$ ou $\xi_i = x_i$, on obtient les sommes

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\,\frac{b-a}{n}\Big) \qquad \text{et} \qquad R'_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(a + k\,\frac{b-a}{n}\Big).$$

Une somme de Riemann est l'intégrale de la fonction en escalier égale à $f(\xi_i)$ sur chaque $]x_{i-1}\,, x_i[$: c'est l'aire des rectangles de la figure de la page 1. C'est la définition de Cauchy et de Riemann ; le théorème suivant montre qu'elle donne la même intégrale que celle de la section 18.3.

Théorème 9 : Convergence des sommes de Riemann :
Soit $f \in \mathcal{C}_m([a\,,b], \mathbb{K})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute subdivision pointée (σ, ξ) de pas au plus δ,

$$\Big| S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f \Big| \leqslant \varepsilon.$$

En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\,\frac{b-a}{n}\Big) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, et de même pour $R'_n(f)$.

∘ Démonstration : Il suffit de traiter le cas réel : dans le cas complexe, on l'applique à $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ avec $\frac{\varepsilon}{2}$.

▷ *Fonctions en escalier.* Soit φ en escalier, $\tau = (y_0, \dots, y_p)$ une subdivision adaptée et $M = \sup|\varphi|$. Soit (σ, ξ) une subdivision pointée de pas au plus δ. Par la relation de Chasles,

$$S(\varphi, \sigma, \xi) - I(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \Big((x_i - x_{i-1})\varphi(\xi_i) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi \Big).$$

Si le segment $[x_{i-1}\,, x_i]$ ne contient aucun point y_j, il est contenu dans un intervalle ouvert de τ, où φ est constante, et le terme d'indice i est nul. Chaque y_j appartient à au plus deux de ces segments : au plus $2(p+1)$ termes sont non nuls, et chacun est majoré par $2M\delta$. Ainsi $|S(\varphi, \sigma, \xi) - I(\varphi)| \leqslant 4(p+1)M\delta$, qui est aussi petit que l'on veut pour δ assez petit.

▷ *Cas général.* Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 1, il existe des fonctions en escalier $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ telles que $I(\psi) - I(\varphi) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, et, par l'étape précédente, un $\delta > 0$ tel que $|S(\varphi, \sigma, \xi) - I(\varphi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ et $|S(\psi, \sigma, \xi) - I(\psi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ pour toute subdivision pointée de pas au plus δ. Pour une telle subdivision, puisque les points ξ_i sont les mêmes pour les trois fonctions,

$$S(\varphi, \sigma, \xi) \leqslant S(f, \sigma, \xi) \leqslant S(\psi, \sigma, \xi) \qquad \text{et} \qquad I(\varphi) \leqslant \int_a^b f \leqslant I(\psi).$$

Donc

$$S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f \leqslant S(\psi, \sigma, \xi) - I(\varphi) = \big(S(\psi, \sigma, \xi) - I(\psi)\big) + \big(I(\psi) - I(\varphi)\big) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3},$$

et de même $\int f - S(f, \sigma, \xi) \leqslant I(\psi) - S(\varphi, \sigma, \xi) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}$. Enfin, le pas de la subdivision régulière, $\frac{b-a}{n}$, est inférieur à δ pour n assez grand. □

Remarque : En divisant par $b-a$, le théorème dit que la moyenne arithmétique $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ des valeurs de f aux points d'une subdivision régulière tend vers la valeur moyenne $\mu(f)$ de la proposition 7 : la valeur moyenne d'une fonction est bien la limite des moyennes de ses valeurs.

Proposition 13 : Soit $f : [a\,, b] \to \mathbb{K}$ une fonction K-lipschitzienne. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\Big| \int_a^b f - R_n(f) \Big| \leqslant \frac{K(b-a)^2}{2n},$$

et de même pour $R'_n(f)$. C'est le cas, avec $K = \sup|f'|$, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ (proposition 10).

∘ Démonstration : Soit $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_k = a + kh$. Sur $[x_k\,, x_{k+1}]$, on a $|f(t) - f(x_k)| \leqslant K(t - x_k)$, donc

$$\Big| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - hf(x_k) \Big| = \Big| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \big(f(t) - f(x_k)\big)\,\mathrm{d}t \Big| \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(t - x_k)\,\mathrm{d}t = \frac{Kh^2}{2}.$$

En sommant ces n inégalités, par la relation de Chasles, l'erreur est majorée par $n\frac{Kh^2}{2} = \frac{K(b-a)^2}{2n}$. Pour R'_n, on compare à $f(x_{k+1})$. □

♡ **Méthode : Pour calculer la limite d'une somme à l'aide d'une intégrale :**

- On met en facteur $\frac{1}{n}$ et l'on écrit le terme général sous la forme $g\big(\frac{k}{n}\big)$, pour une fonction g continue par morceaux qui ne dépend pas de n.
- On lit l'intervalle d'intégration sur les bornes de k : si k va de 0 ou 1 à $n-1$ ou n, les points $\frac{k}{n}$ parcourent $[0\,, 1]$.
- On conclut par le théorème 9, puis on calcule l'intégrale par une primitive.

Pour un produit, on se ramène à une somme en prenant le logarithme.

Exemples :

- On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=R_n'(g)$, avec $g(t)=\frac{1}{1+t}$ sur $[0\,,1]$. Donc
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln 2.$$
Comme $|g'|\leqslant 1$, la proposition 13 garantit une erreur au plus égale à $\frac{1}{2n}$. Pour $n=10$, la somme vaut environ 0,6688, à 0,024 de $\ln 2$; pour $n=1\,000$, l'écart est d'environ $2{,}5\times10^{-4}$, la moitié de la borne : la majoration est du bon ordre de grandeur.
- De même, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$; pour $n=100$, on obtient 0,7829, contre $\frac{\pi}{4}\approx 0{,}7854$.
- Soit $P_n=\left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{1/n}$. Comme $\frac{(2n)!}{n!}=\prod_{k=1}^{n}(n+k)$, on a $\ln P_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$, qui tend vers
$$\int_0^1\ln(1+t)\,\mathrm{d}t=\big[(1+t)\ln(1+t)-t\big]_0^1=2\ln 2-1.$$
Par continuité de l'exponentielle, $P_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}^{2\ln 2-1}=\frac{4}{\mathrm{e}}\approx 1{,}4715$; pour $n=100$, $P_n\approx 1{,}4766$.

Remarque : L'erreur la plus répandue est de mal lire l'intervalle d'intégration. La somme $\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$ s'écrit $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}g\left(\frac{k}{n}\right)$: les points $\frac{k}{n}$ parcourent $[0\,,2]$ avec un pas $\frac{1}{n}$, et la limite est $\int_0^2\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln 3$, et non $\ln 2$.

18.6.2 Méthodes des rectangles et des trapèzes

Pour calculer une valeur approchée d'une intégrale dont on ne connaît pas de primitive explicite, on remplace f, sur chaque intervalle d'une subdivision régulière, par une fonction plus simple. La **méthode des rectangles** la remplace par une constante, sa valeur en x_k, et fournit $R_n(f)$. La **méthode des trapèzes** la remplace par la fonction affine qui coïncide avec f en x_k et en x_{k+1}, et fournit
$$T_n(f)=\frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right)=\frac{R_n(f)+R_n'(f)}{2},$$
puisque le trapèze construit sur $[x_k\,,x_{k+1}]$ a pour aire $h\,\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}$. Pour le même nombre $n+1$ d'évaluations de f, la seconde méthode est beaucoup plus précise.

Proposition 14 : *(Erreur de la méthode des trapèzes.)* Soit $f:[a\,,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, et M_2 un majorant de $|f''|$ sur $[a\,,b]$. Pour tout $n\geqslant 1$,
$$\left|\int_a^b f-T_n(f)\right|\leqslant\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}.$$

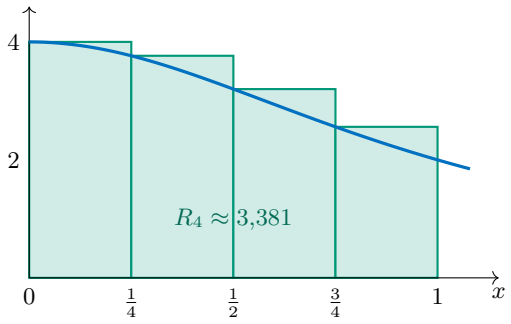
∘ Démonstration :

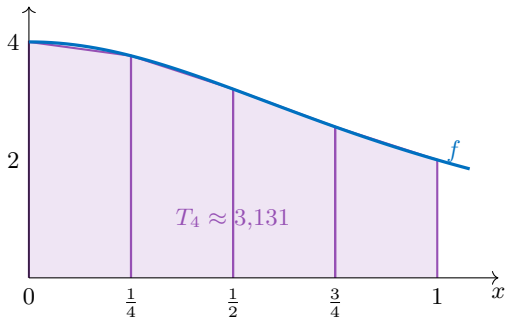
▷ *Un intervalle.* Soit $[\alpha\,,\beta]$ un segment de longueur h, et $\theta(t)=\frac{(t-\alpha)(t-\beta)}{2}$. On a $\theta''=1$, $\theta'(t)=t-\frac{\alpha+\beta}{2}$, donc $\theta'(\alpha)=-\frac{h}{2}$, $\theta'(\beta)=\frac{h}{2}$, et $\theta(\alpha)=\theta(\beta)=0$. Deux intégrations par parties donnent
$$\int_\alpha^\beta f=\int_\alpha^\beta\theta''f=\big[\theta' f\big]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta\theta' f'=h\,\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}-\big[\theta f'\big]_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta\theta f''=h\,\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}+\int_\alpha^\beta\theta f''.$$
Comme $\theta\leqslant 0$ sur $[\alpha\,,\beta]$, l'erreur commise sur cet intervalle est majorée par
$$M_2\int_\alpha^\beta|\theta(t)|\,\mathrm{d}t=M_2\int_\alpha^\beta\frac{(t-\alpha)(\beta-t)}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{M_2h^3}{12}.$$

▷ *Sommation.* On applique ce résultat aux n intervalles de la subdivision régulière, de longueur $h=\frac{b-a}{n}$, et l'on somme : l'erreur totale est au plus $n\,\frac{M_2h^3}{12}=\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$. □

Remarques :

- La formule obtenue sur un intervalle montre aussi que, si f est convexe, la méthode des trapèzes donne une valeur par excès : $f'' \geqslant 0$ et $\theta \leqslant 0$ rendent l'intégrale $\int \theta f''$ négative. C'est la position de la courbe sous ses cordes (chapitre 9, proposition 9).
- On admettra que la *méthode du point milieu*, qui prend $\xi_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$, a une erreur majorée par $\frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$: elle est du même ordre que celle des trapèzes, avec une constante deux fois plus petite.





Pour $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$, dont l'intégrale sur $[0\,,1]$ vaut $4\operatorname{Arctan} 1 = \pi$, les quatre rectangles verts débordent nettement de la courbe, qui est décroissante ; les quatre trapèzes violets en épousent la forme, et l'écart n'est plus visible à cette échelle.
Sur $[0\,,1]$, on a $\max|f'| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $\max|f''| = 8$: les propositions 13 et 14 majorent donc les erreurs par $\frac{1{,}3}{n}$ et par $\frac{2}{3n^2}$. Le tableau suivant, calculé en Python, compare les deux méthodes.

n	$R_n(f)$	$R_n(f) - \pi$	$T_n(f)$	$T_n(f) - \pi$
4	3,381 176 47	$2{,}4 \times 10^{-1}$	3,131 176 47	$-1{,}0 \times 10^{-2}$
10	3,239 925 99	$9{,}8 \times 10^{-2}$	3,139 925 99	$-1{,}7 \times 10^{-3}$
100	3,151 575 99	$1{,}0 \times 10^{-2}$	3,141 575 99	$-1{,}7 \times 10^{-5}$
1 000	3,142 592 49	$1{,}0 \times 10^{-3}$	3,141 592 49	$-1{,}7 \times 10^{-7}$

Multiplier n par 10 divise l'erreur des rectangles par 10, et celle des trapèzes par 100 : avec mille points, la première méthode donne trois décimales exactes de π, la seconde six. L'erreur réelle des trapèzes, voisine de $\frac{1}{6n^2}$, est quatre fois plus petite que la borne de la proposition 14, qui suppose le pire cas $|f''| = 8$ partout. Le chapitre 20 reprendra ces comparaisons entre sommes et intégrales pour étudier les séries.

18.7 Intégrales de Wallis et constante de la formule de Stirling

Le chapitre 10 a démontré la formule de Stirling à une constante près : la suite $u_n = \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+1/2}}$ converge vers un réel $C > 0$, c'est-à-dire $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, et l'égalité $C = \sqrt{2\pi}$ y était admise. Une famille d'intégrales, dont le calcul combine la positivité, l'intégration par parties et les équivalents, va fournir la valeur de C.

Proposition 15 : *(Intégrales de Wallis.)* Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t$.

(i) $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\,\mathrm{d}t$, et la suite (W_n) est strictement positive et décroissante.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad (n+2)\,W_{n+2} = (n+1)\,W_n$.

(iii) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\quad W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{4^p(p!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$ $\quad$ et $\quad W_{2p+1} = \dfrac{4^p(p!)^2}{(2p+1)!}$.

(iv) Pour tout $n \geqslant 1$, $\quad n\,W_n W_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.

(v) $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ quand n tend vers $+\infty$.

∘ Démonstration :

▷ *(i)* Le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$ (chapitre 6, proposition 5) transforme $\sin^n t$ en $\cos^n u$. La fonction $\sin^n$ est continue, positive et non nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: par le théorème 4, $W_n > 0$. Comme $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$ sur cet intervalle, $\sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t$, et la croissance de l'intégrale donne $W_{n+1} \leqslant W_n$.

▷ *(ii)* On intègre par parties $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t \sin t \, \mathrm{d}t$, en dérivant $\sin^{n+1}$ et en primitivant sin en $-\cos$:

$$W_{n+2} = \left[-\cos t \sin^{n+1} t \right]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^n t \, \mathrm{d}t = (n+1)(W_n - W_{n+2}),$$

puisque le crochet est nul et que $\cos^2 = 1 - \sin^2$. On regroupe les termes en W_{n+2}.

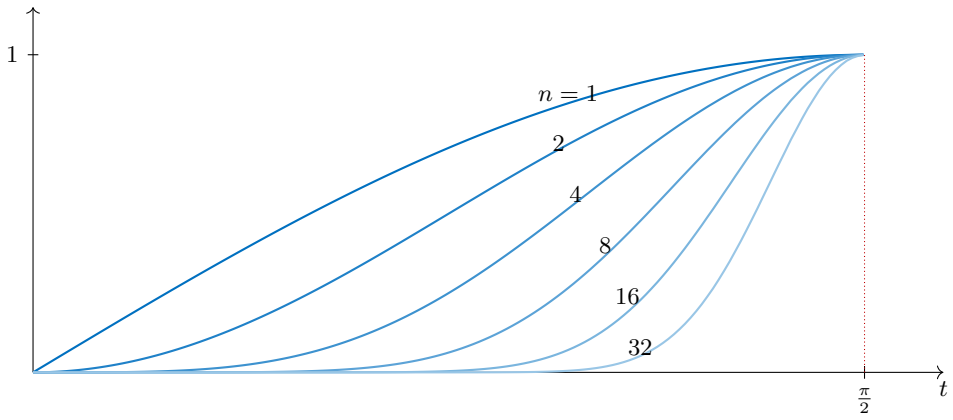
▷ *(iii)* Par récurrence sur p, à partir de $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$. Si la formule vaut pour W_{2p}, la relation (ii) donne $W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p}$, et l'on vérifie que $\frac{(2p+2)!}{4^{p+1}((p+1)!)^2} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{4(p+1)^2} \cdot \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2}$, avec $\frac{(2p+1)(2p+2)}{4(p+1)^2} = \frac{2p+1}{2p+2}$. Le cas impair est analogue, avec le facteur $\frac{2p+2}{2p+3}$.

▷ *(iv)* Posons $v_n = nW_nW_{n-1}$. La relation (ii), au rang $n-1$, s'écrit $(n+1)W_{n+1} = nW_{n-1}$; donc $v_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n = nW_{n-1}W_n = v_n$. La suite (v_n) est constante, égale à $v_1 = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$.

▷ *(v)* Par décroissance, $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$, et en divisant par $W_{n-1} > 0$,

$$\frac{n}{n+1} = \frac{W_{n+1}}{W_{n-1}} \leqslant \frac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1,$$

où l'on a utilisé (ii). Par encadrement, $\frac{W_n}{W_{n-1}}$ tend vers 1 : $W_{n-1} \sim W_n$. Avec (iv), $\frac{\pi}{2} = nW_nW_{n-1} \sim nW_n^2$, donc nW_n^2 tend vers $\frac{\pi}{2}$, et, par continuité de la racine carrée, $\sqrt{n}\, W_n$ tend vers $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. □



Les courbes de $t \mapsto \sin^n t$ pour $n = 1$, 2, 4, 8, 16 et 32 se concentrent près de $\frac{\pi}{2}$, où le sinus vaut 1 : l'aire W_n décroît, de 1 pour $n = 1$ à environ 0,22 pour $n = 32$, mais lentement, comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$, parce que la zone où $\sin^n t$ reste proche de 1 a une largeur de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exemple : Pour $n = 10$, la formule (iii) donne $W_{10} = \frac{10!}{4^5 (5!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{63\pi}{512} \approx 0{,}3866$, et l'équivalent $\sqrt{\frac{\pi}{20}} \approx 0{,}3963$; le rapport vaut 0,975, et 0,994 pour $n = 40$. On vérifie aussi $W_4 = \frac{3\pi}{16}$ et $W_5 = \frac{8}{15}$, d'où $5W_5W_4 = 5 \times \frac{8}{15} \times \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{2}$, comme l'annonce (iv).

Théorème 10 : Constante de la formule de Stirling :

La limite C de la suite $\left(\frac{n!\, \mathrm{e}^n}{n^{n+1/2}}\right)$ vaut $\sqrt{2\pi}$. Ainsi la formule de Stirling (chapitre 10, théorème 6) est entièrement démontrée :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n, \qquad \text{et} \qquad \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leqslant n! \leqslant \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{1/(12n)}.$$

∘ Démonstration : Le chapitre 10 a établi que $n! \sim C\sqrt{n}\,n^n\mathrm{e}^{-n}$, avec $C > 0$. Par les opérations sur les équivalents (chapitre 10, théorème 1), appliquées à $(2p)!$ et à $(p!)^2$,

$$\frac{(2p)!}{4^p(p!)^2} \sim \frac{C\sqrt{2p}\,(2p)^{2p}\mathrm{e}^{-2p}}{4^p\,C^2\,p\,p^{2p}\mathrm{e}^{-2p}} = \frac{\sqrt{2}}{C\sqrt{p}}, \qquad \text{d'où} \qquad W_{2p} \sim \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{C\sqrt{p}} = \frac{\pi}{C\sqrt{2p}},$$

par la proposition 15 (iii). D'autre part, la proposition 15 (v), avec $n = 2p$, donne $W_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$. Les deux suites $\left(\sqrt{p}\,W_{2p}\right)$ ont donc pour limites $\frac{\pi}{C\sqrt{2}}$ et $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, qui sont égales par unicité de la limite :

$$C = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} = \sqrt{2\pi}.$$

L'encadrement de l'énoncé est celui du chapitre 10, où la constante vaut maintenant $\sqrt{2\pi}$. □

Exemple : L'encadrement est très fin. Le rapport $n!/\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ vaut environ 1,0844 pour $n = 1$, 1,008 37 pour $n = 10$ et 1,000 834 pour $n = 100$, tandis que la borne $\mathrm{e}^{1/(12n)}$ vaut 1,0869, 1,008 37 et 1,000 834 : dès $n = 10$, la majoration du chapitre 10 est pratiquement une égalité, ce qui signifie que $\ln\left(n!\right) - \ln\left(\sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{\mathrm{e}})^n\right)$ est très proche de $\frac{1}{12n}$.

Remarques :

- Le chapitre 10 en avait tiré l'équivalent $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$. Il se lit aussi directement sur les intégrales de Wallis : par (iii) et (v), $\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} = \frac{2}{\pi}W_{2n} \sim \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Pour $n = 100$, le rapport des deux membres vaut déjà 0,9988 ; ce résultat servira en probabilités au chapitre 21.
- Le rapport $\frac{W_{2p+1}}{W_{2p}}$ tend vers 1, et la formule (iii) l'exprime comme $\frac{2}{\pi}\prod_{k=1}^{p}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$. On obtient la formule publiée par Wallis en 1656,

  $$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots,$$

  qui converge lentement : mille facteurs donnent 1,5704, pour $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}5708$.
- L'erreur la plus répandue, dans ce calcul, est de déduire l'équivalent de W_n de la seule relation $nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$: il faut d'abord savoir que $W_{n-1} \sim W_n$, ce que donne la décroissance, et donc la positivité de l'intégrale.

18.8 Bilan

Le chapitre a construit l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, en l'encadrant par des fonctions en escalier, puis en a tiré l'existence des primitives, qui fondait tout le chapitre 6.

Notion	Énoncé	Référence
approximation	$\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$ (Heine)	théorème 1
définition	$\sup\limits_{\varphi \leqslant f} I(\varphi) = \inf\limits_{\psi \geqslant f} I(\psi)$	théorème 2
propriétés	linéarité, croissance, Chasles, $\left\lvert \int f \right\rvert \leqslant \int \lvert f \rvert$	théorèmes 3 et 5
positivité stricte	f continue, $f \geqslant 0$, $\int f = 0 \Rightarrow f = 0$	théorème 4
valeur moyenne	$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$ si f continue	proposition 7
théorème fondamental	$\left(\int_a^x f\right)' = f(x)$ si f continue	théorème 6
Taylor	reste $\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$, majoration $M\frac{\lvert x-a\rvert^{n+1}}{(n+1)!}$	théorèmes 7 et 8
sommes de Riemann	$\frac{b-a}{n}\sum f(x_k) \to \int_a^b f$, erreur $O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$	théorème 9, propositions 13 et 14
Wallis, Stirling	$nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$	proposition 15, théorème 10

Trois idées sont à retenir. L'intégrale est une aire, définie par un encadrement, et non une différence de valeurs d'une primitive : c'est le théorème fondamental qui relie les deux points de vue, et il suppose la continuité. La positivité de l'intégrale est l'outil de toutes les majorations, de l'inégalité de Taylor-Lagrange aux erreurs des méthodes numériques. Enfin, une majoration explicite d'un reste vaut mieux qu'un équivalent pour calculer : c'est elle qui a donné l'irrationalité de e et les décimales de π. Le chapitre 19 utilisera le théorème 4 pour faire de $(f,g) \mapsto \int_a^b fg$ un produit scalaire sur les fonctions continues, et le chapitre 20 comparera sommes et intégrales pour étudier les séries numériques, en particulier la série harmonique et la constante d'Euler.