Chapitre 20

Séries numériques et familles sommables

20.1 Introduction historique

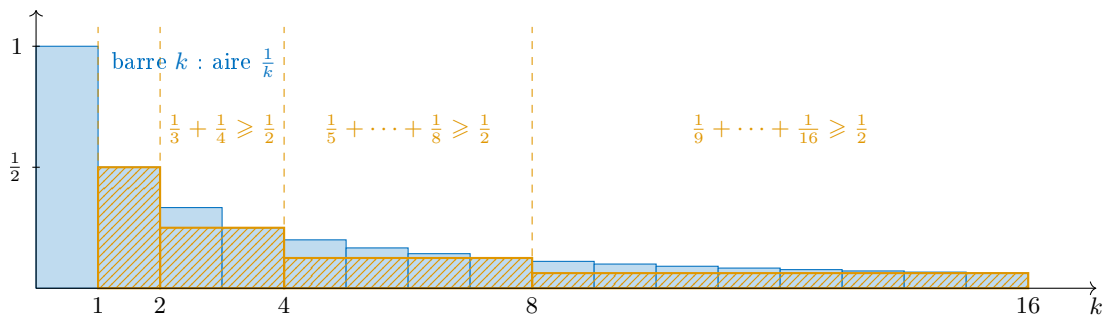
> *Si, pour des valeurs de n, toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite convergente, et la limite en question s'appellera la somme de la série. Au contraire, si, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera divergente, et n'aura plus de somme.*
>
> Augustin-Louis Cauchy - *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*, Paris, 1821

20.1.1 Une somme qui dépasse tout nombre

Vers 1350, **Nicole Oresme** établit que la somme $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ finit par dépasser tout nombre donné, bien que ses termes deviennent aussi petits que l'on veut. Son argument tient en une ligne : on regroupe les termes en paquets $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, puis $\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}$, puis $\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}$, et chaque paquet, formé de 2^{p-1} termes au moins égaux à $\frac{1}{2^p}$, vaut au moins $\frac{1}{2}$. Trois siècles plus tard, **Pietro Mengoli** demande en 1650 la valeur de $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots$; **Leonhard Euler** trouve $\frac{\pi^2}{6}$ en 1734 et, la même année, isole la constante $\gamma \approx 0{,}5772$ qui mesure l'écart entre $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ et $\ln n$. Dès 1676, **Leibniz** savait qu'une somme dont les termes alternent de signe et décroissent vers 0 a une valeur.

20.1.2 L'ordre des termes compte-t-il ?

Le XVIII^e^ siècle calcule avec ces sommes comme avec des sommes finies. En 1821, **Cauchy** pose la définition de l'épigraphe : une série est la suite de ses sommes partielles, et sa somme, quand elle existe, en est la limite. Cette définition dépend de l'ordre des termes, et ce n'est pas un détail : **Dirichlet** observe en 1837 que l'ordre est indifférent quand la série des valeurs absolues converge, et **Riemann** montre, dans son mémoire d'habilitation de 1854, qu'en réordonnant les termes de $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots$ on peut obtenir n'importe quelle somme. Le chapitre suit ce chemin : il étudie les séries (sections 20.2 à 20.5), puis les familles sommables (20.6 et 20.7), que l'on somme « en vrac », dans un ordre quelconque, comme Oresme regroupait ses paquets. La figure reprend son argument : les barres bleues ont pour aires les termes $\frac{1}{k}$, et chaque rectangle orange hachuré, d'aire $\frac{1}{2}$, est contenu dans un paquet de barres.



20.2 Séries numériques : généralités

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le chapitre 7 a étudié des suites définies par une somme, comme $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)$ ou $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$; une série n'est rien d'autre qu'une telle suite, regardée à travers ses termes. Tout ce chapitre consiste à lire sur les termes u_k, souvent simples, des propriétés de la suite des sommes, qui ne l'est pas.

20.2.1 Convergence, divergence, somme

Définition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, la **somme partielle** d'indice n est

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La **série de terme général** u_n, notée $\sum u_n$ ou $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que la série **converge** si la suite (S_n) converge, et que la série **diverge** sinon. En cas de convergence, la limite de (S_n) est la **somme** de la série, notée

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Déterminer la **nature** d'une série, c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge.

Si la suite n'est définie qu'à partir d'un rang n_0, on pose $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ pour $n \geqslant n_0$, et l'on note $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ la série et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ sa somme. Modifier un nombre fini de termes ajoute aux sommes partielles une constante à partir d'un certain rang : la nature de la série ne change pas, mais sa somme change.

Remarques :

- Les deux notations ne désignent pas le même objet. Le symbole $\sum u_n$ désigne une suite, dont on peut toujours parler ; le symbole $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne un nombre, qui n'existe que si la série converge. L'erreur la plus répandue est d'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ dans un calcul avant d'avoir établi la convergence : le calcul n'a alors aucun sens, et il peut conduire à des absurdités, comme on le verra avec la série $\sum(-1)^n$.
- L'indice de sommation est muet : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. En revanche, il ne faut jamais écrire $\sum_{k=0}^{n} u_n$, qui vaut $(n+1)u_n$.

Proposition 1 : *(Linéarité.)* Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries, et λ, $\mu \in \mathbb{K}$.

(i) Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

(ii) Si $\sum u_n$ converge et si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

(iii) Une série complexe $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries réelles $\sum \mathrm{Re}\, u_n$ et $\sum \mathrm{Im}\, u_n$ convergent, et alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}\, u_n + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}\, u_n$.

∘ Démonstration : (i) La somme partielle de $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est $\lambda S_n + \mu S'_n$, par linéarité des sommes finies (chapitre 3, proposition 1), et l'on applique les opérations sur les limites (chapitre 7, théorème 4). (ii) Si $\sum(u_n + v_n)$ convergeait, $\sum v_n = \sum\big((u_n + v_n) - u_n\big)$ convergerait par (i). (iii) Les sommes partielles de $\sum \mathrm{Re}\, u_n$ et $\sum \mathrm{Im}\, u_n$ sont $\mathrm{Re}\, S_n$ et $\mathrm{Im}\, S_n$, et l'on applique la proposition 14 du chapitre 7. □

La somme de deux séries divergentes peut converger : $\sum 1$ et $\sum(-1)$ divergent, leur somme $\sum 0$ converge. Il n'y a donc rien à dire en général dans ce cas, et c'est une source d'erreurs fréquente.

Proposition 2 : *(Condition nécessaire de convergence.)* Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

∘ Démonstration : Pour $n \geqslant 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. Si (S_n) tend vers S, la suite extraite (S_{n-1}) aussi (chapitre 7, proposition 11), et u_n tend vers $S - S = 0$. □

Définition : Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est dite **grossièrement divergente**.

Exemples :

- La série $\sum(-1)^n$ diverge grossièrement : $|(-1)^n| = 1$. Ses sommes partielles valent alternativement 1 et 0. Le calcul « $S = 1 - 1 + 1 - \cdots = 1 - S$, donc $S = \frac{1}{2}$ » manipule un nombre S qui n'existe pas.
- La série $\sum n \sin\frac{1}{n}$ diverge grossièrement, puisque $n\sin\frac{1}{n} \to 1$ (chapitre 10, $\sin x \sim x$ en 0).
- La réciproque de la proposition 2 est fausse, et c'est le point essentiel. La **série harmonique** $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ a un terme général qui tend vers 0, mais elle diverge : le chapitre 7 a établi que $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$, par l'argument d'Oresme de l'introduction. La divergence est d'une lenteur extrême : il faut $n = 12\,367$ termes pour que H_n dépasse 10.

20.2.2 Restes et lien entre suites et séries

Proposition 3 : *(Reste d'une série convergente.)* Si la série $\sum u_n$ converge, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ la série $\sum_{k\geqslant n+1} u_k$ converge ; sa somme $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est le **reste** d'indice n, et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S_n + R_n, \qquad \lim_{n\to+\infty} R_n = 0.$$

∘ Démonstration : Pour $N > n$, la relation de Chasles donne $\sum_{k=n+1}^{N} u_k = S_N - S_n$, qui tend vers $S - S_n$ quand N tend vers $+\infty$. Ainsi R_n existe et vaut $S - S_n$, qui tend vers 0. □

Le reste mesure l'erreur commise en remplaçant la somme par une somme partielle : majorer $|R_n|$, c'est savoir combien de termes calculer. Le chapitre 18 l'a fait pour e, avec $0 \leqslant R_n \leqslant \frac{3}{(n+1)!}$.

Proposition 4 : *(Lien entre suites et séries.)* Une suite (a_n) converge si et seulement si la série $\sum(a_{n+1} - a_n)$ converge, et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n - a_0.$$

∘ Démonstration : La somme partielle d'indice n est télescopique (chapitre 3, proposition 3) : elle vaut $a_{n+1} - a_0$. Elle converge si et seulement si (a_{n+1}) converge, c'est-à-dire si et seulement si (a_n) converge. □

Toute suite est donc une série, celle de ses accroissements, et toute série est une suite, celle de ses sommes partielles. Les deux points de vue sont équivalents, mais ils ne donnent pas les mêmes outils : une série se prête aux comparaisons terme à terme, une suite aux théorèmes de monotonie du chapitre 7.

Exemples :

- Pour $k \geqslant 1$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, donc $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$, et

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

C'est la décomposition en éléments simples du chapitre 13 qui fait apparaître le télescopage.

- La série $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge, bien que son terme général tende vers 0 : c'est la série des accroissements de la suite $(\ln n)$, qui tend vers $+\infty$. Sa somme partielle d'indice n vaut exactement $\ln(n+1)$.

20.2.3 Séries géométriques

Théorème 1 : Séries géométriques :
Soit $z\in\mathbb{C}$. La série $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z|<1$, et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \text{et} \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} z^k = \frac{z^{n+1}}{1-z}.$$

∘ Démonstration : Si $|z|\geqslant 1$, alors $|z^n|=|z|^n\geqslant 1$: la série diverge grossièrement. Si $|z|<1$, alors $z\neq 1$ et la somme géométrique du chapitre 3 (proposition 4), qui vaut pour un complexe comme au chapitre 4, donne

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}-\frac{z^{n+1}}{1-z}.$$

Comme $|z^{n+1}|=|z|^{n+1}$ tend vers 0 (chapitre 7, proposition 9), S_n tend vers $\frac{1}{1-z}$, et le reste vaut $\frac{1}{1-z}-S_n=\frac{z^{n+1}}{1-z}$. □

Exemples :

- Avec $z=\frac{1}{10}$, $0{,}999\ldots=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{9}{10^k}=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{1-1/10}=1$: le développement décimal illimité $0{,}999\ldots$ est une série, et sa somme vaut exactement 1.
- Archimède évaluait l'aire d'un segment de parabole en lui inscrivant des triangles dont les aires forment une progression de raison $\frac{1}{4}$ (introduction du chapitre 18) ; le théorème 1 donne le rapport des aires :

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{1-1/4}=\frac{4}{3}.$$

- Pour $r\in[0\,,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$, la série $\sum r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ est géométrique de raison $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, de module $r<1$. En prenant la partie réelle de sa somme (proposition 1 (iii)),

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n\cos(n\theta)=\mathrm{Re}\,\frac{1}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

  Pour $r=\frac{1}{2}$ et $\theta=\frac{\pi}{3}$, on trouve 1 : la somme d'une série de cosinus est calculée sans trigonométrie, comme le chapitre 4 calculait les sommes finies de cosinus.

Remarque : La série géométrique est l'étalon auquel on compare les autres. Sa convergence est très rapide, puisque le reste décroît comme $|z|^n$; la série harmonique, à l'inverse, diverge alors que ses termes tendent vers 0. Les sections suivantes situent les séries entre ces deux extrêmes.

20.2.4 La série exponentielle

Théorème 2 : Série exponentielle :
Pour tout $z\in\mathbb{C}$, la série $\sum\frac{z^n}{n!}$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\mathrm{e}^z, \qquad \text{avec} \qquad \left|\mathrm{e}^z-\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right|\leqslant \mathrm{e}^{|z|}\,\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

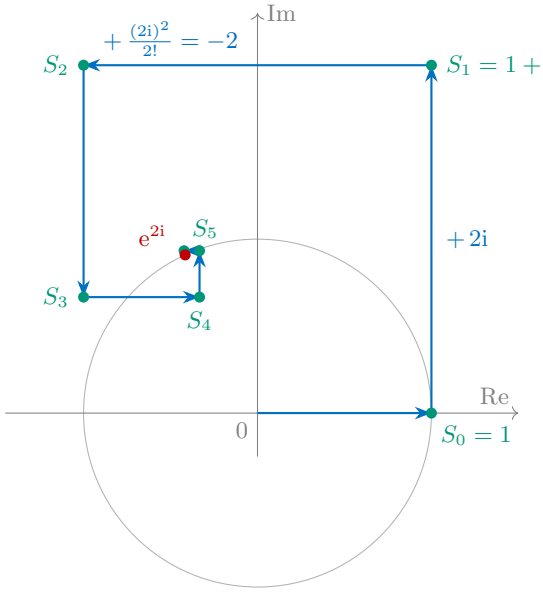
◦ Démonstration : Le chapitre 18 l'a établi pour z réel (proposition 11). Pour z complexe, on considère $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{tz}$ sur $[0\,,1]$, à valeurs complexes. D'après le chapitre 5 (proposition 11 (ii)), φ est dérivable de dérivée $t \mapsto z\,\mathrm{e}^{tz}$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $\varphi^{(k)}(t) = z^k \mathrm{e}^{tz}$ par récurrence. Pour $t \in [0\,,1]$,

$$\left|\varphi^{(n+1)}(t)\right| = |z|^{n+1}\left|\mathrm{e}^{tz}\right| = |z|^{n+1}\,\mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}\,z} \leqslant |z|^{n+1}\,\mathrm{e}^{|z|},$$

puisque $|\mathrm{e}^w| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,w}$ (chapitre 4, proposition 23) et $t\,\mathrm{Re}\,z \leqslant |z|$. L'inégalité de Taylor-Lagrange (chapitre 18, théorème 8), qui vaut pour les fonctions à valeurs complexes, appliquée entre 0 et 1, donne

$$\left|\varphi(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\right| = \left|\mathrm{e}^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \mathrm{e}^{|z|}\,\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!},$$

et le majorant tend vers 0 par croissances comparées (chapitre 7, théorème 7). □



Pour $z = 2\mathrm{i}$, chaque terme $\frac{(2\mathrm{i})^k}{k!}$, en bleu, est tourné d'un quart de tour par rapport au précédent : les sommes partielles, en vert, s'enroulent en spirale autour de $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}} = \cos 2 + \mathrm{i}\sin 2$, en rouge sur le cercle unité. Les premiers termes grandissent, puisque $|z| > 1$, puis la factorielle l'emporte : S_8 est déjà à 0,0014 de la somme, pour une majoration de 0,0104 donnée par le théorème 2.

Remarques :

- En prenant les parties réelle et imaginaire pour $z = \mathrm{i}x$, on retrouve les développements de $\cos x$ et $\sin x$ du chapitre 18, puisque $\mathrm{i}^{2k} = (-1)^k$.
- Le théorème 2 fournit une autre définition de l'exponentielle complexe, par une formule qui ne fait intervenir ni l'exponentielle réelle ni la trigonométrie. La relation $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$, qui fondait la définition du chapitre 4, se démontrera alors directement sur les séries, à la section 20.7, par le produit de Cauchy.

20.3 Séries à termes positifs

Une série $\sum u_n$ est **à termes positifs** si $u_n \geqslant 0$ pour tout n. Ses sommes partielles forment alors une suite croissante, puisque $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$, et le théorème de la limite monotone du chapitre 7 ramène la convergence à une question de majoration. Toute la section repose sur cette remarque.

Proposition 5 : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Elle converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée, et alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n, \qquad \text{et} \qquad S_n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \ \text{ pour tout } n.$$

Sinon, S_n tend vers $+\infty$, et l'on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

∘ Démonstration : La suite (S_n) est croissante. Si elle est majorée, elle converge vers sa borne supérieure ; sinon, elle tend vers $+\infty$ (chapitre 7, théorème 8). Une suite convergente étant bornée (chapitre 7, proposition 7), la condition est nécessaire. □

L'hypothèse de positivité est indispensable : les sommes partielles de $\sum(-1)^n$ sont bornées, et la série diverge. L'erreur la plus répandue est d'oublier de vérifier le signe avant d'appliquer la proposition 5 ou les théorèmes de comparaison qui en découlent.

Exemple : (Inégalité de Bessel, promise au chapitre 19.) Soit E un espace préhilbertien réel, $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de vecteurs telle que $(e_0,\dots,e_n)$ soit orthonormée pour tout n, et $x \in E$. L'inégalité de Bessel (chapitre 19, proposition 10 (iv)), appliquée au sous-espace $\mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_n)$, donne

$$\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \qquad \text{pour tout } n.$$

La série à termes positifs $\sum\langle x, e_k\rangle^2$ a donc des sommes partielles majorées : elle converge, et $\sum_{k=0}^{+\infty}\langle x, e_k\rangle^2 \leqslant \|x\|^2$. En particulier, $\langle x, e_k\rangle$ tend vers 0 (proposition 2) : les coordonnées de x sur une famille orthonormée infinie sont de plus en plus petites.

Appliquons-le dans $\mathcal{C}([0\,,2\pi],\mathbb{R})$ muni de $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} fg$, à la famille trigonométrique de la section 19.4, normalisée et rangée en suite : $e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, puis $e_{2k-1} = \frac{\cos(k\,\cdot)}{\sqrt{\pi}}$ et $e_{2k} = \frac{\sin(k\,\cdot)}{\sqrt{\pi}}$ pour $k \geqslant 1$. Pour $f(t) = t$, une intégration par parties donne

$$\int_0^{2\pi} t\cos(kt)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^{2\pi} t\sin(kt)\,\mathrm{d}t = -\frac{2\pi}{k}, \qquad \text{d'où}$$

$$\|f\|^2 = \frac{8\pi^3}{3}, \qquad \langle f, e_0\rangle^2 = 2\pi^3, \qquad \langle f, e_{2k-1}\rangle = 0, \qquad \langle f, e_{2k}\rangle^2 = \frac{4\pi}{k^2}.$$

L'inégalité de Bessel, avec $2n$ à la place de n, s'écrit $2\pi^3 + 4\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{8\pi^3}{3}$, soit

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{pour tout } n.$$

La proposition 8 montrera que la somme vaut exactement $\frac{\pi^2}{6}$: pour cette fonction, l'inégalité de Bessel est une égalité. Que ce soit le cas pour toute fonction continue est l'égalité de Parseval, qui ouvre la théorie des séries de Fourier en seconde année.

20.3.1 Comparaison

Théorème 3 : Comparaison des séries à termes positifs :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

(i) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge. Si l'inégalité vaut pour tout n, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

(ii) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

(iii) Plus généralement, si $u_n \geqslant 0$, $v_n \geqslant 0$, $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

∘ Démonstration : (i) Soit N un rang à partir duquel $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Pour $n \geqslant N$,

$$\sum_{k=N}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=N}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=N}^{+\infty} v_k,$$

la seconde inégalité venant de la proposition 5 appliquée à $\sum_{k\geqslant N} v_k$. Les sommes partielles de $\sum_{k\geqslant N} u_k$ sont majorées : cette série converge, et $\sum u_n$ aussi, puisqu'elle n'en diffère que par un nombre fini de termes. Si $N = 0$, on passe à la limite dans $S_n(u) \leqslant S_n(v)$ (chapitre 7, théorème 5). (ii) C'est la contraposée de (i). (iii) Il existe $M \geqslant 0$ tel que $u_n \leqslant Mv_n$ à partir d'un certain rang ; la série $\sum Mv_n$ converge (proposition 1), et l'on applique (i). □

Théorème 4 : Comparaison par équivalents :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \sim v_n$ et $v_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

∘ Démonstration : On écrit $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ (chapitre 10). À partir d'un certain rang, $|\varepsilon_n| \leqslant \frac{1}{2}$ et $v_n \geqslant 0$, donc

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\, v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}\, v_n.$$

Si $\sum v_n$ converge, la seconde inégalité et le théorème 3 donnent la convergence de $\sum u_n$; si $\sum u_n$ converge, la première donne celle de $\sum \frac{1}{2} v_n$, donc de $\sum v_n$. □

Exemples :

- Pour $n \geqslant 2$, $0 \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, et la série télescopique $\sum_{n\geqslant 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$ converge (proposition 4) : la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. C'est l'argument de l'exercice 19 de la feuille du chapitre 1, où l'on montrait $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.
- On a $1 - \cos\frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$, terme positif : la série $\sum \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ converge. En revanche $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, et $\sum \sin\frac{1}{n}$ diverge, comme la série harmonique.
- Le terme $u_n = \sqrt[n]{n} - 1 = \mathrm{e}^{\ln(n)/n} - 1$ est équivalent à $\frac{\ln n}{n}$, puisque $\frac{\ln n}{n}$ tend vers 0 et que $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$ en 0. Pour $n \geqslant 3$, $\frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$: la série $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge par comparaison avec la série harmonique, et $\sum(\sqrt[n]{n} - 1)$ aussi, par le théorème 4.

Remarques :

- Le théorème 4 exige un signe constant à partir d'un certain rang. Pour des séries de signe variable, deux termes généraux équivalents peuvent donner des séries de natures différentes : un exemple sera donné à la section 20.5. Ce n'est pas un détail technique, c'est le piège principal du chapitre.
- La comparaison ne donne que la nature. Deux séries convergentes à termes équivalents n'ont aucune raison d'avoir la même somme : $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, mais $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, alors que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}645$.

20.3.2 Comparaison entre une série et une intégrale

Proposition 6 : *(Méthode des rectangles.)* Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0\,, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante.

(i) Pour tout entier $k \geqslant n_0 + 1$, $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$

(ii) Pour tout entier $n \geqslant n_0$,

$$\int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(iii) Si de plus f est positive, la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_{n_0}^{n} f\right)_{n\geqslant n_0}$ est majorée, et la suite de terme général

$$w_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) - \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est décroissante et converge vers un réel de $[0\,, f(n_0)]$.

∘ Démonstration :

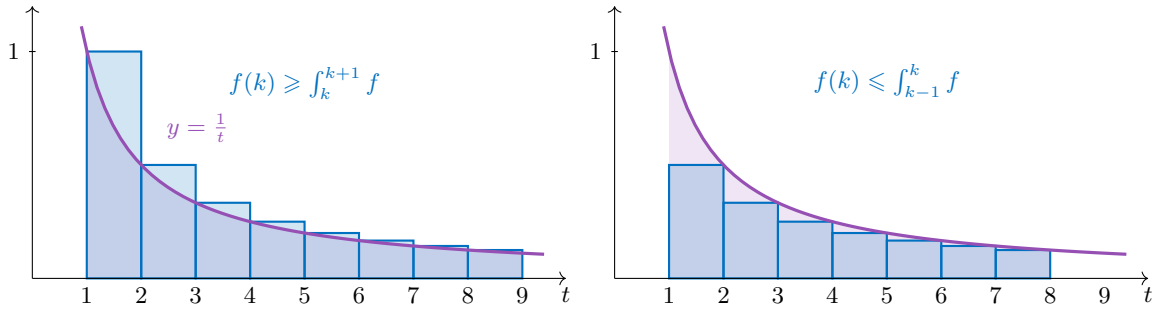
▷ *(i)* Pour $t \in [k\,,k+1]$, la décroissance donne $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$. En intégrant sur ce segment de longueur 1 (chapitre 18, théorème 3), $f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f \leqslant f(k)$. La première inégalité, écrite au rang $k-1$, donne $f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f$.

▷ *(ii)* On somme l'inégalité de gauche de (i) pour k allant de n_0 à n (elle vaut aussi pour $k = n_0$, d'après la démonstration) et celle de droite pour k allant de n_0+1 à n, puis on applique la relation de Chasles.

▷ *(iii)* Si $f \geqslant 0$, la suite $F_n = \int_{n_0}^{n} f$ est croissante. Si elle est majorée par M, les sommes partielles sont majorées par $f(n_0) + M$ d'après (ii) ; réciproquement, $F_n \leqslant F_{n+1} \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$, et l'on conclut par la proposition 5. Pour la suite (w_n), on a $w_{n+1} - w_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f \leqslant 0$ par (i), et, par (ii),

$$w_n \geqslant \int_{n_0}^{n+1} f - \int_{n_0}^{n} f = \int_{n}^{n+1} f \geqslant 0.$$

La suite (w_n), décroissante et minorée par 0, converge vers un réel compris entre 0 et $w_{n_0} = f(n_0)$. □



Pour $f(t) = \frac{1}{t}$, les rectangles bleus, posés sur les segments entiers et de hauteur $\frac{1}{k}$, débordent de l'aire violette sous la courbe à gauche et y sont contenus à droite. On y lit l'encadrement $\ln 9 \leqslant H_8 \leqslant 1 + \ln 8$, soit $2{,}197 \leqslant 2{,}718 \leqslant 3{,}079$: la somme et l'intégrale diffèrent de moins de $f(1) = 1$, quel que soit le nombre de termes. Chaque rectangle traduit l'encadrement $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$ que le chapitre 9 avait tiré des accroissements finis.

Remarque : Pour une fonction f continue et *croissante*, toutes les inégalités sont renversées : $\int_{k-1}^{k} f \leqslant f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f$. Avec $f = \ln$ sur $[1\,,+\infty[$, en sommant pour k de 2 à n puis de 1 à n, on obtient

$$n\ln n - n + 1 = \int_1^n \ln t\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_1^{n+1} \ln t\,\mathrm{d}t = (n+1)\ln(n+1) - n,$$

ce qui donne $\ln(n!) \sim n\ln n$ par encadrement (chapitre 10, proposition 6). Pour $n = 10$, on lit $14{,}03 \leqslant 15{,}10 \leqslant 16{,}38$. La formule de Stirling (chapitre 10, théorème 6) est beaucoup plus précise ; sa démonstration revenait d'ailleurs à étudier la série télescopique $\sum \ln \frac{u_n}{u_{n+1}}$, dont le terme général était encadré entre 0 et $\frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$.

20.3.3 Séries de Riemann

Théorème 5 : Séries de Riemann :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. De plus :

- si $0 < \alpha < 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ et, si $\alpha = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$;
- si $\alpha > 1$, le reste vérifie $\displaystyle\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$, donc $\displaystyle R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

∘ Démonstration :

▷ *Nature.* Si $\alpha \leqslant 0$, $\frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha} \geqslant 1$: la série diverge grossièrement. Si $\alpha > 0$, la fonction $f : t \mapsto t^{-\alpha}$ est continue, décroissante et positive sur $[1\,,+\infty[$, et

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \text{ si } \alpha \neq 1, \qquad \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln n.$$

Cette suite est majorée (par $\frac{1}{\alpha-1}$) si $\alpha > 1$, et tend vers $+\infty$ si $\alpha \leqslant 1$. La proposition 6 (iii) conclut.

▷ *Sommes partielles.* Si $0 < \alpha \leqslant 1$, la proposition 6 (ii) encadre $\sum_{k=1}^n k^{-\alpha}$ entre $\int_1^{n+1} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $1 + \int_1^n t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$. Les deux bornes sont équivalentes à $\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$, puisque $(n+1)^{1-\alpha} \sim n^{1-\alpha}$, et à $\ln n$ si $\alpha = 1$, puisque $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \ln n$. On conclut par encadrement (chapitre 10, proposition 6).

▷ *Restes.* Si $\alpha > 1$ et $N > n$, on somme l'encadrement (i) de la proposition 6 pour k allant de $n+1$ à N :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha}-(N+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{n^{1-\alpha}-N^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Comme $1-\alpha < 0$, les termes en N tendent vers 0 quand N tend vers $+\infty$, et le passage à la limite donne l'encadrement de R_n, dont les deux bornes sont équivalentes. □

Exemples :

- Pour $\alpha = 2$, on obtient $\frac{1}{n+1} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n}$. Pour $n = 10$, la somme partielle vaut 1,5498 et le reste 0,0952, bien compris entre 0,0909 et 0,1 : dix termes ne donnent qu'une décimale exacte de $\frac{\pi^2}{6}$, et il en faudrait plus d'un million pour six décimales. Les séries de Riemann convergent lentement, à l'opposé des séries géométriques et exponentielles.
- Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$: c'est le résultat de l'exercice 19 (b) de la feuille du chapitre 7, obtenu là par des suites adjacentes, et que la comparaison avec $\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n} - 2$ rend naturel. Pour $n = 10^4$, la somme vaut 198,54, pour $2\sqrt{n} = 200$; la proposition 6 (iii) montre de plus que l'écart converge, et l'exercice cité l'évaluait à environ $-1{,}46$.
- La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}$ diverge, bien que $\frac{1}{n\ln n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$: la fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$ est continue, positive et décroissante sur $[2\,,+\infty[$, de primitive $\ln(\ln t)$, et $\int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \ln\ln n - \ln\ln 2$ tend vers $+\infty$. La divergence est presque invisible : la somme des termes jusqu'à $n = 10^6$ ne vaut que 3,42. Il n'existe pas de « plus petite » série divergente, et les séries de Riemann ne suffisent pas à tout trancher.

20.3.4 Série harmonique et constante d'Euler

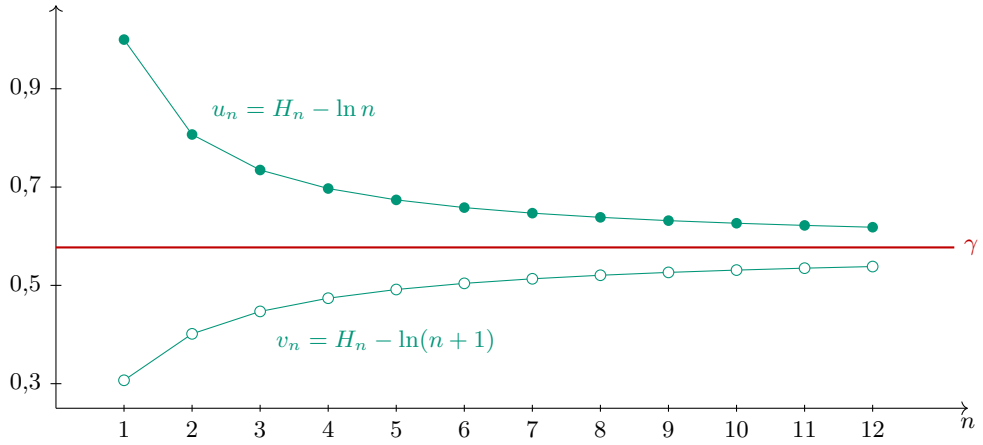
Proposition 7 : *(Constante d'Euler.)* Les suites définies pour $n \geqslant 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

sont adjacentes. Leur limite commune, notée γ et appelée **constante d'Euler**, vérifie $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$ pour tout n, et

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1), \qquad \gamma \approx 0{,}5772.$$

∘ Démonstration : La suite (u_n) est la suite (w_n) de la proposition 6 (iii) pour $f(t) = \frac{1}{t}$ et $n_0 = 1$: elle est décroissante. On a $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \geqslant 0$, puisque $\ln(1+x) \leqslant x$ (chapitre 5) : (v_n) est croissante. Enfin $u_n - v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ tend vers 0. Le théorème des suites adjacentes (chapitre 7, théorème 9) conclut, et $u_n - \gamma$ tend vers 0. □



Les points pleins u_n décroissent et les points creux v_n croissent, de part et d'autre de la droite rouge $y = \gamma$; l'écart $u_n - v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ se lit comme la hauteur entre deux points de même abscisse. Avec $n = 10$, on obtient déjà $0{,}5311 \leqslant \gamma \leqslant 0{,}6264$.

Remarques :

- C'est l'exercice 21 de la feuille du chapitre 7, et la promesse du chapitre 18 : la comparaison avec $\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t}$ explique pourquoi l'écart entre la somme et le logarithme converge. L'approximation $H_n \approx \ln n + \gamma$ est remarquablement précise : pour $n = 1\,000$, $H_n \approx 7{,}48547$ et $\ln n + \gamma \approx 7{,}48497$. L'écart, voisin de $0{,}0005 = \frac{1}{2n}$, suggère le terme suivant du développement asymptotique, $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, que l'on peut obtenir en appliquant les mêmes idées à la suite $(u_n - \gamma)$.
- Le développement donne aussi la limite de $H_{2n} - H_n = \ln(2n) - \ln n + o(1) = \ln 2 + o(1)$, c'est-à-dire la limite des suites adjacentes de l'exercice 19 (a) de la feuille du chapitre 7, que l'exercice 21 de la même feuille identifiait déjà. On ignore encore aujourd'hui si γ est un nombre rationnel.

20.3.5 Le problème de Bâle

Proposition 8 : *(Euler.)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, et $\displaystyle 0 \leqslant \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{4(n+1)}$.

∘ Démonstration : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t$ et $b_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t$. Par le changement de variable $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$, a_n est l'intégrale de Wallis W_{2n} du chapitre 18 : $a_n > 0$ et $a_n = \frac{2n-1}{2n} a_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$ (proposition 15 de ce chapitre).

▷ *Une relation de récurrence.* Soit $n \geqslant 1$. Une intégration par parties, où l'on dérive $\cos^{2n}$ et primitive 1 en t, donne $a_n = 2n \int_0^{\pi/2} t \sin t \cos^{2n-1} t \,\mathrm{d}t$, le crochet étant nul. Une seconde, où l'on primitive t en $\frac{t^2}{2}$ et dérive $\sin t \cos^{2n-1} t$ en $\cos^{2n} t - (2n-1)\sin^2 t \cos^{2n-2} t = 2n\cos^{2n} t - (2n-1)\cos^{2n-2} t$, donne, le crochet étant encore nul,

$$a_n = -n \int_0^{\pi/2} t^2 \left(2n \cos^{2n} t - (2n-1)\cos^{2n-2} t\right) \mathrm{d}t = n(2n-1)\, b_{n-1} - 2n^2\, b_n.$$

On divise par $n^2 a_n$, et l'on remplace $\frac{2n-1}{n\, a_n}$ par $\frac{2}{a_{n-1}}$ grâce à la relation de Wallis :

$$\frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} - \frac{b_n}{a_n}\right).$$

▷ *Télescopage.* En sommant pour k de 1 à n, et comme $b_0 = \frac{\pi^3}{24}$ et $a_0 = \frac{\pi}{2}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 2\left(\frac{b_0}{a_0} - \frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{2b_n}{a_n}.$$

▷ *Le reste tend vers* 0. La fonction sin est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc au-dessus de sa corde (chapitre 9, théorème 11 et proposition 9) : $\sin t \geqslant \frac{2t}{\pi}$, soit $t^2 \leqslant \frac{\pi^2}{4}\sin^2 t = \frac{\pi^2}{4}(1-\cos^2 t)$. En multipliant par $\cos^{2n} t \geqslant 0$ et en intégrant,

$$0 \leqslant b_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(a_n - a_{n+1}) = \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{a_n}{2n+2}, \qquad \text{donc} \qquad 0 \leqslant \frac{2b_n}{a_n} \leqslant \frac{\pi^2}{4(n+1)},$$

qui tend vers 0. On obtient la somme et la majoration du reste. □

Remarques :

- C'est la démonstration de l'exercice 47 de la feuille du chapitre 18, et elle tient les promesses des chapitres 1 et 7, où l'on avait seulement montré que les sommes $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ croissent et restent majorées par 2. Pour $n = 10$, le reste vaut exactement $\frac{2b_{10}}{a_{10}} \approx 0{,}0952$.
- L'inégalité de Bessel avait donné $\sum\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{6}$; la proposition 8 montre l'égalité, ce qui signifie que la fonction $t \mapsto t$ est entièrement « vue » par la famille trigonométrique. On sait de même calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. En revanche, aucune expression de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3} \approx 1{,}2021$ à l'aide de π n'est connue.

♡ **Méthode : Étudier la nature d'une série à termes positifs :**

- ▶ On vérifie d'abord que le terme général tend vers 0 ; sinon, la série diverge grossièrement et l'étude est finie.
- ▶ On cherche un équivalent simple du terme général, à l'aide des développements limités du chapitre 10, de la forme $\frac{C}{n^\alpha}$ ou Cq^n, et l'on conclut par le théorème 4 avec les séries de Riemann ou géométriques.
- ▶ Si aucun équivalent simple n'apparaît, on compare : si $n^\alpha u_n \to 0$ pour un $\alpha > 1$, alors $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et la série converge ; si $nu_n \to +\infty$, alors $u_n \geqslant \frac{1}{n}$ à partir d'un certain rang et la série diverge.
- ▶ Si $u_n = f(n)$ pour une fonction f monotone dont on sait calculer les intégrales, on compare la série à l'intégrale (proposition 6).

Exemple : Pour $u_n = n^2\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$, on ne dispose d'aucun équivalent plus simple. Mais

$$n^4\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = (\sqrt{n})^8\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par croissances comparées (chapitre 10, proposition 2) et substitution de $\sqrt{n}$, qui tend vers $+\infty$. Ainsi $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et la série converge. Sa somme vaut environ 240,0 ; la convergence est d'abord trompeuse, puisque u_n croît jusqu'à $n = 16$, où il vaut environ 4,69, avant que l'exponentielle ne l'emporte.

20.4 Séries absolument convergentes

Les théorèmes de comparaison ne s'appliquent qu'aux séries à termes positifs. Pour une série de signe quelconque, ou complexe, on les applique à la série des modules : c'est l'idée de la convergence absolue, qui ramène l'essentiel de l'étude à la section précédente.

Définition : Une série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est **absolument convergente** si la série à termes positifs $\sum|u_n|$ converge.

Pour un réel x, on note $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = \max(-x, 0)$ ses **parties positive et négative**. Ce sont deux réels positifs, et

$$x = x^+ - x^-, \qquad |x| = x^+ + x^-, \qquad 0 \leqslant x^+ \leqslant |x|, \qquad 0 \leqslant x^- \leqslant |x|.$$

Par exemple, $3^+ = 3$ et $3^- = 0$, tandis que $(-2)^+ = 0$ et $(-2)^- = 2$: la partie négative est positive, ce qui surprend toujours la première fois.

Théorème 6 : La convergence absolue entraîne la convergence :
Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle converge, et

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|.$$

∘ Démonstration :

▷ *Cas réel.* Comme $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$, les séries à termes positifs $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent (théorème 3). Par linéarité (proposition 1), $\sum u_n = \sum(u_n^+ - u_n^-)$ converge.

▷ *Cas complexe.* Comme $|\operatorname{Re} u_n| \leqslant |u_n|$ et $|\operatorname{Im} u_n| \leqslant |u_n|$, les séries réelles $\sum \operatorname{Re} u_n$ et $\sum \operatorname{Im} u_n$ sont absolument convergentes par le théorème 3, donc convergentes par le cas réel, et $\sum u_n$ converge par la proposition 1 (iii).

▷ *Inégalité.* L'inégalité triangulaire pour les sommes finies donne $\left|\sum_{k=0}^n u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^n |u_k|$ pour tout n. On passe à la limite (chapitre 7, théorème 5), le module étant continu. □

Remarques :

- La démonstration repose sur la décomposition $u_n = u_n^+ - u_n^-$: une série réelle absolument convergente est la différence de deux séries convergentes à termes positifs. C'est exactement ainsi que l'on définira la somme d'une famille sommable à la section 20.7.
- La réciproque est fausse : on verra à la section suivante que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, alors que $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Une série convergente qui n'est pas absolument convergente est dite **semi-convergente**.

Proposition 9 : *(Domination.)* Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ et (v_n) une suite de réels positifs. Si $u_n = O(v_n)$ et si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente. C'est le cas en particulier si $u_n = o(v_n)$.

∘ Démonstration : On a $|u_n| = O(v_n)$, et le théorème 3 (iii) donne la convergence de $\sum |u_n|$. Le théorème 6 conclut. Une suite négligeable devant (v_n) en est dominée. □

Exemples :

- Pour tout $n \geqslant 1$, $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$: la série $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ est absolument convergente. Sa somme, environ 1,0140, n'a pas d'expression simple ; on sait seulement qu'elle existe, et on peut l'approcher, puisque le reste est majoré par celui de $\sum \frac{1}{n^2}$, c'est-à-dire par $\frac{1}{n}$.
- La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente. Sa somme se calcule à partir de la proposition 8 : en séparant les indices pairs, on trouve $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$, comme on le justifiera à la section 20.6.
- Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente, puisque son terme général a pour module $\frac{1}{n^\alpha}$. Ses parties réelle et imaginaire, $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$, convergent donc aussi.

Remarque : (Comparaison avec une série géométrique.) Soit (u_n) une suite de complexes non nuls telle que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ tende vers un réel ℓ. Si $\ell < 1$, on choisit $k \in]\ell, 1[$; à partir d'un rang N, $|u_{n+1}| \leqslant k|u_n|$, d'où $|u_n| \leqslant |u_N|\, k^{n-N}$ par récurrence, et $\sum u_n$ est absolument convergente par comparaison avec la série géométrique $\sum k^n$. Si $\ell > 1$, la suite $(|u_n|)$ est croissante à partir d'un certain rang, donc ne tend pas vers 0, et la série diverge grossièrement. Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire : c'est le cas de toutes les séries de Riemann, convergentes ou non. Cette règle, dite de d'Alembert, prolonge le critère du quotient du chapitre 7 (proposition 10) ; elle ne fait pas partie des théorèmes du cours, et on la redémontre, par la comparaison géométrique ci-dessus, chaque fois qu'on l'emploie. Avec $u_n = \frac{n^2}{2^n}$, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}$ tend vers $\frac{1}{2}$, et la série converge ; sa somme vaut 6, comme le montrera la section 20.7.

20.5 Séries alternées

Les séries semi-convergentes échappent à toutes les comparaisons précédentes. On n'en étudiera qu'une famille, celle des séries dont les termes alternent de signe en décroissant en valeur absolue, pour laquelle le théorème des suites adjacentes du chapitre 7 fournit à la fois la convergence et une estimation du reste.

Théorème 7 : Critère des séries alternées :
Soit (a_n) une suite réelle décroissante telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Alors la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.
De plus, en notant S sa somme, S_n ses sommes partielles et R_n ses restes :

(i) les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, et S est compris entre deux sommes partielles consécutives ;

(ii) pour tout n, le reste R_n est du signe de son premier terme $(-1)^{n+1}a_{n+1}$, et

$$|R_n| \leqslant a_{n+1} \ ;$$

(iii) la somme S est du signe de a_0, c'est-à-dire positive, et $0 \leqslant S \leqslant a_0$.

○ Démonstration :

▷ *Suites adjacentes.* La suite (a_n) décroît vers 0, donc elle est positive. On a

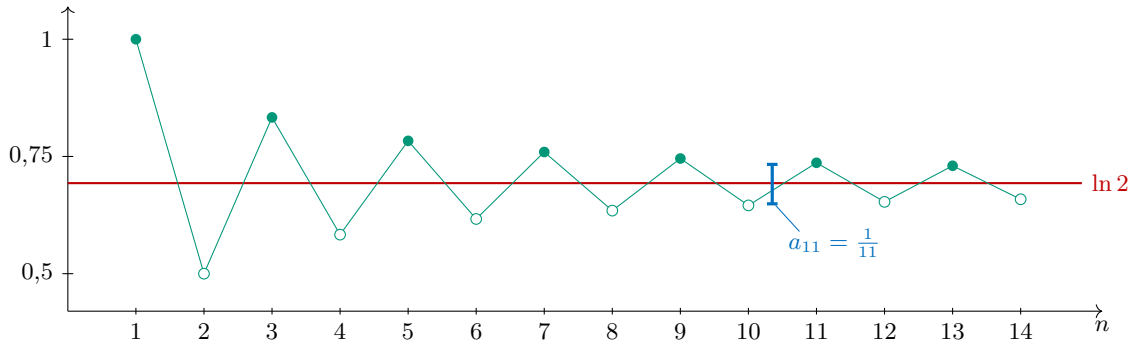
$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad S_{2n+3} - S_{2n+1} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geqslant 0 :$$

la suite (S_{2n}) décroît et la suite (S_{2n+1}) croît. Enfin $S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}$ tend vers 0. Par le théorème des suites adjacentes (chapitre 7, théorème 9), elles convergent vers une même limite S, avec $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$ pour tout n. Comme les deux suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) tendent vers S, la suite (S_n) tend vers S (chapitre 7, proposition 11 (ii)).

▷ *Position de la somme.* On a obtenu $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$, et de même $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n+2}$, puisque $S \leqslant S_{2n+2}$. La somme est donc comprise entre S_n et S_{n+1} pour tout n, ce qui est (i).

▷ *Restes.* Le reste $R_n = S - S_n$ est compris entre 0 et $S_{n+1} - S_n = (-1)^{n+1}a_{n+1}$: il est du signe de ce nombre, et sa valeur absolue est au plus a_{n+1}. Enfin S est compris entre $S_0 = a_0$ et $S_1 = a_0 - a_1 \geqslant 0$, ce qui donne (iii). □

Le point (ii) est le plus utile en pratique : l'erreur commise en arrêtant la somme est majorée par le premier terme négligé, et son signe est connu. C'est l'exercice 20 de la feuille du chapitre 7, que l'on peut maintenant énoncer comme un théorème sur les séries.



Pour $a_n = \frac{1}{n}$, les sommes partielles d'indice impair, en points pleins, décroissent, celles d'indice pair, en points creux, croissent, et la somme $\ln 2$, en rouge, reste toujours entre deux sommes consécutives. Le segment bleu, de longueur a_{11}, joint S_{10} et S_{11} : il contient $\ln 2$, ce qui majore l'erreur $|R_{10}| = \ln 2 - S_{10} \approx 0{,}0475$ par $\frac{1}{11} \approx 0{,}0909$.

Exemples :

- La **série harmonique alternée** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge par le théorème 7, avec $a_n = \frac{1}{n}$, après décalage d'indice. Sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2,$$

  d'après la proposition 11 du chapitre 18, appliquée à $\ln(1+x)$ en $x = 1$, ou d'après l'exercice 25 de la feuille du chapitre 6. Elle n'est pas absolument convergente : c'est l'exemple type de série semi-convergente. La majoration du reste par $\frac{1}{n+1}$ est précise : il faut environ mille termes pour trois décimales, et l'erreur réelle pour $n = 1\,000$ vaut $0{,}000\,50$.

- De même, $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge, et sa somme vaut $\frac{\pi}{4}$ (exercice 25 du chapitre 6, question 4). Mille termes donnent π à 10^{-3} près seulement, puisque le reste est majoré par $\frac{1}{2\,001}$.

- Pour $\alpha > 0$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge ; elle est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarques :

- L'hypothèse de décroissance est indispensable, et c'est elle que l'on oublie le plus souvent de vérifier : un terme qui alterne de signe et tend vers 0 ne suffit pas. Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. Un développement asymptotique (chapitre 10), avec $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, donne

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

  Les séries de termes $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (théorème 7), $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ et $O\big(\frac{1}{n^2}\big)$ (proposition 9) convergent, et la série harmonique diverge : par la proposition 1 (ii), $\sum u_n$ diverge. Ses sommes partielles se comportent comme $-\ln n$. La suite des valeurs absolues n'est pas décroissante, puisque $|u_3| \approx 1{,}37$ et $|u_2| \approx 0{,}41$.

- Le même exemple montre que le théorème 4 ne s'étend pas aux séries de signe variable : $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, mais $\sum u_n$ diverge alors que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. Pour une série de signe quelconque, un équivalent ne suffit pas : il faut un développement asymptotique dont le reste est le terme général d'une série absolument convergente.

20.5.1 L'ordre des termes

Une série semi-convergente a une propriété déroutante : sa somme dépend de l'ordre dans lequel on écrit ses termes. Écrivons les termes de la série harmonique alternée en faisant suivre chaque terme impair de deux termes pairs :

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

Ce sont les mêmes termes, chacun écrit une fois. Les trois termes du paquet d'indice $k \geqslant 1$ se regroupent ainsi :

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\Big).$$

La somme des n premiers paquets vaut donc la moitié de $S_{2n} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j}$, qui tend vers $\frac{1}{2}\ln 2$. Comme les termes tendent vers 0, les sommes partielles qui s'arrêtent au milieu d'un paquet ont la même limite, et la série réordonnée converge vers $\frac{1}{2}\ln 2$, et non vers $\ln 2$.

Remarques :

- Riemann a montré en 1854 que, pour toute série réelle semi-convergente et tout réel x, on peut réordonner les termes pour que la somme vaille x : on prend des termes positifs jusqu'à dépasser x, puis des termes négatifs jusqu'à repasser sous x, et ainsi de suite. Ce théorème, que l'on admet, montre qu'une série semi-convergente n'est pas une « somme infinie » au sens ordinaire : sa somme est attachée à l'ordre de ses termes.

- Pour une série absolument convergente, au contraire, l'ordre est indifférent, comme Dirichlet l'avait observé : c'est ce que démontrera la section 20.7. C'est la raison pour laquelle le cadre des familles sommables, qui ignore tout ordre, est celui de la convergence absolue.

20.6 Familles sommables de réels positifs

Le chapitre 3 a défini la somme d'une famille finie $(a_i)_{i\in I}$ en numérotant ses éléments, puis montré que le résultat ne dépend pas de la numérotation, et qu'on peut la calculer par paquets (relation de Chasles) ou ligne par ligne (interversion des sommes, proposition 6). On veut maintenant sommer une famille indexée par un ensemble I infini quelconque, par exemple $\mathbb{N}^2$, qui n'a pas d'ordre naturel. On commence par les familles de réels positifs, pour lesquelles tout se passe sans hypothèse, à condition d'accepter la valeur $+\infty$.

Dans toute la suite, I désigne un ensemble quelconque, et l'on note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.

20.6.1 Calculs dans $[0,+\infty]$

On note $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$, partie de la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$ du chapitre 7, ordonnée par $x \leqslant +\infty$ pour tout x. On y prolonge l'addition et la multiplication par un réel positif par les conventions

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \quad (x \in [0,+\infty]), \qquad \lambda \cdot (+\infty) = +\infty \quad (\lambda > 0), \qquad 0 \cdot (+\infty) = 0.$$

Ces opérations restent commutatives, associatives et compatibles avec l'ordre : si $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$, alors $x + y \leqslant x' + y'$. Toute partie non vide A de $[0,+\infty]$ a une **borne supérieure** dans $[0,+\infty]$: c'est $+\infty$ si A contient $+\infty$ ou n'est pas majorée par un réel, et sa borne supérieure au sens du chapitre 7 sinon. La caractérisation de la borne supérieure (chapitre 7, proposition 2) reste vraie, en convenant que si $\sup A = +\infty$, tout réel est dépassé par un élément de A. En particulier, les sommes finies d'éléments de $[0,+\infty]$ sont définies comme au chapitre 3.

> *Remarque :* La convention $0 \cdot (+\infty) = 0$ est la seule raisonnable pour les sommes : une famille de zéros a une somme nulle, quel que soit le nombre de ses termes. En revanche, on ne définit jamais $(+\infty) - (+\infty)$: la soustraction n'est utilisée qu'entre réels, ce qui obligera, au moment de passer aux familles de signe quelconque, à vérifier d'abord que les sommes en jeu sont finies.

20.6.2 Somme d'une famille positive

Définition : Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$. Sa **somme** est l'élément de $[0,+\infty]$

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{ \sum_{i\in F} u_i \;\middle|\; F \in \mathcal{P}_f(I) \right\}.$$

La famille est dite **sommable** si cette somme est finie.

La définition ne fait intervenir aucun ordre sur I : on somme « en vrac ». Elle donne toujours un résultat, éventuellement $+\infty$, et la sommabilité se lit sur ce résultat. Les sommes finies $\sum_{i\in F} u_i$ sont celles du chapitre 3 ; elles forment une partie non vide de $[0,+\infty]$, qui contient 0, somme sur $F = \varnothing$.

Proposition 10 : Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $[0,+\infty]$.

(i) *Cas fini.* Si I est fini, la somme coïncide avec celle du chapitre 3.

(ii) *Cas de* $\mathbb{N}$. Si $I = \mathbb{N}$ et si les u_n sont réels, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, au sens de la proposition 5, la valeur $+\infty$ correspondant à une série divergente. La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

(iii) *Croissance.* Si $u_i \leqslant v_i$ pour tout i, alors $\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i$. Si $J \subset I$, alors $\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.

(iv) *Changement d'indice.* Si $\sigma : J \to I$ est une bijection, alors $\displaystyle\sum_{j\in J} u_{\sigma(j)} = \sum_{i\in I} u_i$.

∘ Démonstration :

▷ *(i)* Pour $F \subset I$, la relation de Chasles du chapitre 3 donne $\sum_F u_i \leqslant \sum_F u_i + \sum_{I\setminus F} u_i = \sum_I u_i$, puisque les termes sont positifs ; la borne supérieure est donc atteinte pour $F = I$.

▷ *(ii)* Toute partie finie F de $\mathbb{N}$ est contenue dans $[\![0,N]\!]$, avec $N = \max F$ (ou $N = 0$ si F est vide), donc $\sum_F u_n \leqslant S_N \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (proposition 5). Inversement, S_N est la somme sur la partie finie $[\![0,N]\!]$. La borne supérieure des sommes finies est donc celle des S_N, qui est la somme de la série (proposition 5).

▷ *(iii)* Pour toute partie finie F, $\sum_F u_i \leqslant \sum_F v_i \leqslant \sum_I v_i$, et l'on passe à la borne supérieure sur F. Les parties finies de J étant des parties finies de I, la seconde inégalité suit.

▷ *(iv)* L'application $F \mapsto \sigma(F)$ est une bijection de $\mathcal{P}_f(J)$ sur $\mathcal{P}_f(I)$, de réciproque $G \mapsto \sigma^{-1}(G)$, et $\sum_{j\in F} u_{\sigma(j)} = \sum_{i\in\sigma(F)} u_i$ par la proposition 2 du chapitre 3. Les deux bornes supérieures portent sur le même ensemble de nombres. □

Remarques :

- Le point (iv), avec $J = I = \mathbb{N}$, signifie qu'on peut réordonner les termes d'une série à termes positifs sans changer ni sa nature ni sa somme : pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. C'est faux pour une série semi-convergente, comme on l'a vu à la section 20.5 ; la positivité suffit à l'éviter.
- Les calculs dans $[0,+\infty]$ sont justifiés par la seule positivité, et ils fournissent en même temps la sommabilité : on calcule d'abord, et l'on constate ensuite que le résultat est fini. C'est le grand confort de ce cadre.

Proposition 11 : *(Opérations.)* Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $[0,+\infty]$, et $\lambda \in [0,+\infty[$. Alors

$$\sum_{i\in I}(u_i+v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i\in I} u_i.$$

En particulier, la somme de deux familles sommables et le produit d'une famille sommable par un réel positif sont sommables.

∘ Démonstration :

▷ *Somme.* Notons A, B et C les sommes de (u_i), (v_i) et (u_i+v_i). Pour toute partie finie F,

$$\sum_{i\in F}(u_i+v_i) = \sum_{i\in F} u_i + \sum_{i\in F} v_i \leqslant A+B, \qquad \text{d'où} \qquad C \leqslant A+B.$$

Inversement, soit F et G deux parties finies, et $H = F\cup G$. Par croissance,

$$\sum_{i\in F} u_i + \sum_{i\in G} v_i \leqslant \sum_{i\in H} u_i + \sum_{i\in H} v_i = \sum_{i\in H}(u_i+v_i) \leqslant C.$$

Si $C=+\infty$, l'inégalité $A+B\leqslant C$ est claire. Sinon, toutes les sommes finies sont des réels ; à G fixé, $\sum_F u_i \leqslant C - \sum_G v_i$ pour tout F, donc $A \leqslant C - \sum_G v_i$, et A est fini. Puis $\sum_G v_i \leqslant C - A$ pour tout G, donc $B \leqslant C-A$, soit $A+B\leqslant C$.

▷ *Produit.* Si $\lambda = 0$, les deux membres sont nuls, par la convention $0\cdot(+\infty)=0$. Si $\lambda>0$, les sommes finies de (λu_i) sont les $\lambda\sum_F u_i$, et multiplier par $\lambda>0$ multiplie la borne supérieure par λ, y compris si elle est infinie. □

20.6.3 Sommation par paquets

Une **partition** de I est une famille $(I_j)_{j\in J}$ de parties de I, deux à deux disjointes, dont la réunion est I ; on autorise ici des parties vides. Le théorème suivant étend la relation de Chasles du chapitre 3 à une partition quelconque.

Théorème 8 : Sommation par paquets, cas positif :
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$ et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. Alors

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I_j} u_i\Big),$$

égalité dans $[0,+\infty]$. En particulier, $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si chaque sous-famille $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable et si la famille $\big(\sum_{i\in I_j} u_i\big)_{j\in J}$ est sommable.

∘ Démonstration : On note $\sigma_j = \sum_{i\in I_j} u_i$, $\Sigma = \sum_{i\in I} u_i$ et $\Sigma' = \sum_{j\in J}\sigma_j$.

▷ *L'inégalité $\Sigma\leqslant\Sigma'$.* Soit F une partie finie de I. Les parties $F\cap I_j$ sont disjointes, de réunion F, et seul un ensemble fini K d'indices j donne une partie non vide. La relation de Chasles pour les sommes finies, puis la croissance, donnent

$$\sum_{i\in F} u_i = \sum_{j\in K}\Big(\sum_{i\in F\cap I_j} u_i\Big) \leqslant \sum_{j\in K}\sigma_j \leqslant \Sigma'.$$

On passe à la borne supérieure sur F.

▷ *L'inégalité* $\Sigma' \leqslant \Sigma$. Si $\Sigma = +\infty$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, chaque σ_j est fini, majoré par Σ (proposition 10 (iii)). Soit K une partie finie non vide de J, de cardinal m, et $\varepsilon > 0$. Pour chaque $j \in K$, la caractérisation de la borne supérieure fournit une partie finie F_j de I_j telle que $\sum_{F_j} u_i \geqslant \sigma_j - \frac{\varepsilon}{m}$. Les F_j sont disjointes, et leur réunion F est une partie finie de I :

$$\sum_{j\in K} \sigma_j \leqslant \sum_{j\in K} \Big(\sum_{i\in F_j} u_i \Big) + \varepsilon = \sum_{i\in F} u_i + \varepsilon \leqslant \Sigma + \varepsilon.$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_K \sigma_j \leqslant \Sigma$, et l'on passe à la borne supérieure sur K. □

La difficulté de la seconde inégalité tient à ce qu'il y a une infinité de paquets, chacun sommé par une borne supérieure : on ne peut en approcher qu'un nombre fini à la fois, et c'est l'argument en $\frac{\varepsilon}{m}$ qui permet de le faire. Lorsque toutes les sommes sont finies, on peut aussi présenter ce théorème comme une associativité généralisée : on peut grouper les termes à sa guise.

Théorème 9 : Théorème de Fubini positif :
Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de $[0\,,+\infty]$. Alors, dans $[0\,,+\infty]$,

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I} \Big(\sum_{j\in J} u_{i,j} \Big) = \sum_{j\in J} \Big(\sum_{i\in I} u_{i,j} \Big).$$

○ Démonstration : Les parties $\{i\} \times J$, pour $i \in I$, forment une partition de $I \times J$, et $j \mapsto (i, j)$ est une bijection de J sur $\{i\} \times J$: par la proposition 10 (iv), la somme sur le paquet $\{i\} \times J$ vaut $\sum_{j\in J} u_{i,j}$, et le théorème 8 donne la première égalité. La seconde s'obtient avec la partition par les parties $I \times \{j\}$. □

C'est la proposition 6 du chapitre 3, sans aucune hypothèse de finitude : pour une famille positive, on peut toujours intervertir, et le résultat commun dit en même temps si la famille est sommable.

♡ **Méthode : Étudier la sommabilité d'une famille positive :**

- ▶ On choisit une partition de l'ensemble d'indices adaptée à la forme des termes : par lignes ou par colonnes pour une famille indexée par un produit, par les valeurs d'une quantité qui apparaît dans le terme général, comme $p + q$ ou $\max(p, q)$.
- ▶ On calcule dans $[0\,,+\infty]$ la somme de chaque paquet, puis la somme des sommes des paquets, sans se préoccuper de convergence : le théorème 8 garantit que le résultat est la somme de la famille.
- ▶ La famille est sommable si et seulement si le résultat est fini.

Exemples :

- Pour p, $q \geqslant 1$, la famille $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)$ est sommable, et le théorème 9 et la proposition 11 donnent

$$\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2q^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \Big(\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} \Big) = \Big(\frac{\pi^2}{6} \Big)^2 = \frac{\pi^4}{36}.$$

- En partageant $\mathbb{N}^*$ en entiers pairs et impairs, le théorème 8 et la proposition 10 (iv), avec la bijection $k \mapsto 2k$, donnent

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

  On en déduit la somme annoncée à la section 20.4 : par linéarité des séries, la somme des termes d'indice pair moins celle des termes d'indice impair donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

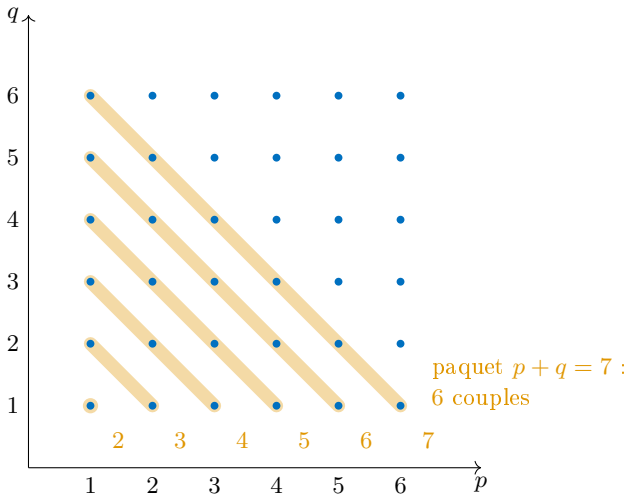
- Pour $n \geqslant 2$, on pose $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n}$, qui est fini (théorème 5). La famille $\left(\frac{1}{k^n}\right)_{n\geqslant 2,\, k\geqslant 2}$ est positive, et le théorème 9 permet de sommer d'abord sur n une série géométrique de raison $\frac{1}{k}$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \big(\zeta(n) - 1\big) = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1.$$

Le calcul est justifié par la seule positivité. Il donne une identité qu'on n'aurait pas devinée : $(\zeta(2)-1)+(\zeta(3)-1)+\cdots = 0{,}6449+0{,}2021+0{,}0823+\cdots = 1$.

20.6.4 Un exemple de sommation par paquets

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudions la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$. Aucun des deux ordres de sommation du théorème 9 n'est commode, puisque $\sum_q \frac{1}{(p+q)^\alpha}$ n'a pas d'expression simple. On groupe plutôt les couples selon la valeur de $p+q$: pour $n \geqslant 2$, le paquet $I_n = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid p+q = n\}$ contient les $n-1$ couples $(1,n-1),\dots,(n-1,1)$, sur lesquels le terme vaut $\frac{1}{n^\alpha}$.



Les points bleus sont les indices (p,q), et chaque bande orange réunit les $n-1$ indices du paquet $p+q=n$, où le terme général est constant ; la valeur de n est écrite au pied de chaque bande. On somme ainsi le long des diagonales, au lieu des lignes ou des colonnes.
Par le théorème 8, dans $[0\,,+\infty]$,

$$\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\sum_{(p,q)\in I_n} \frac{1}{n^\alpha}\Big) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n^\alpha}.$$

Comme $\frac{n-1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}$, cette série converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ (théorèmes 4 et 5) : la famille est sommable si et seulement si $\alpha > 2$. Pour $\alpha = 3$, sa somme vaut

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(2)-\zeta(3) \approx 0{,}4429,$$

la décomposition étant légitime ici puisque les deux séries convergent. La somme des termes pour p, $q \leqslant 2\,000$ vaut 0,4425, ce qui confirme la valeur.

Remarque : Le seuil $\alpha > 2$, et non $\alpha > 1$, vient de ce que le paquet I_n a $n-1$ éléments : en dimension deux, il y a environ n indices « à distance n » de l'origine, et la famille doit décroître plus vite qu'une série de Riemann pour que leur contribution totale reste finie. L'erreur la plus répandue est de conclure à la sommabilité dès $\alpha > 1$, en raisonnant sur une seule ligne p fixée : chaque ligne $\sum_q \frac{1}{(p+q)^\alpha}$ converge alors, mais la somme des lignes diverge si $\alpha \leqslant 2$.

20.7 Familles sommables de nombres complexes

Pour une famille de signe quelconque, la définition par une borne supérieure n'a plus de sens. On procède comme pour les séries absolument convergentes : on impose d'abord que la famille des modules soit sommable, puis on écrit chaque terme comme combinaison de termes positifs.

20.7.1 Définition

Définition : Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres complexes est **sommable** si la famille positive $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable, c'est-à-dire si

$$\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty.$$

On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par I.

Proposition 12 : Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{K}$.

(i) *Domination.* Si $|u_i| \leqslant v_i$ pour tout i, et si la famille positive (v_i) est sommable, alors (u_i) est sommable.

(ii) *Sous-famille.* Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et $J \subset I$, alors $(u_i)_{i\in J}$ est sommable.

(iii) *Structure.* $\ell^1(I)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{K}^I$ des familles indexées par I.

(iv) *Cas de* $\mathbb{N}$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

∘ Démonstration : (i) et (ii) découlent de la croissance (proposition 10 (iii)), et (iv) de la proposition 10 (ii) appliquée à $(|u_n|)$. Pour (iii), la famille nulle est sommable, et si u, v sont sommables et λ, $\mu \in \mathbb{K}$, alors $|\lambda u_i + \mu v_i| \leqslant |\lambda|\,|u_i| + |\mu|\,|v_i|$, famille sommable par la proposition 11 ; on conclut par (i). □

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable. Si elle est réelle, les familles positives (u_i^+) et (u_i^-) sont majorées par $(|u_i|)$, donc sommables, de sommes finies. Si elle est complexe, les familles réelles $(\operatorname{Re} u_i)$ et $(\operatorname{Im} u_i)$ sont sommables, par domination. Cela permet la définition suivante.

Définition : La **somme** d'une famille sommable $(u_i)_{i\in I}$ est le nombre

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^- \quad \text{si elle est réelle,}$$

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} \operatorname{Re} u_i + \mathrm{i} \sum_{i\in I} \operatorname{Im} u_i \quad \text{si elle est complexe.}$$

Pour une famille positive, $u_i^+ = u_i$ et $u_i^- = 0$: on retrouve la somme de la section 20.6. L'erreur la plus répandue est d'écrire $\sum u_i$ pour une famille de signe quelconque avant d'avoir vérifié que $\sum |u_i|$ est fini : sans cette vérification, la différence $\sum u_i^+ - \sum u_i^-$ peut être de la forme $(+\infty) - (+\infty)$, qui n'a pas de sens.

Proposition 13 : Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}$.

(i) *Linéarité.* Pour tous λ, $\mu \in \mathbb{K}$, $\displaystyle\sum_{i\in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i$.

(ii) *Inégalités.* Si u et v sont réelles et $u_i \leqslant v_i$ pour tout i, alors $\sum_I u_i \leqslant \sum_I v_i$. Dans tous les cas, $\displaystyle\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i|$.

(iii) *Cas fini et cas de* $\mathbb{N}$. Si I est fini, la somme est celle du chapitre 3. Si $I = \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

(iv) *Invariance par permutation.* Si $\sigma : J \to I$ est une bijection, la famille $(u_{\sigma(j)})_{j\in J}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{j\in J} u_{\sigma(j)} = \sum_{i\in I} u_i$.

∘ Démonstration :

▷ *(i), cas réel.* Soit $w = u + v$. Les égalités $w_i^+ - w_i^- = w_i = u_i^+ - u_i^- + v_i^+ - v_i^-$ donnent, entre familles positives sommables,

$$w_i^+ + u_i^- + v_i^- = w_i^- + u_i^+ + v_i^+.$$

La proposition 11 permet de sommer chaque membre terme à terme ; toutes les sommes obtenues sont des réels, et en les réordonnant on obtient $\sum w_i = \sum u_i + \sum v_i$. Pour $\lambda \geqslant 0$, $(\lambda u_i)^\pm = \lambda u_i^\pm$; pour $\lambda < 0$, $(\lambda u_i)^+ = |\lambda|\, u_i^-$ et $(\lambda u_i)^- = |\lambda|\, u_i^+$. Dans les deux cas, la proposition 11 donne $\sum \lambda u_i = \lambda \sum u_i$.

▷ *(i), cas complexe.* On applique le cas réel aux parties réelles et imaginaires, en écrivant par exemple $\operatorname{Re}(\lambda u_i) = \operatorname{Re}\lambda \operatorname{Re} u_i - \operatorname{Im}\lambda \operatorname{Im} u_i$.

▷ *(ii)* Si $u \leqslant v$, la famille $v - u$ est positive, donc $\sum v_i - \sum u_i = \sum (v_i - u_i) \geqslant 0$ par (i). Pour une famille réelle, $-|u_i| \leqslant u_i \leqslant |u_i|$ donne $\left|\sum u_i\right| \leqslant \sum |u_i|$. Pour une famille complexe de somme $S \neq 0$, on écrit $S = |S|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$; par (i), $|S| = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} S = \sum \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} u_i$, nombre réel égal à sa partie réelle $\sum \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} u_i)$, et le cas réel donne $|S| \leqslant \sum |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} u_i| = \sum |u_i|$.

▷ *(iii) et (iv)* On applique les propositions 10 (i), (ii) et (iv) aux familles positives $u^\pm$ et $(\operatorname{Re} u)^\pm$, $(\operatorname{Im} u)^\pm$, et la linéarité des sommes finies et des séries (proposition 1). □

Remarques :

- Avec $I = J = \mathbb{N}$, le point (iv) affirme que l'on peut réordonner les termes d'une série absolument convergente sans changer sa somme : pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$, $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. C'est l'observation de Dirichlet de l'introduction, et le phénomène de la section 20.5 est ainsi réservé aux séries semi-convergentes.
- La suite $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ n'est pas sommable, puisque $\sum \frac{1}{n} = +\infty$, bien que la série correspondante converge : la notion de famille sommable ne prolonge que les séries absolument convergentes. On ne parle donc jamais de la « somme de la famille » $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$, mais seulement de la somme de la série, qui dépend de l'ordre.

20.7.2 Sommation par paquets et théorème de Fubini

Théorème 10 : Sommation par paquets :
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$ et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. Alors chaque sous-famille $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable, la famille $\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable, et

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right).$$

∘ Démonstration : Chaque sous-famille est sommable (proposition 12 (ii)). Par la proposition 13 (ii), $\left|\sum_{I_j} u_i\right| \leqslant \sum_{I_j} |u_i|$, et la famille $\left(\sum_{I_j} |u_i|\right)_j$ est sommable, de somme $\sum_I |u_i|$, par le théorème 8 : la famille des sommes des paquets est sommable par domination. Pour l'égalité, dans le cas réel, on écrit $\sum_{I_j} u_i = \sum_{I_j} u_i^+ - \sum_{I_j} u_i^-$. Les familles $\left(\sum_{I_j} u_i^{\pm}\right)_j$ sont positives et sommables, de sommes $\sum_I u_i^{\pm}$ par le théorème 8, et la linéarité (proposition 13 (i)) donne

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i^+\right) - \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i^-\right) = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^- = \sum_{i\in I} u_i.$$

Le cas complexe s'en déduit en séparant parties réelles et imaginaires. □

Théorème 11 : Théorème de Fubini :
Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right),$$

toutes les familles qui interviennent étant sommables.

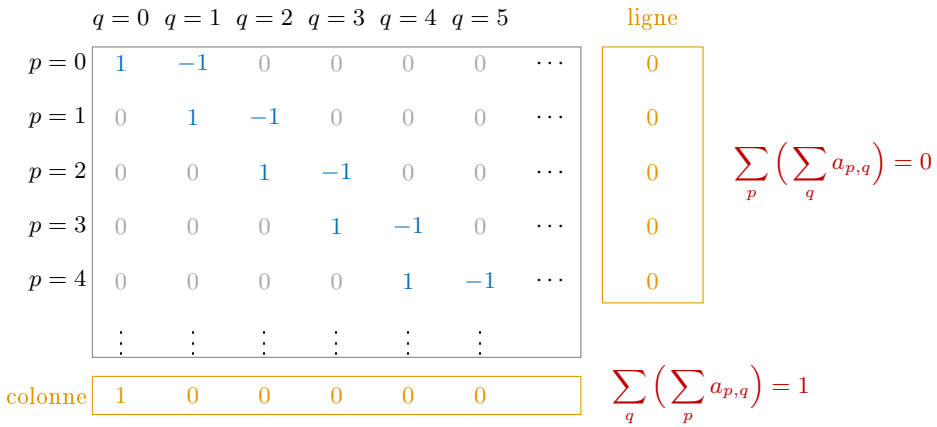
∘ Démonstration : C'est le théorème 10, appliqué aux partitions de $I \times J$ en lignes $\{i\} \times J$ et en colonnes $I \times \{j\}$, comme dans la démonstration du théorème 9. □

L'hypothèse de sommabilité porte sur la famille double tout entière, et c'est le théorème de Fubini positif qui permet de la vérifier : $(u_{i,j})$ est sommable si et seulement si $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} |u_{i,j}| < +\infty$, somme que l'on calcule dans $[0, +\infty]$ dans l'ordre que l'on veut.

♡ **Méthode : Calculer la somme d'une famille de signe quelconque :**

- ▶ On mène d'abord un calcul formel : on choisit une partition commode (lignes, colonnes, diagonales) et l'on calcule les sommes des paquets, puis la somme de ces sommes.
- ▶ On justifie ensuite ce calcul en établissant la sommabilité : on reprend la même partition avec les modules $|u_i|$, et l'on montre, par un calcul dans $[0, +\infty]$ (théorèmes 8 et 9), que $\sum |u_i| < +\infty$.
- ▶ Le théorème 10 ou 11 garantit alors que le résultat du calcul formel est la somme de la famille, et que tout autre groupement donnerait le même résultat.

Sans la seconde étape, la première ne prouve rien, comme le montre l'exemple suivant. Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $a_{p,q} = 1$ si $q = p$, $a_{p,q} = -1$ si $q = p + 1$, et $a_{p,q} = 0$ sinon.



Le tableau contient la diagonale de 1 et, juste au-dessus, une diagonale de -1, en bleu. Chaque ligne contient un 1 et un -1, et sa somme, en orange à droite, est nulle ; chaque colonne contient aussi un 1 et un -1, sauf la première, qui ne contient qu'un 1. Les deux sommes itérées, en rouge, valent 0 et 1.

> *Remarque :* Les deux calculs sont corrects ligne par ligne et colonne par colonne, puisque chaque ligne et chaque colonne n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. C'est l'échange des deux sommations qui est illégitime : la famille n'est pas sommable, car $\sum_{p,q} |a_{p,q}| = \sum_p 2 = +\infty$, et le théorème 11 ne s'applique pas. L'erreur la plus répandue est d'intervertir deux sommes infinies parce que « c'est permis pour les sommes finies » : la proposition 6 du chapitre 3 ne s'étend qu'aux familles sommables, ou positives.

20.7.3 Approximation par des sommes finies

Proposition 14 : Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable, de somme S. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie F_0 de I telle que, pour toute partie finie F contenant F_0,

$$\left|S - \sum_{i\in F} u_i\right| \leqslant \varepsilon.$$

∘ Démonstration : Par définition de $\sum_I |u_i|$ comme borne supérieure, il existe une partie finie F_0 telle que $\sum_{F_0} |u_i| \geqslant \sum_I |u_i| - \varepsilon$. Soit F finie contenant F_0. Le théorème 10, avec la partition de I en F et $I \setminus F$, puis la proposition 13 (ii) et le théorème 8, donnent

$$\left|S - \sum_{i\in F} u_i\right| = \left|\sum_{i\in I\setminus F} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I\setminus F} |u_i| = \sum_{i\in I} |u_i| - \sum_{i\in F} |u_i| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i| - \sum_{i\in F_0} |u_i| \leqslant \varepsilon.$$

□

La somme d'une famille sommable est donc la limite de ses sommes finies, au sens suivant : dès qu'une partie finie contient F_0, la somme correspondante est à moins de ε de S. Cette propriété caractérise S, puisque deux nombres qui la vérifient sont à distance au plus 2ε pour tout ε. Pour $I = \mathbb{N}$ et $F = [\![0, n]\!]$, on retrouve la convergence des sommes partielles ; mais elle vaut pour n'importe quelle suite croissante de parties finies qui finit par contenir chaque indice, ce qui explique l'invariance par permutation.

20.7.4 Produits

Proposition 15 : *(Produit de deux familles sommables.)* Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}$. La famille $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable, et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right).$$

∘ Démonstration : Par le théorème 9 et la proposition 11, dans $[0,+\infty]$,

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} |a_i|\,|b_j| = \sum_{i\in I} |a_i| \Big(\sum_{j\in J} |b_j|\Big) = \Big(\sum_{i\in I} |a_i|\Big)\Big(\sum_{j\in J} |b_j|\Big) < +\infty.$$

La famille est donc sommable, et le théorème 11 et la linéarité (proposition 13 (i)) donnent

$$\sum_{(i,j)} a_i b_j = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J} a_i b_j\Big) = \sum_{i\in I} a_i\Big(\sum_{j\in J} b_j\Big) = \Big(\sum_{i\in I} a_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} b_j\Big).$$

□

C'est la proposition 7 du chapitre 3 pour des familles infinies, et l'on admet son extension, par récurrence, au produit d'un nombre fini de familles sommables : la famille $(a_i b_j c_k)$ est sommable sur $I\times J\times K$, de somme le produit des trois sommes. Le cas le plus important est celui de deux séries, que l'on groupe selon la somme des indices, comme sur la figure de la section 20.6.

Théorème 12 : Produit de Cauchy de deux séries :
Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{\substack{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2\\ k+\ell=n}} a_k b_\ell.$$

La série $\sum c_n$, appelée **produit de Cauchy** des deux séries, est absolument convergente, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big).$$

∘ Démonstration : Les suites (a_n) et (b_n) sont sommables (proposition 12 (iv)). Par la proposition 15, la famille $(a_k b_\ell)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ l'est aussi, et sa somme est le produit des deux sommes. Les parties

$$I_n = \{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2 \mid k+\ell = n\}, \qquad n\in\mathbb{N},$$

forment une partition de $\mathbb{N}^2$ en parties finies, et la somme sur I_n vaut c_n. Par le théorème 10, la suite (c_n) est sommable, c'est-à-dire que $\sum c_n$ est absolument convergente, et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} a_k b_\ell$. □

Exemples :

- *L'exponentielle.* Pour $a, b\in\mathbb{C}$, les séries $\sum \frac{a^n}{n!}$ et $\sum \frac{b^n}{n!}$ sont absolument convergentes (théorème 2, appliqué à $|a|$ et $|b|$). Le terme général de leur produit de Cauchy se calcule par la formule du binôme, valable dans l'anneau commutatif $\mathbb{C}$ (chapitre 11, théorème 3) :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\,\frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{(a+b)^n}{n!}.$$

  Le théorème 12 donne alors $\mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}$. C'est la relation fondamentale de l'exponentielle, obtenue ici à partir de la seule série, sans trigonométrie ; elle redonne en particulier les formules d'addition de cos et sin du chapitre 4, en prenant $a = \mathrm{i}x$ et $b = \mathrm{i}y$.

- *Les puissances.* Pour $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, le produit de Cauchy de $\sum z^n$ par elle-même a pour terme général $\sum_{k=0}^{n} z^k z^{n-k} = (n+1)z^n$, d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}, \qquad \text{puis} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}\,z^n = \frac{1}{(1-z)^3},$$

  en multipliant encore par $\sum z^n$, puisque la somme des entiers de 1 à $n+1$ vaut $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Comme $n^2 = (n+1)(n+2) - 3(n+1) + 1$, on en tire, pour $z = \frac{1}{2}$, la somme annoncée à la section 20.4 :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n} = 2\cdot 8 - 3\cdot 4 + 2 = 6.$$

Remarque : L'hypothèse de convergence absolue ne peut pas être affaiblie. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge par le théorème 7, mais son produit de Cauchy par elle-même a pour terme général

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}.$$

L'inégalité entre moyennes géométrique et arithmétique donne, pour chaque k,

$$\sqrt{(k+1)(n-k+1)} \leqslant \frac{(k+1)+(n-k+1)}{2} = \frac{n+2}{2}.$$

Ainsi $|c_n| \geqslant \frac{2(n+1)}{n+2}$, qui tend vers 2 : la série $\sum c_n$ diverge grossièrement. Numériquement, $|c_{10}| \approx 2{,}29$ et $|c_{1\,000}| \approx 3{,}05$: loin de tendre vers 0, les termes grandissent. Le produit de Cauchy de deux séries semi-convergentes peut donc diverger, ce qui confirme que le bon cadre est celui des familles sommables.

20.8 Bilan

Le chapitre a donné un sens aux sommes infinies de deux manières : par la limite des sommes partielles, qui dépend de l'ordre des termes, puis par la borne supérieure des sommes finies, qui n'en dépend pas.

Notion	Énoncé	Référence
séries, restes	$u_n \to 0$ nécessaire ; $S = S_n + R_n$; (a_n) et $\sum(a_{n+1} - a_n)$ de même nature	propositions 1 à 4
séries de référence	$\sum z^n = \frac{1}{1-z}$ si $\lvert z\rvert < 1$; $\sum \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$	théorèmes 1 et 2
termes positifs	convergence si (S_n) majorée ; comparaison, O, équivalents	proposition 5, théorèmes 3 et 4
série et intégrale	$\int_{n_0}^{n+1} f \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f$ si f décroît	proposition 6
Riemann, Euler	$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$; $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$; $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$	théorème 5, propositions 7 et 8
convergence absolue	$\sum \lvert u_n\rvert$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge ; $u_n = O(v_n)$, $v_n \geqslant 0$	théorème 6, proposition 9
séries alternées	(a_n) décroît vers 0 : convergence, $\lvert R_n\rvert \leqslant a_{n+1}$	théorème 7
familles positives	$\sum_I u_i = \sup_F \sum_F u_i$ dans $[0\,,+\infty]$; paquets, Fubini sans hypothèse	propositions 10 et 11, théorèmes 8 et 9
familles sommables	$\sum \lvert u_i\rvert < +\infty$; linéarité, permutation, paquets, Fubini	propositions 12 à 14, théorèmes 10 et 11
produits	$\sum a_i b_j = \left(\sum a_i\right)\left(\sum b_j\right)$; produit de Cauchy, $\mathrm{e}^a \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}$	proposition 15, théorème 12

Trois idées sont à retenir. Une série est une suite, celle de ses sommes partielles, et l'étude de sa nature est presque toujours une comparaison : avec une série géométrique, une série de Riemann ou une intégrale, à l'aide des équivalents du chapitre 10, la positivité des termes étant la condition de toutes ces comparaisons. Le terme général tend vers 0 quand la série converge, mais la série harmonique montre que cela ne suffit pas, et les séries semi-convergentes montrent que l'ordre des termes peut changer la somme. Enfin, la sommabilité, c'est-à-dire la convergence absolue, est l'hypothèse qui rend légitimes toutes les manipulations des sommes finies du chapitre 3, réordonner, grouper, intervertir, développer un produit ; pour une famille positive, le calcul dans $[0\,,+\infty]$ se justifie de lui-même et dit en même temps si la famille est sommable. Le chapitre 21 reprendra les sommes finies pour définir les probabilités et les espérances sur un univers fini ; en seconde année, les probabilités sur un univers infini s'écriront avec des familles sommables, et l'exponentielle, définie ici par une série, sera le premier exemple des séries entières. Le chapitre 22 passera de $\mathbb{N}^2$ à $\mathbb{R}^2$: il étudiera les fonctions de deux variables réelles, dont les développements à l'ordre 1 prolongeront ceux du chapitre 10 ; l'analogue continu du théorème de Fubini, pour les intégrales doubles, relève de la seconde année.