Chapitre 1

Polynôme du second degré

1.1 Introduction historique

Ut legi, ut solvi. (Aussitôt lu, aussitôt résolu.)

François Viète - Mathématicien français (1540 à 1603)

Lors du collège, tout élève découvre la méthode pour résoudre une équation du premier degré contenant une inconnue x, afin de trouver longueur ou grandeur. Mais lorsqu'on s'intéresse à la géométrie, que ce soit par l'aire ou l'invocation du théorème de Pythagore, on peut vite être confronté à des équations qui ne font pas uniquement apparaître x mais son carré : x^2. Première étape de la spécialité mathématiques, ce problème a en fait intéressé les hommes depuis l'antiquité.

1.1.1 Du quadratique antique...

En Mésopotamie (région correspondant actuellement à l'Iraq), les Sumériens ont inventé la première écriture vers 3300 av. J.-C. Les textes, écrits sur des tablettes d'argile humide ensuite séchée au soleil, nous sont parvenus à travers de fouilles archéologiques et accompagnent l'histoire des civilisations de cette région jusqu'aux Babyloniens, entre 1900 et 1600 av. J.-C. Sur certaines de ces tablettes apparaissent des méthodes algébriques déjà très élaborées, notamment celle pour résoudre des équations du second degré qui se présentent sous cette forme : « J'ai additionné 7 fois le côté de mon carré et 11 fois sa surface pour trouver $6,25$. ». Bien que ces méthodes soient très détaillées, elles ne concernent que des cas particuliers où les solutions sont positives et en base 60, le système de numérotation babylonien.

Ces diverses méthodes sont enrichies d'arguments géométriques par les grecs de 500 à 300 av. J.-C., et ensuite retrouvées dans les travaux algébriques de al Khwarizmi vers 820-830, dont le verbe souvent utilisé dans ses livres « al jabr »(qui désignait un certain calcul) a donné son nom à l'Algèbre. Si al Khwarizmi propose une méthode claire pour 6 cas différents d'équation du second degré, aucune méthode générale n'est pour autant dégagée...

1.1.2 ... au quadratique algébrique

Il faudra attendre la seconde partie du XVI^e siècle pour que l'italien **Bombelli** introduise la notation x^2 pour désigner le carré et que le français Viète introduise l'utilisation des lettres pour désigner les inconnues, notations que nous utilisons encore aujourd'hui. Muni de ces outils, les mathématiciens de la Renaissance proposèrent alors une méthode claire pour résoudre l'équation du second degré à partir de ses « radicaux », c'est à dire des paramètres numériques de l'équation. Ils furent toutefois confrontés au problème épineux des équations sans solutions, lors de l'apparition de racines négatives... problème que les élèves résoudront peut-être un jour en Terminales, si ils choisissent l'option Mathématiques Expertes.

Cardano (1545) : cubus $\bar{p}$ 6 rebus aequalis 20.

$$x^3 + 6x = 20.$$

Bombelli (1572) : $\overbrace{\text{I.}}^{6}$ p. $\overbrace{\text{8.}}^{3}$ Eguale à 20.

$$x^6 + 8x^3 = 20.$$

Viète (1591) : I QC − 15 QQ + 85 C − 225 Q + 274 N aequatur 120.

$$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120.$$

Harriot (1631) : aaa − 3bba $=\!=\!=$ + 2.ccc.

$$x^3 - 3b^2x = 2c^3.$$

Descartes (1637) : $x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0.$

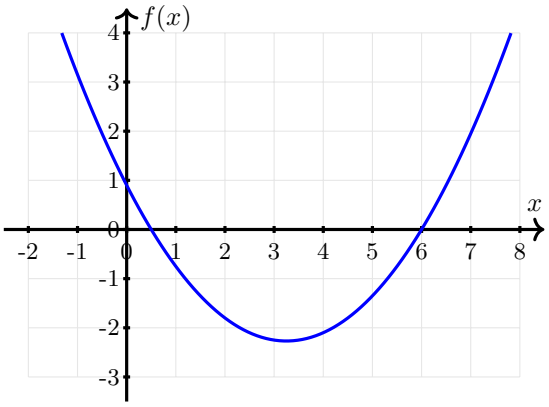
1.2 Fonction polynôme

Définition : On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou encore fonction **trinôme**) toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels et } a \neq 0$$

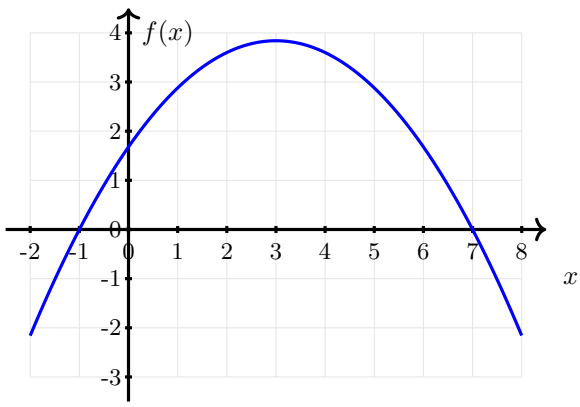
La courbe représentative d'un trinôme est appelée une **parabole**, et selon deux cas :

Cas où $a > 0$



Parabole tournée vers le haut

Cas où $a < 0$



Parabole tournée vers le bas

On appelle **sommet de la parabole** le point le plus haut si $a > 0$, ou le plus bas si $a < 0$.

On appelle **discriminant** du trinôme la valeur de $\Delta = b^2 - 4ac$.

ex : La fonction f qui à tout x réel associe $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$ est un trinôme, et ici :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-5) \\ &= 4 + 60 \\ &= 64\end{aligned}$$

Proposition 1 : Soit f une fonction trinôme définie par a, b et c réels tels que $a \neq 0$ et :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

il existe alors deux réels α et β tels que :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Cette expression de f est appelée **forme canonique**. On sait par ailleurs que :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{\Delta}{4a}$$

◦ Démonstration :

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \\ &= a(\underbrace{x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} \times x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\text{on force l'identité remarquable}} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}) \\ &= a(x + \frac{b}{2a})^2 + a \times \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} \\ &= a(x - (-\frac{b}{2a}))^2 - \frac{\Delta}{4a}\end{aligned}$$

□

ex : La fonction f qui à tout x réel associe $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$ est un trinôme, où :

$$\alpha = -\frac{(-2)}{2 \times 3} = \frac{1}{3} \quad et \quad \beta = -\frac{64}{4 \times 3} = -\frac{16}{3}$$

Ainsi pour tout x réel :

$$f(x) = 3(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{16}{3}$$

Proposition 2 : Le sommet de la parabole de la fonction trinôme f est toujours $(\alpha; \beta)$.
On a alors :

Si $a > 0$ alors :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		↘	β	↗	

β est le minimum de f sur $\mathbb{R}$

Si $a < 0$ alors :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		↗	β	↘	

β est le maximum de f sur $\mathbb{R}$

◦ Démonstration :
On considère le cas $a > 0$, le raisonnement étant analogue dans l'autre cas.

Intervalle $]-\infty; \alpha]$:
Soient u et v deux réels de l'intervalle $]-\infty; \alpha]$ tels que $u < v$. On a ainsi :

$$u < v \leqslant \alpha \Rightarrow u - \alpha < v - \alpha \leqslant 0$$

Or la fonction carré étant décroissante dans le négatif, on en déduit que :

$$(u - \alpha)^2 > (v - \alpha)^2$$

Ainsi a étant positif, on a :

$$a(u - \alpha)^2 + \beta > a(v - \alpha)^2 + \beta \Rightarrow f(u) > f(v)$$

donc f est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$.

Intervalle $[\alpha; +\infty[$:
Soient u et v deux réels de l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ tels que $u < v$. On a ainsi :

$$\alpha \leqslant u < v \Rightarrow 0 \leqslant u - \alpha < v - \alpha$$

Or la fonction carré étant croissante dans le positif, on en déduit que :

$$(u - \alpha)^2 < (v - \alpha)^2$$

Ainsi a étant positif, on a :

$$a(u - \alpha)^2 + \beta < a(v - \alpha)^2 + \beta \Rightarrow f(u) < f(v)$$

donc f est croissante sur $[\alpha; +\infty[$.

Sachant ceci, on a de plus pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &(x - \alpha)^2 \geqslant 0 \\ \Rightarrow\ &a(x - \alpha)^2 + \beta \geqslant \beta \end{aligned}$$

autrement dit pour tout réel x, $f(x) \geqslant \beta$, ce qui prouve que β est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

□

ex : Toujours avec le même exemple, où la fonction f qui à tout x réel associe :

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 5$$

on a alors :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	$-\frac{16}{3}$	↗	

1.3 Solutions de l'équation

Définition :
On appelle **équation du second degré à une inconnue** d'inconnue x toute équation que l'on peut écrire sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont trois nombres réels et } a \neq 0$$

Les nombres a, b et c sont appelés **paramètres** de l'équation.

Proposition 3 : On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$, et Δ le discriminant du trinôme correspondant.

On a alors 3 cas de figure :

Si $\Delta < 0$:	Si $\Delta = 0$:	Si $\Delta > 0$:
Pas de solution réelle.	Une solution réelle : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	Deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Les solutions (si elles existent) de cette équation sont alors aussi appelées **racines** de la fonction trinôme f.

◦ Démonstration : Le plus rapide est d'utiliser la forme canonique :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

Autrement dit :

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Or en regardant cette égalité, on constate qu'un Δ strictement négatif implique qu'on chercherait un nombre au carré qui donne un négatif, ce qui est impossible dans les réels.
De plus, lorsque $\Delta = 0$, on cherche en fait à résoudre :

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$$

ce qui donne rapidement la solution x_0 de la proposition.
Enfin, si $\Delta > 0$, on constate alors que :

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

ce qui en isolant x donne rapidement les solutions x_1 et x_2 de la proposition.

□

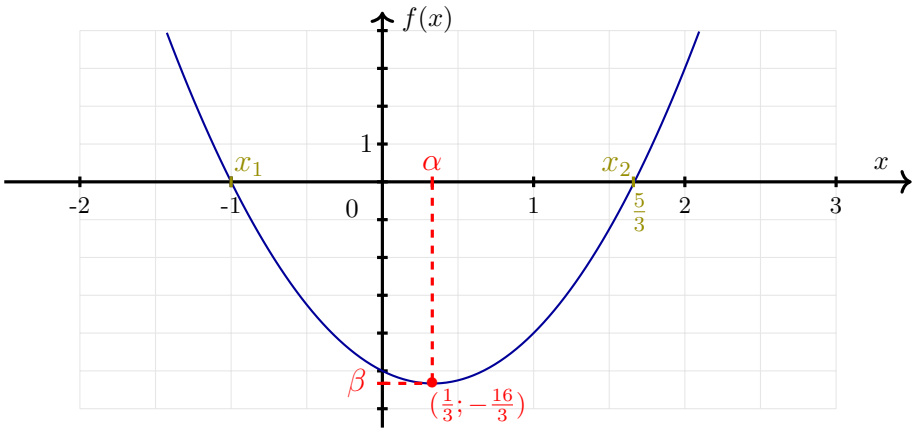
ex : Toujours avec le même exemple, où la fonction f qui à tout x réel associe :

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 5$$

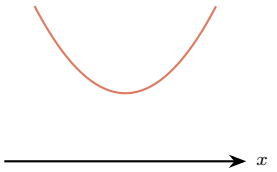
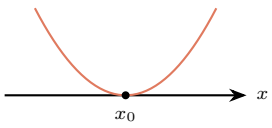
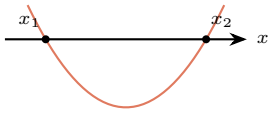
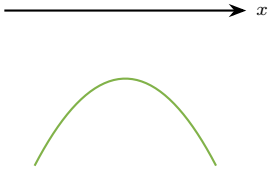
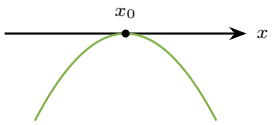
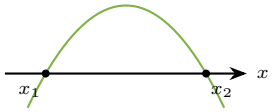
on a alors si on cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0$ un $\Delta = 64 > 0$, ce qui nous donne deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{64}}{2 \times 3} = \frac{2-8}{6} = -1 \qquad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{64}}{2 \times 3} = \frac{2+8}{6} = \frac{5}{3}$$

Muni de toutes les informations précédentes, on peut alors tracer une représentation graphique du trinôme f, en effet les racines de f correspondent à l'abscisses des éventuels points d'intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses :



Graphiquement, plusieurs cas de figure sont donc observés :

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			
	aucune solution	une seule solution x_0	deux solutions x_1 et x_2

1.4 Propriétés des trinômes

Proposition 4 : Soit f un trinôme, a, b et c trois réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Alors, si $\Delta > 0$, on a deux solutions x_1 et x_2 à l'équation $f(x) = 0$, et :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et :} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

∘ Démonstration :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

□

ex : *Cette propriété est intéressante lorsqu'une des deux solutions est évidente. On considère :*

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

on remarque que $x_1 = 1$ *est solution, donc* $x_1 \times x_2 = x_2 = \dfrac{-1}{2}$ *donne l'autre solution.*

Proposition 5 : Factorisation d'un trinôme Soit f un trinôme, a, b et c trois réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Alors :

- Si $\Delta > 0$, on a deux solutions x_1 et x_2 à l'équation $f(x) = 0$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Si $\Delta = 0$, on a une solution x_0 à l'équation $f(x) = 0$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a(x - x_0)^2$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution et $f(x)$ n'est pas factorisable.

∘ Démonstration :
Si $\Delta > 0$:

$$\begin{aligned} a(x-x_1)(x-x_2) &= a(x^2 - xx_2 - x_1x + x_1x_2) \\ &= a(x^2 - x(x_1+x_2) + x_1x_2) \\ &= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \text{ d'après la proposition 1} \\ &= ax^2 + bx + c = f(x) \end{aligned}$$

Si $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned} a(x-x_0)^2 &= a(x^2 - 2xx_0 + x_0^2) \\ &= a(x^2 - 2x \times \frac{-b}{2a} + (\frac{-b}{2a})^2) \\ &= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) \text{ or } \Delta = 0 = b^2 - 4ac \text{ donc } b^2 = 4ac \\ &= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \\ &= ax^2 + bx + c = f(x) \end{aligned}$$

Si $\Delta < 0$ on procède par l'absurde et on considère une factorisation du trinôme par deux fonctions affines. Or par résolution de l'équation par produit nul, cela impliquerait que les racines des fonctions affines seraient solution du trinôme.

□

1.5 Signe d'un trinôme

Proposition 6 : Soit f un trinôme, a, b et c trois réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

On a alors, **si $\Delta > 0$,** $f(x)$ toujours du signe de a à l'extérieur des racines :

Si $a > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

En revanche si $\Delta \leqslant 0$, $f(x)$ est simplement du signe de a et s'annule en l'unique racine x_0 quand $\Delta = 0$.

◦ Démonstration : On considère le cas Δ et $a > 0$. D'après la proposition 2 :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

On dresse donc le tableau de signe des deux fonctions affines factorisées, pour en déduire le signe de $f(x)$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		$+$		$+$		$+$	
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dans le cas où $a < 0$, le tableau final voit ses signes s'inverser.

Si $\Delta = 0$, la factorisation de $f(x)$ donne immédiatement que son signe est celui de a, par positivité du carré.

□

ex : Considérons l'inéquation suivante :

$$2x^2 - x - 1 \geqslant 0$$

Soit f un trinôme tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 2x^2 - x - 1$$

On a vu précédemment que les deux racines de f sont 1 et $-\frac{1}{2}$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

***Attention** à bien ordonner les racines parmi les antécédents !*

On en déduit alors que la solution de l'inéquation est :

$$S = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cap [1; +\infty[$$