Chapitre 2

Notion de suite

2.1 Introduction historique

La répétition est la plus forte des figures de rhétorique.

Napoléon Bonaparte - 1769 – 1821

Alors que le problème ancestral de la diagonale du carré de côté a habitait les mathématiciens depuis Babylone (ou peut-être avant), et que nombreux sont ceux qui ont tenté un calcul par approximation successive, une méthode singulière pour calculer la valeur du nombre $\sqrt{a}$ a émergé sous le nom de **méthode de Héron** au Ier siècle a.p. J-C. Cette méthode, qui calcule un nombre de plus en plus approché de $\sqrt{a}$ en utilisant l'approximation précédente lors du processus, cristallise de façon remarquable la notion découverte dans ce chapitre, celle de **suite**.

2.1.1 Méthode de Héron

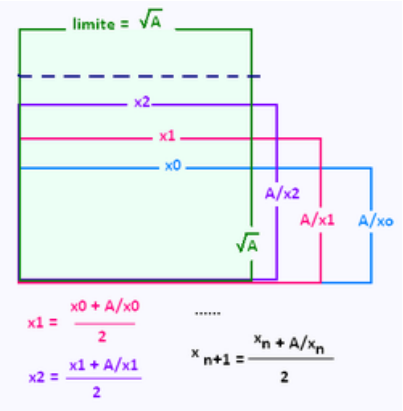
L'idée grecque est la suivante : pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{a}$, il suffirait de trouver la longueur du côté d'un carré qui aurait pour aire a. On construit alors un rectangle de longueur quelconque x, mais d'aire a (la valeur la plus facile à choisir pour x semble être 1). Ainsi, la longueur de l'autre côté est forcément $\frac{a}{x}$. Et là vient l'idée :

Pour transformer le rectangle en notre fameux carré de côté a, on crée un nouveau rectangle, où la longueur sera la **moyenne** entre la longueur et la largeur du premier rectangle, soit :

$$\frac{x + \frac{a}{x}}{2}$$

En réitérant indéfiniment le processus, le rectangle se transforme petit à petit en un carré d'aire a, et donc nous donne l'approximation de $\sqrt{a}$. Pour le calcul de $\sqrt{2}$, on trouve au bout de 5 rectangles :

$$\sqrt{2} \approx 1,414213562373095048801689 6...$$



2.1.2 Formalisation d'une suite

Un enchaînement de nombres dans un certain ordre, a priori infini, donc chacun semble avoir un lien calculatoire avec le précédent : voilà l'idée générale de ce qu'est une suite. Grandement développé lors de la Renaissance, il faudra ensuite attendre **Lagrange** au 18ème siècle avant de connaître la notation indicielle : une suite dénommée u admet pour n-ième nombre u_n. Domaine singulier de l'analyse, d'une fertilité époustouflante, l'étude des suites est centrale dans l'apprentissage mathématique, car elle permet de s'intéresser à toute type de phénomène lié à l'énumération ou à la liste de nombres...

2.2 Généralités

Définition : On appelle **suite numérique** un ensemble infini de nombres réels ordonnés.

Autrement dit, on peut le définir avec des notions connues au lycée comme étant une fonction dont les antécédents sont dans $\mathbb{N}$ et les images dans $\mathbb{R}$.

Ainsi on appelle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la fonction qui à tout élément $n \in \mathbb{N}$ associe un réel u_n :

$$\begin{array}{rcl}(u_n) : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n\end{array}$$

Le nombre n est appelé le **rang** du nombre u_n, qui est appelé le **terme** de la suite.

ex : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des entiers naturels impairs :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	...
1	3	5	7	9	...

Le terme de rang 6 est donc $u_6 = 13$. Le premier terme est ici u_0, mais ce n'est pas forcément le cas, une suite peut commencer à n'importe quel rang suivant la définition qu'on en fait.

Définition : On dit d'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'elle est définie **par récurrence** lorsqu'il existe une fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Autrement dit, chaque terme s'obtient en effectuant le même calcul à partir du terme précédent.

Pour définir complètement la suite de cette façon, il importe de préciser la valeur du premier terme, qui n'a pas de précédent.

ex : Dans l'exemple précédent, la suite des entiers naturels impairs peut se définir par récurrence par la relation :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

Ici la fonction de la définition est la fonction f qui à tout x réel associe $f(x) = x + 2$. De façon générale, on ne donne pas f de façon directe mais simplement la relation calculatoire entre u_{n+1} et u_n.

Toute sorte de calcul peut définir une suite par récurrence, autre exemple avec la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_{n+1} = \dfrac{v_n}{v_n + 3} \\ v_1 = 2 \end{cases}$$

Ici on peut calculer :

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{v_1}{v_1 + 3} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

puis :
$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{v_2}{v_2 + 3} \\ &= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5} + 3} \\ &= \frac{2}{17} \end{aligned}$$
et ainsi de suite...

Définition : On dit d'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'elle est définie de manière **explicite** lorsqu'il existe une fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = f(n)$$

Autrement dit, chaque terme s'obtient en effectuant le calcul directement à partir du rang.

Dans ce cas de figure, il n'est pas nécessaire de donner la valeur du premier terme pour définir complètement la suite.

ex : Encore dans l'exemple précédent, la suite des entiers naturels impairs peut se définir de manière explicite pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 2n + 1$$

On peut également définir des suites par n'importe quel calcul, par exemple la suite w_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$w_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$$

Ici on peut par exemple calculer :

$$w_9 = \frac{\sqrt{9}}{9^2+1} = \frac{3}{82}$$

On constate qu'une formule explicite est bien plus puissante qu'une relation de récurrence, car on peut obtenir n'importe quel terme sans calculer les précédents.

2.3 Variations d'une suite

Définition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $k \in \mathbb{N}$. On dit de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'elle est :

- **croissante** à partir du rang k , si pour tout entier $n \geqslant k$: $u_{n+1} \geqslant u_n$
- **décroissante** à partir du rang k , si pour tout entier $n \geqslant k$: $u_{n+1} \leqslant u_n$

On peut bien entendu définir une stricte croissance ou décroissante en utilisant les symboles d'ordre stricts. On dira de plus d'une suite qu'elle est **constante** à partir du rang k, si pour tout $n \geqslant k$, $u_{n+1} = u_n$.

▽ Méthode :

En pratique, pour trouver le sens de variation d'une suite, on va s'intéresser au signe du rapport $u_{n+1} - u_n$, en le factorisant le plus possible. Montrer qu'un nombre est positif ou négatif est très souvent plus simple que montrer qu'un nombre est plus grand ou plus petit qu'un autre ! Ainsi :

- Si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, la suite est croissante.
- Si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, la suite est décroissante.

On peut dans quelques rares cas et pour gagner du temps également utiliser le fait que :

- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, la suite est croissante.
- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, la suite est décroissante.

ex :

1. *Cherchons à déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de façon explicite pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :*

$$u_n = \frac{3n-2}{n+1}$$

On effectue le calcul suivant pour tout $n \in \mathbb{N}$, en faisant très attention à remplacer dans l'expression de u_{n+1} le n de u_n par un $n+1$ entouré de parenthèses :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{3(n+1)-2}{(n+1)+1} - \frac{3n-2}{n+1} \\
&= \frac{3n+3-2}{n+1+1} - \frac{3n-2}{n+1} \\
&= \frac{3n+1}{n+2} - \frac{3n-2}{n+1} \\
&= \frac{(3n+1)(n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{(3n-2)(n+2)}{(n+1)(n+2)} \longleftarrow \textit{mise au même dénominateur} \\
&= \frac{3n^2+3n+n+1-(3n^2+6n-2n-4)}{(n+1)(n+2)} \longleftarrow \textit{on conserve le dénominateur factorisé} \\
&= \frac{3n^2+3n+n+1-3n^2-6n+2n+4}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{5}{(n+1)(n+2)} > 0
\end{aligned}$$

On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

2. *Cherchons à déterminer le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de façon explicite pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :*

$$v_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$$

On effectue le calcul suivant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{3(n+1)}}{3^{2(n+1)}}}{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}} = \frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}} = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9} < 1$$

On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

2.4 Suites arithmétiques

Définition :
On appelle **suite arithmétique** toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe un réel r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + r$$

Autrement dit une suite est arithmétique si chaque terme est obtenu en ajoutant le même nombre appelé **raison** au terme de rang précédent.

ex : La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$

est une suite arithmétique de raison 2. C'est la suite des nombres pairs.

✠ Méthode :
Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la différence entre u_{n+1} et u_n est constante, autrement dit qu'il existe un réel r tel que :

$$u_{n+1} - u_n = r$$

Par exemple si on considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 3$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1) + 3 - (2n+3) \\ &= 2n + 2 + 3 - 2n - 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est arithmétique de raison 2.

Proposition 1 : Formule explicite
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. On a alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$
- $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + (n-p)r$

∘ Démonstration : Admise, bien qu'intuitivement on devine que pour passer du terme de rang p au terme de rang n, il faut ajouter la raison $(n-p)$ fois... Et la première formule, bien plus souvent utilisée que la deuxième, résulte du cas particulier où $p = 0$.

□

ex : L'intérêt d'une formule explicite est qu'on peut calculer directement le terme de n'importe quel rang, au lieu de calculer successivement les termes à partir d'une relation de récurrence. Considérons la suite (u_n) suivante, donc on cherche la valeur de u_{20} :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{4} \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2} \end{cases}$$

On remarque que c'est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\frac{3}{4}$. On applique alors la formule explicite :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n &= u_0 + nr \\ &= \frac{3}{4} + \frac{n}{2} \\ &= \frac{3+2n}{4} \end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$u_{20} = \frac{3 + 2 \times 20}{4} = \frac{43}{4}$$

2.5 Suites géométriques

Définition :
On appelle **suite géométrique** toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe un réel q tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = v_n \times q$$

Autrement dit une suite est géométrique si chaque terme est obtenu en multipliant par le même nombre appelé **raison** le terme de rang précédent.

ex : La suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 5v_n \end{cases} \quad \textit{est une suite géométrique de raison } 5.$$

✠ Méthode :
Pour montrer qu'une suite (v_n) est géométrique, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le quotient de v_{n+1} par v_n est constant, autrement dit qu'il existe un réel q tel que :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$$

Par exemple si on considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 2 \times 3^n$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 3.

Proposition 2 : Formule explicite
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. On a alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$
- $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $v_n = v_p \times q^{n-p}$

∘ Démonstration : Admise, bien qu'intuitivement on devine que pour passer du terme de rang p au terme de rang n, il faut multiplier par la raison $(n - p)$ fois... Et la première formule, bien plus souvent utilisée que la deuxième, résulte du cas particulier où $p = 0$.

□

ex : Considérons la suite (v_n) suivante, donc on cherche la valeur de v_8 :

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{2} \\ v_{n+1} = 3v_n \end{cases}$$

On remarque que c'est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $\frac{1}{2}$. On applique alors la formule explicite :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ v_n &= v_1 \times q^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} \times 3^{n-1} \\ &= \frac{3^{n-1}}{2} \end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$v_8 = \frac{3^{7-1}}{2} = \frac{3^6}{2} = \frac{729}{2}$$

On peut résumer les formules des deux dernières parties dans un tableau :

	Suite Arithmétique	Suite géométrique
Relation de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$v_{n+1} = v_n \times q$
Formule explicite	$u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n-p)r$	$v_n = v_0 \times q^n$ ou $v_n = v_p \times q^{n-p}$

2.6 Calcul de sommes

Proposition 3 : Somme arithmétique

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

◦ Démonstration : Admise, mais une preuve intuitive peut être étudiée : si on ajoute deux fois la somme des entiers jusqu'à n par ordre croissant puis décroissant on remarque qu'on ajoute n fois le même nombre. Si on note S_n la somme des entiers naturels jusqu'à n :

$$\begin{aligned} 2S_n &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ &\quad + n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \\ &= n \times (n+1) \end{aligned}$$

Et en divisant par 2, on obtient la formule attendue.

□

✠ Méthode / ex : *Si cette formule permet de calculer très rapidement des sommes d'entiers consécutifs, par exemple :*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 15 = \frac{15 \times 16}{2} = 15 \times 8 = 120$$

Elle permet également d'additionner tous les termes d'une suite arithmétique, par exemple :

$$1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 15 + \cdots + 31$$

On remarque une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 3. On comprend alors que le premier terme a été additionné 11 fois, puis la raison autant de fois que de termes :

$$\begin{aligned} 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 31 &= 11 \times 1 + 0 + 3 + 6 + 9 + \cdots + 30 \\ &= 11 + 3 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + 10) \\ &= 11 + 3 \times \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 11 + 3 \times 5 \times 11 \\ &= 176 \end{aligned}$$

Il serait possible de dégager une formule générale pour une somme de termes de suite arithmétique, bien qu'il est mieux de savoir faire le calcul soi-même, on a toujours :

$$\text{Somme des termes} = \text{Nombre de termes} \times \frac{\text{Somme des termes extrêmes}}{2}$$

Dans le cas de l'exemple précédent, cela donne :

$$1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 31 = 11 \times \frac{1 + 31}{2} = 11 \times 16 = 176$$

Proposition 4 : Somme géométrique
Soit $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

∘ Démonstration : Admise, mais une preuve intuitive peut être étudiée : si retranche la somme à q fois elle-même, la plupart des termes se simplifient. Si on note S_n la somme :

$$\begin{aligned} S_n - qS_n &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \\ &\quad - q - q^2 - q^3 - \cdots - q^n - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1} \\ \Rightarrow\ S_n(1-q) &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

Et en divisant par $1 - q$, on obtient la formule attendue.

□

✠ Méthode / ex : *Si cette formule permet de calculer très rapidement des sommes de puissance du même entier, par exemple :*

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^8 = \frac{1 - 2^9}{1 - 2} = 2^9 - 1 = 511$$

Elle permet également d'additionner tous les termes d'une suite géométrique, par exemple :

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \cdots + 384$$

On remarque une suite géométrique de premier terme 3 *et de raison* 2*. On comprend alors que le premier terme a été multiplié* 7 *fois par* 2 *:*

$$\begin{aligned} 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \cdots + 384 &= 3 \times (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 128) \\ &= 3 \times (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \cdots + 2^7) \\ &= 3 \times \frac{1 - 2^8}{1 - 2} \\ &= 3 \times (2^8 - 1) \\ &= 765 \end{aligned}$$

Il serait possible de dégager une formule générale pour une somme de termes de suite géométrique, bien qu'il est mieux de savoir faire le calcul soi-même, on a toujours :

$$\text{Somme des termes} = \text{Premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{Nombre de termes}}}{1 - q}$$

Dans le cas de l'exemple précédent, cela donne directement :

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \cdots + 384 = 3 \times \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 765$$