Chapitre 3

Géométrie Cartésienne

3.1 Introduction historique

> *L'homme, porté par les illusions des sens à se regarder comme le centre de l'univers, se persuade facilement que les astres influent sur sa destinée, et qu'il est possible de la prévoir par l'observation de leurs aspects au moment de la naissance.*
>
> Pierre-Simon Laplace - 1799

Forte d'une histoire millénaire, la longue quête qui chercha réunir Algèbre et Géométrie trouva ses premières réponses formelles dans les travaux de Descartes, qui au travers de sa géométrie analytique, mis en lumière des calculs permettant de retrouver des conclusions géométriques auparavant complexes à justifier. Mais alors que dans ces deux domaines, les ressemblances entre divers objets mathématiques se font de plus en plus nombreuses (point du plan M de coordonnées (a ;b), segment OM, couple ordonnée de nombres (a ;b)...), un problème épineux agite encore les physiciens : que faire lorsque notre géométrie bouge ? Comment introduire le dynamisme, le mouvement, dans ce système si bien réglé de la géométrie cartésienne, tout en tirant des conclusions intéressantes ?

3.1.1 Curiositas hominum vehet

La physique est le moteur de la convergence entre géométrie et algèbre. Alors que les arabes formulèrent des premiers liens entre la résolution d'équations d'un certain degré et la disposition de certaines coniques, il fallut attendre les recherches de Descartes sur l'Optique, de **Newton** (1642-1727) sur le déplacement des astres, pour voir apparaître la première mention du terme Vecteur : « Une ligne dessinée depuis une planète, se déplaçant autour d'un centre ou du foyer d'une ellipse, jusqu'à ce centre ou ce foyer, est appelé Vecteur par quelques auteurs de la Nouvelle Astronomie, car cette ligne semble porter la planète autour du centre. »Transporté en français par **Pierre-Simon Laplace** (1749-1827), en s'appuyant sur le latin vehere (transporter, se déplacer), le concept commençant à se dessiner attendit encore quelques décennies pour réellement se formaliser.

3.1.2 Imaginarius mathematicam vehet

Alors que **Bolzano** (1781-1848) élabore en premier une géométrie projective comprenant une addition et une soustraction, il fallut les travaux au premier abord sans rapport de Gauss puis de Hamilton en Algèbre, sur les nombres imaginaires, pour commencer à concevoir la notion de vecteur comme objet mathématique à proprement parler. Placé enfin dans un « espace vectoriel », bien défini, les vecteurs verront s'offrir leur "multiplication", le produit scalaire, opération innovante qui amènera par la suite des conclusions absolument sidérantes. Véritable mariage entre l'Algèbre et la Géométrie, plus tard étendu à l'Analyse et même à une vision unifiée des mathématiques, la notion de vecteur fini par créer des branches entières de réflexion, ainsi que des conclusions portant sur des conséquences réellement pratiques, comme l'ingénierie, l'électronique ou encore la géologie.



3.2 Vecteurs

3.2.1 Calcul vectoriel

Définition : • On appelle **vecteur du plan**, noté par exemple $\vec{u}$, l'objet mathématique correspondant à une translation du plan (à un déplacement sans rotation), et étant caractérisé par 3 choses :

— la direction (droite parallèle à laquelle le déplacement a lieu)

— le sens

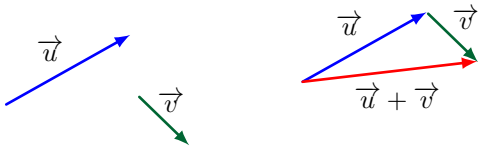
— la norme (ou longueur), notée $\|\vec{u}\|$

Il est ainsi possible de définir un vecteur à l'aide de deux points, par exemple A et B, en désignant la translation transformant le point A en point B. Noté $\overrightarrow{AB}$, ce vecteur a pour direction la droite (AB), pour sens $A \to B$, et pour longueur la distance AB.

• On appelle **coordonnées d'un vecteur** $\vec{u}$ dans un repère $(O; I, J)$ les coordonnées du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

• Pour tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ du plan, on appelle **vecteur opposé** le vecteur $\overrightarrow{BA}$, et on aura $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

• Pour deux vecteurs du plan $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on appelle **vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** le vecteur dont la translation correspondant au déplacement de $\vec{u}$ suivi de celui de $\vec{v}$. Si on le note $\vec{w}$, on aura $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.



Proposition 1 :

Soit un repère du plan $(O; I, J)$, et dans ce repère $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, C et D quatre points quelconques, $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs quelconques, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a alors :

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallèlogramme.
2. **Relation de Chasles :** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
3. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
4. $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
5. $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + y \\ x' + y' \end{pmatrix}$.
6. $\lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

◦ Démonstration :
Voir cours de seconde. □

3.2.2 Colinéarité

Définition :

• Soient $(O; I, J)$ un repère du plan, et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On dira alors que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\vec{u} = \lambda\vec{v}$$

Ainsi, si deux vecteurs sont colinéaires, l'un est un agrandissement de l'autre et ils partagent donc la même direction. Autrement dit, les droites qui portent la direction de chacun de ces vecteurs sont parallèles. Si λ est positif, ils auront même sens, et si λ est négatif sens contraire.

• Pour deux vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on appelle **déterminant** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ la valeur de :

$$det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' - x'y$$

ex : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$. *Ici* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires car :*

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\overrightarrow{u}$$

Proposition 2 :
Soient $(O; I, J)$ un repère du plan, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de de ce plan.
Ainsi, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires **si et seulement si**

$$det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = 0$$

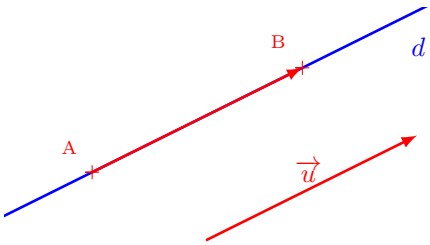
◦ Démonstration :
Voir cours de seconde. □

ex : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$. *Ici* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires car :*

$$det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = 1 \times -9 - (-3) \times 3 = -9 + 9 = 0$$

3.3 Équations de droite

Définition :
• Soit une droite d du plan. On appelle **vecteur directeur** de cette droite d tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont des points de la droite d.



Proposition 3 : Soit une droite d placée dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. Alors tout point de la droite $M(x; y)$ sera solution d'une équation définie par trois réels a, b et c, appelée **équation cartésienne de la droite** d, de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

Cette droite admet deux vecteurs directeurs usuels : $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

ex : Il est primordial de comprendre que tout point de la droite verra ses coordonnées être solutions de cette équation. Ainsi, si l'on considère la droite d'équation :

$$2x + 3y - 8 = 0$$

Le point $A(1; 2)$ *appartiendra à la droite, car :*

$$\begin{aligned} 2 \times 1 + 3 \times 2 - 8 &= 2 + 6 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

En revanche, $B(2; 1)$ ne sera pas un point de la droite, $2 \times 2 + 3 \times 1 - 8 = -1 \neq 0$.

Proposition 4 :

Soit une droite d placée dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.

• Si d n'est **pas parallèle** à l'axe des ordonnées, alors elle admet une unique équation de la forme :

$$y = mx + p$$

appelée **équation réduite** de la droite d, où m et p sont deux réels.

• Si d est **parallèle** à l'axe des ordonnées, alors elle admet une équation de la forme $x = k$, et n'admet pas d'équation réduite.

Le réel m est appelé **coefficient directeur** de la droite, et le réel p son **ordonnée à l'origine**. Un vecteur directeur de d est alors $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

◦ Démonstration : Considérons une droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, où a et b ne sont pas tous les deux nuls. Deux cas se présentent alors :

• Si $b \neq 0$, on peut isoler y dans l'équation :

$$\begin{aligned} & ax + by + c = 0 \\ \Leftrightarrow\ & by = -ax - c \\ \Leftrightarrow\ & y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \end{aligned}$$

ce qui est bien de la forme $y = mx + p$, en posant :

$$m = -\frac{a}{b} \qquad \text{et} \qquad p = -\frac{c}{b}$$

De plus, nous savons par la proposition 3 que $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d. Or ce vecteur est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, puisque :

$$-b \times m - a \times 1 = -b \times \left(-\frac{a}{b}\right) - a = a - a = 0$$

et le déterminant étant nul, $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est donc lui aussi un vecteur directeur de d.

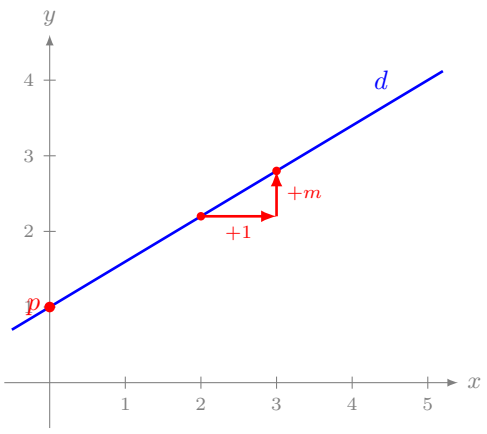
• Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et l'équation devient $ax + c = 0$, c'est-à-dire $x = -\frac{c}{a}$: tous les points de la droite ont la même abscisse, la droite est donc parallèle à l'axe des ordonnées et ne peut pas s'écrire sous la forme $y = mx + p$.

□

Interprétation graphique :

L'ordonnée à l'origine p est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

Le coefficient directeur m indique quant à lui la variation d'ordonnée lorsque l'abscisse augmente de 1 : si l'on avance de 1 vers la droite, on monte de m (ou l'on descend si m est négatif).



ex : Reprenons la droite d'équation cartésienne $2x+3y-8=0$ étudiée plus haut, et déterminons son équation réduite. Comme le coefficient devant y n'est pas nul, il suffit d'isoler y :

$$2x+3y-8=0$$
$$\Leftrightarrow 3y=-2x+8$$
$$\Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$$

Cette droite a donc pour coefficient directeur $m=-\frac{2}{3}$ et pour ordonnée à l'origine $p=\frac{8}{3}$. Elle coupe ainsi l'axe des ordonnées au point de coordonnées $\left(0;\frac{8}{3}\right)$, et son coefficient directeur étant négatif, elle descend de gauche à droite.

Proposition 5 :

Soient deux droites d et d' d'équations cartésiennes respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$, où a, b, c, a', b' et c' sont des réels. Si ces deux droites sont sécantes, alors il existe un point d'intersection dont les coordonnées sont solution des deux équations cartésiennes, autrement dit du **système d'équations** suivant :

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

On appelera alors **système d'équations** tout groupement d'équations à plusieurs inconnues devant être vérifiées par la ou les mêmes solutions.

∘ Démonstration : L'existence d'un point d'intersection pour deux droites sécantes est une évidence, et ce point appartenant aux deux droites, il est donc bien solution des deux équations cartésiennes à la fois.

□

Pour trouver la solution à un système de deux équations et deux inconnues, et donc trouver les coordonnées de ce fameux point d'intersection (**si il existe ! il faut impérativement le vérifier à l'aide des vecteurs directeurs avant de le chercher**) nous étudierons deux méthodes :

∘ **Méthode par substitution :**

Considérons ici le système suivant :

$$\begin{cases} x-2y+5=0 \\ -2x+3y-7=0 \end{cases}$$

Pour cette méthode, nous allons chercher à isoler l'une des deux inconnues dans une des deux équations, afin de l'injecter dans l'autre. Pour ce faire, considérons la première :

$$x-2y+5=0$$
$$\Leftrightarrow x=2y-5$$

Connaissant donc cette expression de x, on peut l'injecter dans la seconde équation, afin d'obtenir une équation qui n'a qu'une seule inconnue :

$$-2x+3y-7=0$$
$$\Leftrightarrow -2(2y-5)+3y-7=0$$
$$\Leftrightarrow -4y+10+3y-7=0$$
$$\Leftrightarrow -y+3=0$$

Ce qui nous donne enfin $y=3$. Ayant ainsi y, nous pouvons reprendre notre expression isolée de x obtenue plus tôt pour en déduire sa valeur numérique :

$$x=2y-5$$
$$\Leftrightarrow x=2\times 3-5$$
$$\Leftrightarrow x=1$$

On en déduit alors que la solution de ce système est le couple $(1;3)$.

◦ **Méthode par combinaison linéaire :**

Considérons ici le système suivant :

$$\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \ (e_1) \\ -2x + 3y - 7 = 0 \ (e_2) \end{cases}$$

Pour cette méthode, nous allons utiliser l'idée que chaque équation étant équilibrée, il nous est possible d'en ajouter chaque extrémité d'une équation à l'autre, car cela ne déséquilibrera pas l'égalité. Autrement dit, si on on ajoute la partie de gauche de l'équation 1 à la partie de gauche de l'équation 2, elle restera vraie car elles valent toutes les deux 0, et $0 + 0 = 0$. Mais pourquoi utiliser un tel procédé ? Parce qu'on remarque ici qu'en ajoutant deux fois l'équation 1 à l'équation 2, les x vont simplement disparaître par simplification, ne laissant que des y. Ainsi :

$$(e_2) + 2 \times (e_1)$$

$$\text{donne : } -2x + 3y - 7 + 2 \times (x - 2y + 5) = 0 + 0$$
$$\Leftrightarrow -2x + 3y - 7 + 2x - 4y + 10 = 0$$
$$\Leftrightarrow -y + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow y = 3$$

Et alors en reprenant l'équation 1 :

$$x - 2y + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 2 \times 3 + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

On retrouve donc comme solution le couple $(1; 3)$.

Quelle méthode utiliser ?

Comme on le remarque dans nos énoncés, ces deux méthodes donnent la même solution et sont donc toutes les deux valables. Le choix d'utilisation restera donc à faire selon la maîtrise qu'on a de l'une ou de l'autre, ou bien de la facilité avec laquelle elle s'applique.

En effet, la méthode par substitution occasionne souvent des calculs plutôt lourds, notamment si aucune inconnue n'a pas de facteur devant elle (comme dans l'exemple), mais elle demeurera la plus simple à mettre en oeuvre car ne nécessitant que peu de réflexion ou d'anticipation.