Chapitre 4

Dérivation

4.1 Introduction historique

Dieu n'est pas l'éternité, il n'est pas l'infini, mais il est éternel et infini. Il n'est ni la durée ni l'espace, mais il a existé de tout temps et sa présence est partout.

Isaac Newton - 1643-1727

Arrivé au milieu du $XVII^e$ siècle, la recherche en mathématiques restait dominée par la production de deux francais : Descartes et Pascal. Mais alors que le nombre de mathématiciens de multipliait et leurs publications étaient toujours plus nombreuses, un problème vieux comme les grecs résistaient encore à leur esprit : comment résoudre le problème de la quadrature du cercle ?

Ce problème viendra nourrir les travaux non seulement de Descartes et Pascal, mais également ceux du français **Pierre de Fermat**, de l'anglais **Isaac Newton**, et de l'allemand **Gottfried Leibniz**, qui s'apprêtent à réaliser que cette réflexion est étroitement liée à celle d'un autre problème géométrique : celui de la recherche d'une tangente à un point donnée d'une courbe. Alors que le $XVII^e$ siècle viendra à bout de cette quête, il donnera en fait au monde la manipulation d'un être mathématique tout à fait particulier : l'infini. De même que les algébristes italiens surent dépasser la répugnance des grecs à travailler avec des nombres sans signitifcation géométrique, fondant l'Algèbre moderne, les mathématiciens du siècle de Newton et Leibniz auront l'audace de mathématiser l'infini, entreprise particulièrement redoutable, donnant naissance à l'Analyse moderne.

4.1.1 Indivisibles invisibles

Première étape d'un projet fort ambitieux, le travail de l'italien **Francesco Bonaventura Cavalieri** (1635) propose d'utiliser un découpage des figures géométriques en d'innombrables « languettes », toutes rectangulaires, permettant de remplir toute forme par une très nombreuse somme de surfaces facile à mesurer, approchant ainsi *infiniment près* l'aire de l'objet étudié. En réduisant alors la largeur des languettes « à l'infini », celle des longueurs augmentant « à l'infini », la quadrature des paraboles ou de toute sorte de conique se trouve alors à portée de calcul. Mais comment formaliser une telle pratique ?

4.1.2 Calcul infinitésimal

Pendant que les géomètres s'initient à la manipulation de l'infini en suivant la méthode des indivisibles de Cavalieri, d'autres continuent d'exploiter les ressources de cette géométrie « analytique ». En effet, l'idée du calcul bientôt appelé *infinitésimal* réside dans l'approche d'un certain type de nombres, quotient de deux réels infiniment petits, évoluant chacun à leur rythme en direction de 0. Il faut bien comprendre ici que si la division $\frac{0}{0}$ n'a aucun sens en mathématiques, celle-ci, qui lui ressemble beaucoup, en a un :

$$\frac{0,00000000006}{0,00000000003} = 2$$

Derrière cette invention, il se trouve deux découvreurs, simultanés mais indépendants : l'Anglais **Newton** et l'Allemand **Leibniz**. Alors que le premier cherche à non seulement considérer des figures géométriques, mais aussi des grandeurs physiques comme la vitesse ou la force, en inventant le terme de *fluxion* et en considèrant les différences de vitesse entre par exemple la croissance de x^2 et x^3, le second reprend le travail des algébristes pour formaliser ce travail à l'infini, pour décrire en plusieurs ouvrages le formalisme qu'on utilise aujourd'hui :

$$\lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{dx}{dy} = y'(x)$$

4.2 Taux de variation et nombre dérivé

4.2.1 Taux de variation

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et deux réels distincts a et b appartenant à I. On appelle **taux de variation** de f entre b et a la valeur du quotient :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

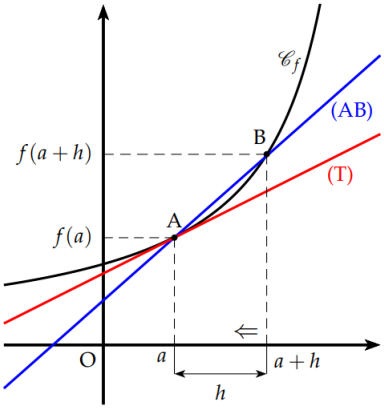
Remarque :

— Le taux de variation est également appelé **coefficient directeur** de la droite passant par les points $(a;f(a))$ et $(b;f(b))$.

— On aura souvent en pratique l'existence d'un réel $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $b = a+h$. Ainsi le taux de variation s'écrira :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

L'objectif de ce cours sera de rapprocher h infiniment près de 0 afin que la droite passant par les points $A(a;f(a))$ et $B(a+h;f(a+h))$ viennent épouser l'allure de la courbe en $(a;f(a))$, devenant la tangente (T) à la courbe de f en a :



Ainsi, la taux de variation de la courbe nous donnera une information précise sur la variation de f en ce point, car si un coefficient directeur de droite est positif, la droite monte, etc.

4.2.2 Nombre dérivé

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a, h \in I$ tels que $h \neq 0$ et $a+h \in I$.

On dit alors que si le taux de variation de f entre a et $a+h$ admet une « limite »lorsque h « tend »vers 0 (se rapproche infiniment près d'un nombre réel), alors la fonction f est **dérivable** en a.

On appelle alors la valeur de cette limite du taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h « tend »vers 0 le **nombre dérivée de f en a**. On le note $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

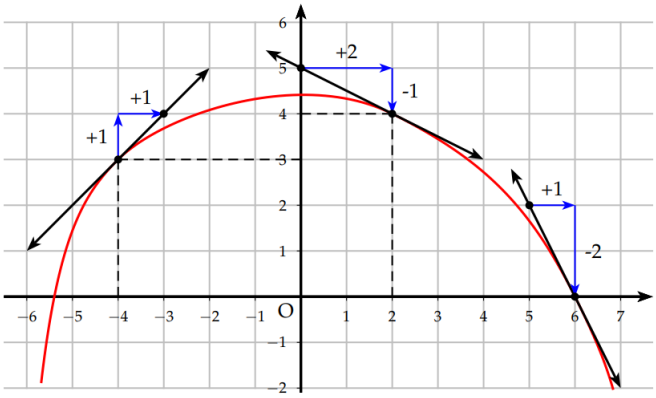
Remarque :

— La notion de limite sera précisément définie en Terminale, on se contente alors d'une définition intuitive en première.

ex : On propose un exemple graphique à ce nombre dérivé.

• *Considérons une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, telle qu'on cherche à connaître sa variation en -4, en 2 et en 6. Si on trace la courbe de f, il est possible de tracer les tangentes de f en ces points, et d'en déduire une valeur approximative des valeurs suivantes :*

- $f(-2)$ *et* $f'(-2)$
- $f(4)$ *et* $f'(4)$
- $f(6)$ *et* $f'(-6)$



On lit alors les images et les nombres dérivés suivants :

$$\begin{cases} f(-4) = 3 \\ f'(-4) = \dfrac{1}{1} = 1 \end{cases} ; \begin{cases} f(2) = 4 \\ f'(2) = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} ; \begin{cases} f(6) = 0 \\ f'(6) = \dfrac{-2}{1} = -2 \end{cases}$$

4.3 Fonction dérivée

4.3.1 Généralité

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dira alors que f est **dérivable** sur I si f est dérivable pour tout $a \in I$.
- On définit ainsi la **fonction dérivée de f** comme étant la fonction qui à chaque élément x de I associe le nombre dérivé de f en x. On notera cette fonction f'.
- L'ensemble des réels de I pour lesquels f' est définie est appelé **ensemble de dérivabilité de f**.

ex : Considérons une fonction affine f quelconque, telle qu'il existe a et b deux réels où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$$

Ainsi, si on calcule le taux de variation en x, on a pour $h > 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

Or a étant invariant on en déduit que si h se rapproche infiniment près de 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a$$

Donc la fonction affine f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et de fonction dérivée f' telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = a$$

4.3.2 Fonction usuelles

Proposition 1 : Soit $n \in \mathbb{Z}^*$.
On appelle et définit la fonction f dite **puissance** n par $f(x) = x^n$. On sait alors que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour fonction dérivée :

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

◦ Démonstration : Admise. □

ex :

— *Si $n = 2$, on a alors en particulier $f(x) = x^2$, ce qui donne $f'(x) = 2x$.*

— *Si $n = 3$, on a alors en particulier $f(x) = x^3$, ce qui donne $f'(x) = 3x^2$.*

Proposition 2 : Soit la **fonction inverse** f définie pour tout x réel non nul par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On sait que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et a pour fonction dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

∘ Démonstration :

• Soit f définie comme étant la fonction inverse. On obtient alors le taux de variation de f pour tout $a \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h}\\ &= \frac{\dfrac{a}{a(a+h)}-\dfrac{a+h}{a(a+h)}}{h}\\ &= \frac{\dfrac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h}\\ &= \frac{\dfrac{-h}{a(a+h)}}{h}\\ &= -\frac{1}{a(a+h)}\end{aligned}$$

Or (et on l'admettra ici), la limite de $-\dfrac{1}{a(a+h)}$ lorsque h tend vers 0 est bien $-\dfrac{1}{a^2}$.

• Autre démonstration : on applique la propriété 1 avec un $n = -1$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*,\ (x^{-1})' &= -1 \times x^{-2}\\ &= -\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

□

Proposition 3 : Soit la **fonction racine carrée** f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$ On sait que cette fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$, et a pour fonction dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

∘ Démonstration : On calcule le taux de variation pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{h})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

On en déduit par passage à la limite :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

□

Soit $k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On déduit de tout ce qui précède un tableau des dérivées usuelles, où D_f désigne l'ensemble de définition de f et $D_{f'}$ celui de f' :

Fonction	D_f	Dérivée	$D_{f'}$
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$

4.3.3 Opérations et dérivation

Proposition 4 : Somme et produit par un réel

Soit u et v deux fonctions défininies et dérivables sur un intervalle I et k un réel. On peut alors définir :

— la fonction $f = u + v$, définie et dérivable sur I, de fonction dérivée $f' = u' + v'$.

— la fonction $g = ku$, définie et dérivable sur I, de fonction dérivée $g' = ku'$.

∘ Démonstration : Soient u, v, f et g définies dans les conditions énoncées par la proposition. On en déduit alors premièrement le taux de variation de f en $a \in I$, pour $h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \in I$:

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h) + v(a+h) - u(a) - v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}\end{aligned}$$

Ce qui, lorsque h tend vers 0, nous donne :

$$f'(a) = u'(a) + v'(a)$$

Même méthode pour g, cette fois ci en factorisant par k.

□

ex :

— *Prenons la fonction f définit par $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et chaque partie de la somme qui la compose peut être dérivée en utilisant les résultats précédents. On obtient ainsi :*

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3 \times 2x + 4 \\ &= 6x + 4\end{aligned}$$

Proposition 5 : Produit de fonctions

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. On définit alors la fonction f par $f = u \times v$. Cette fonction est définie et dérivable sur I, de fonction dérivée f' telle que :

$$\forall x \in I,\ f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

∘ Démonstration : Soit f définie comme dans la proposition 5. On obtient alors le taux de variation de f pour $a \in I$:

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(u\times v)(a+h)-(u\times v)(a)}{h}\\ &= \frac{u(a+h)\times v(a+h)-u(a)\times v(a)}{h}\\ &= \frac{u(a+h)\times v(a+h)-u(a+h)\times v(a)+u(a+h)\times v(a)-u(a)\times v(a)}{h}\\ &= \frac{u(a+h)\times (v(a+h)-v(a))-(u(a+h)-u(a))\times v(a)}{h}\\ &= u(a+h)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}+\frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a)\end{aligned}$$

En voyant apparaître le taux de variation de v et de u, on peut en déduire le résultat recherché lorsque h tend vers 0.

□

ex : Considérons la fonction f définie pour tout x réel positif par :

$$f(x) = \sqrt{x}(x^2+1)$$

On pose alors :

$$\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = x^2+1 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v'(x) = 2x \end{cases}$$

On en déduit alors que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\times(x^2+1)+\sqrt{x}\times 2x\\ &= \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}\times\sqrt{x}\times 2x}{2\sqrt{x}}\\ &= \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}}+\frac{4x^2}{2\sqrt{x}}\\ &= \frac{5x^2+1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Proposition 6 : Quotient de fonctions

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, telles que pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$. On définit alors la fonction f par $f = \dfrac{u}{v}$. Cette fonction est définie et dérivable sur I, de fonction dérivée f' telle que :

$$\forall x \in I,\ f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

∘ Démonstration : Admise. □

Remarque :

— Cas particulier facile à démontrer : lorsque pour tout $x \in I$, $u(x) = 1$, on obtient ainsi :

$$f'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}$$

ex : Considérons la fonction f définie pour tout x réel positif par :

$$f(x) = \frac{x-5}{2x+1}$$

On pose alors :

$$\begin{cases} u(x) = x-5 \\ v(x) = 2x+1 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 2 \end{cases}$$

On en déduit alors que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{1 \times (2x+1) - (x-5) \times 2}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{2x + 1 - 2x + 10}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{11}{(2x+1)^2} \end{aligned}$$

Proposition 7 : Composition de fonction Soit v et u deux fonctions respectivement définies et dérivables sur un intervalle I et $v(I)$. On définit alors la fonction f pour tout $x \in I$ par $f(x) = u(v(x))$.

Aussi noté : $f = u \circ v$

Cette fonction est définie et dérivable sur I, de fonction dérivée :

$$\forall x \in I,\ f'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$$

∘ Démonstration : Admise. □

Remarque :

— Cas particulier facile à démontrer : lorsque pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $v(x) = ax + b$, on obtient ainsi :

$$f'(x) = au'(ax + b)$$

ex : Considérons la fonction f définie pour tout x réel positif par :

$$f(x) = \sqrt{3x+1}$$

On pose alors :

$$\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = 3x + 1 \end{cases} \quad \text{ce qui donne :} \quad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v'(x) = 3 \end{cases}$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= v'(x) \times u'(v(x)) \\ &= 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \end{aligned}$$

On déduit de tout ce qui précède un tableau des règles de dérivation :

Dérivée de la somme	$(u+v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un réel	$(ku)' = ku'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
Dérivée de la composée	$(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$

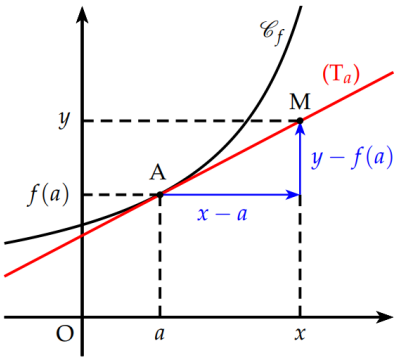
4.4 Équation de tangente

Définition :
Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O; I, J)$. Soit a un réel de l'intervalle I tel que f est dérivable en I, et $A = (a; f(a))$.

On appelle alors **tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A** la droite (T_a) d'équation :

$$(T_a) \quad : \quad y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Cette droite a pour coefficient directeur $f'(a)$ et passe par le point A.



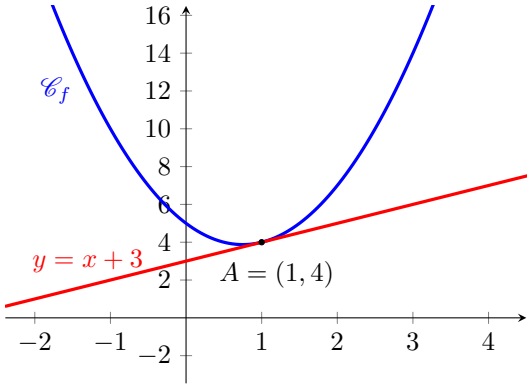
ex : *On considère la fonction f définie pour tout x dans $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

Cherchons l'équation de la tangente en 1 :
Premièrement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x - 3$, donc $f'(1) = 1$. On remarque par ailleurs que $f(1) = 2 - 3 + 5 = 4$, on en déduit alors que l'équation de (T_1) est :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ &= 1 \times (x - 1) + 4 \\ \Rightarrow y &= x + 3 \end{aligned}$$

On peut donc tracer la tangente :



4.5 Dérivée et variation

4.5.1 Variations

Proposition 8 : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si la fonction dérivée f' est **nulle**, alors f est **constante**.
- Si la fonction dérivée f' est strictement **positive**, alors f est strictement **croissante**.
- Si la fonction dérivée f' est strictement **négative**, alors f est strictement **décroissante**.

◦ Démonstration : Admise. Cette démonstration relève de l'enseignement supérieur, notamment par l'utilisation du Théorème des accroissements finis.

□

✠ Méthode :

On utilise cette propriété pour déterminer les variations de n'importe quelle fonction à partir du signe de sa fonction dérivée. Considérons par exemple la fonction f suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$$

On calcule sa fonction dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -3x^2 + 6x$$

Et on peut dresser le tableau de signes de cette dernière en la factorisant, car on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x(2-x)$.

Ainsi les deux racines de ce trinôme sont 0 et 2, et on sait que le signe de f' sera négatif à l'extérieur de ces racines. On obtient donc :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	6	↘	$-\infty$

4.5.2 Extrema

Proposition 9 : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- Soit $c \in I$, si $f(c)$ est un **extremum** local de f sur I, alors $f'(c) = 0$.
- Soit $c \in I$, si $f'(c) = 0$ et f' change de signe en c, alors $f(c)$ est un **extremum** local de f sur I.

◦ Démonstration : Relève de l'enseignement supérieur, mais on peut considérer une piste intuitive :

— Si $c \in I$ est un extremum local de f sur I, alors il y a un changement de variation en c, donc un changement de signe, d'où $f'(c) = 0$.

— Si $c \in I$, $f'(c) = 0$ et f' change de signe en c, alors les variations changent en c, et on peut majorer ou minorer par $f(c)$, d'où le résultat.

ex : Dans le point méthode précédent, on peut constater deux extremums :

- *Un minimum local en* 0, *valant* 2, *car* $f'(0) = 0$ *et* $f(0) = 2$.
- *Un maximum local en* 2, *valant* 6, *car* $f'(2) = 0$ *et* $f(2) = 6$.