Chapitre 6

Trigonométrie

6.1 Introduction historique

Ô Mathématiques sévères, je ne vous ai pas oubliées,
depuis que vos savantes leçons, plus douces que le miel,
filtrèrent dans mon coeur, comme une onde rafraîchissante.
...
Arithmétique ! Algèbre ! Géométrie !
trinité grandiose ! triangle lumineux !
Celui qui ne vous a pas connues est un insensé !
Il mériterait l'épreuve des plus grands supplices ;
car, il y a du mépris aveugle dans son insouciance ignorante ;

Comte de Lautréamont - 1869

Fondé par la curiosité de quelques astronomes ou marins grecs, la science des angles et de leur rapport aux longueurs a connu une fécondité surprenante. Alors que le mot trigonométrie émerge à la fin du XVIème siècle, les indiens ou les arabes utilisèrent pendant des siècles les cordes de Hipparque et nombreux furent les astronomes à utiliser la règle de **Ptolémée**, sans se douter que le cosinus et le sinus qui nommeront ces longueurs mèneront un jour à la création d'une discipline entière en mathématiques, aux conséquences sans précédent dans l'étude des fonctions périodiques : **l'analyse harmonique**. L'objet de ce cours sera ainsi de définir clairement ce triangle mathématique déjà connu des élèves de seconde, afin de le pousser plus tard jusqu'à l'analyse fonctionnelle : cosinus, sinus et tangente.

6.1.1 Complexité de noms, simplicité d'idée

Lorsqu'elle n'était encore qu'une partie de la géométrie, la trigonométrie vit le jour, ou du moins la tradition la date au début du IIème siècle, alors qu'**Hipparque**, mathématicien grec, s'intéressa dans son ouvrage *Tables de cordes* à la longueur des cordes engendrées par un angle issu du centre d'un cercle de rayon 1. Ainsi chaque angle voyait s'y correspondre une longueur, et une seule. Il fallut attendre 1460 pour que le mathématicien allemand **Johann Müller Regiomontanus** compile le savoir des grecs avec celui des indiens et des arabes pour établir une vraie étude des relations entre les angles. Suite à ce travail, un certain **Bartholomée Pitiscus** publiera à la fin du XVIème un ouvrage appelé *Trigonometria*, qui fixera l'étude de cette partie de la géométrie au nom qu'on utilise aujourd'hui. À cette époque, les relations entre le cosinus, le sinus, et la tangente, ainsi que leur lien étroit au cercle et aux longueurs qui le composent furent pratiquement toutes fermement établies.

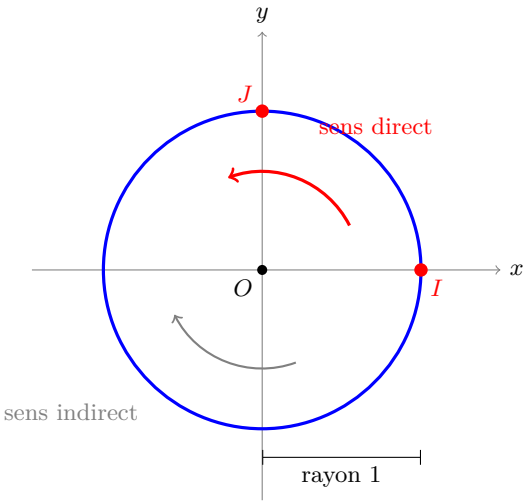


6.2 Angles orientés

6.2.1 Le cercle trigonométrique

Définition : Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1, sur lequel on a choisi un **sens de parcours** :

- le **sens direct** (ou **positif**, ou **trigonométrique**) est le sens inverse des aiguilles d'une montre ;
- le **sens indirect** (ou **négatif**) est celui des aiguilles d'une montre.



Définition : On appelle **radian** l'unité d'angle telle que la mesure d'un angle au centre soit égale à la **longueur de l'arc** qu'il intercepte sur le cercle trigonométrique.

Le tour complet mesurant 2π en radians et 360 en degrés, les deux unités sont proportionnelles :

$$\frac{\alpha_{\text{rad}}}{\pi} = \frac{\alpha_{\text{deg}}}{180}$$

*rq : Le radian n'est donc pas une unité comme les autres : c'est une **longueur**, celle de l'arc parcouru. C'est pourquoi on l'omet souvent dans les écritures, et qu'un angle en radians est simplement un nombre réel.*

Degrés	0	30	45	60	90	180	360
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

ex : Convertissons 75 degrés en radians. La proportionnalité donne :

$$\alpha_{rad} = \frac{75 \times \pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$$

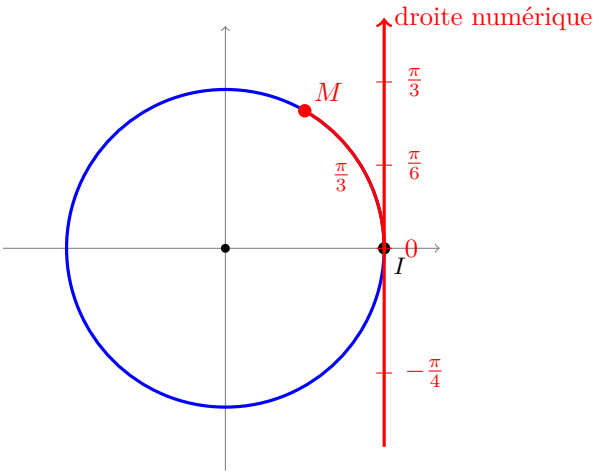
Inversement, convertissons $\frac{7\pi}{6}$ *radians en degrés :*

$$\alpha_{deg} = \frac{\frac{7\pi}{6} \times 180}{\pi} = \frac{7 \times 180}{6} = 210 \text{ degrés}$$

6.2.2 Enroulement de la droite numérique

Définition : On considère la droite numérique verticale tangente au cercle trigonométrique au point I, orientée vers le haut. En l'**enroulant** autour du cercle, dans le sens direct pour les nombres positifs et indirect pour les négatifs, on associe à **tout réel** x un unique point M du cercle.

On dit alors que M est le **point image** du réel x.



Proposition 1 :

Soit x un réel de point image M. Alors les réels ayant le **même** point image M sont exactement les réels de la forme :

$$x + 2k\pi \qquad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

∘ Démonstration : Un tour complet du cercle correspond à un parcours de longueur 2π. Partir de M et effectuer k tours complets, dans un sens ou dans l'autre, ramène donc exactement au même point, ce qui revient à ajouter k fois 2π au réel x. Réciproquement, deux réels ayant le même point image diffèrent d'un nombre entier de tours.

□

*rq : C'est là toute la nouveauté par rapport au collège : un même point du cercle correspond désormais à une **infinité** de réels. Ainsi* $\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$ *et* $-\frac{5\pi}{3}$ *ont tous le même point image.*

6.2.3 Mesure principale

Définition : Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, il en existe une et une seule appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$: on l'appelle la **mesure principale** de cet angle.

Méthode :

Pour déterminer la mesure principale d'un angle de mesure x :

- on cherche l'entier k tel que $x - 2k\pi$ appartienne à $]-\pi\,;\pi]$, en calculant $\frac{x}{2\pi}$ pour estimer le nombre de tours ;
- on retranche alors $2k\pi$ à la mesure de départ.

ex : Déterminons la mesure principale de $\frac{29\pi}{4}$. *On calcule d'abord le nombre de tours :*

$$\frac{29\pi}{4} \div 2\pi = \frac{29}{8} = 3,625$$

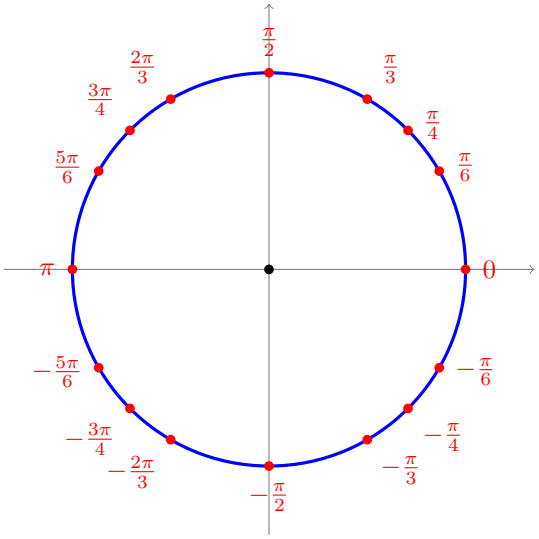
Il y a donc un peu plus de trois tours complets. Retranchons-en trois, soit 6π *:*

$$\frac{29\pi}{4} - 6\pi = \frac{29\pi}{4} - \frac{24\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

Or $\frac{5\pi}{4}$ *n'appartient pas à* $]-\pi\,;\pi]$, *puisque* $\frac{5\pi}{4} > \pi$. *Retranchons donc un tour de plus :*

$$\frac{5\pi}{4} - 2\pi = \frac{5\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$$

Cette fois $-\pi < -\frac{3\pi}{4} \leqslant \pi$ *: la mesure principale cherchée est donc* $-\frac{3\pi}{4}$.



rq : Ce cercle est à connaître par cœur : il donne d'un seul coup d'œil les mesures principales des angles usuels. Remarquez la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, qui échange un angle et son opposé.

6.3 Sinus et cosinus d'un angle

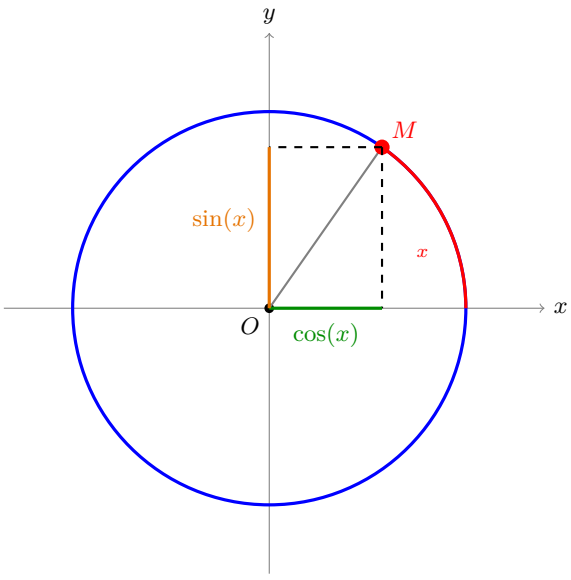
6.3.1 Définitions

Définition : Soit x un réel de point image M sur le cercle trigonométrique. On appelle :

- **cosinus** de x, noté $\cos(x)$, l'**abscisse** du point M ;
- **sinus** de x, noté $\sin(x)$, l'**ordonnée** du point M ;
- **tangente** de x, notée $\tan(x)$, le quotient du sinus par le cosinus :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Autrement dit, M a pour coordonnées $(\cos(x)\,;\sin(x))$. La tangente n'est définie que lorsque $\cos(x) \neq 0$, c'est-à-dire pour $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Proposition 2 :

Pour tout réel x et tout entier relatif k :

- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$;
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$;
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.

◦ Démonstration : Le point M appartenant au cercle de centre O et de rayon 1, ses coordonnées sont comprises entre -1 et 1, ce qui donne le premier point. De plus, la distance OM vaut 1, or dans un repère

orthonormé :

$$OM = \sqrt{(\cos(x)-0)^2 + (\sin(x)-0)^2} = \sqrt{\cos^2(x)+\sin^2(x)}$$

d'où $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1^2 = 1$. Enfin, x et $x+2k\pi$ ont le même point image d'après la proposition 1, donc les mêmes coordonnées.

□

ex : Sachant que $\cos(x) = \dfrac{3}{5}$ *et que* x *appartient à* $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, *calculons* $\sin(x)$. *La relation fondamentale donne :*

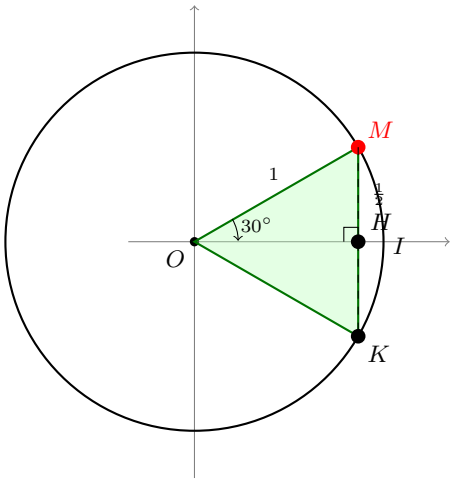
$$\sin^2(x) = 1-\cos^2(x) = 1-\frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

donc $\sin(x) = \dfrac{4}{5}$ *ou* $\sin(x) = -\dfrac{4}{5}$. *Or le point image se situe dans le premier quadrant, où l'ordonnée est positive : on conclut que* $\sin(x) = \dfrac{4}{5}$.

6.3.2 Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

∘ Démonstration : Soit $(O;I,J)$ un repère orthonormé, et M le point du cercle trigonométrique associé au réel x. Traitons le cas $x = \dfrac{\pi}{6}$, c'est-à-dire $\widehat{IOM} = 30°$.



Notons H le projeté orthogonal de M sur (OI), et K le symétrique de M par rapport à (OI). L'angle $\widehat{MOK}$ mesure alors 60°, et comme $OM = OK = 1$, le triangle OMK est **équilatéral** de côté 1.

Le segment $[OH]$ en est la hauteur issue de O, donc H est le milieu de $[MK]$ et :

$$MH = \frac{MK}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Le triangle OMH étant rectangle en H, le théorème de Pythagore donne :

$$OM^2 = MH^2 + OH^2$$
$$\Rightarrow\ 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + OH^2$$
$$\Rightarrow\ OH^2 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
$$\text{d'où :}\ OH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On en déduit $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Les autres colonnes s'obtiennent de la même façon : pour $x = \dfrac{\pi}{4}$, le point M est sur la bissectrice du premier quadrant, donc son abscisse et son ordonnée sont égales, et la relation $\cos^2+\sin^2 = 1$ donne aussitôt $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour les deux.

□

rq : Le tableau se retient facilement en observant que la ligne des sinus est la ligne des cosinus ***lue à l'envers*** *: c'est une conséquence de la symétrie par rapport à la bissectrice, sur laquelle nous reviendrons avec la formule liant* x *et* $\frac{\pi}{2}-x$.

6.3.3 Angles associés

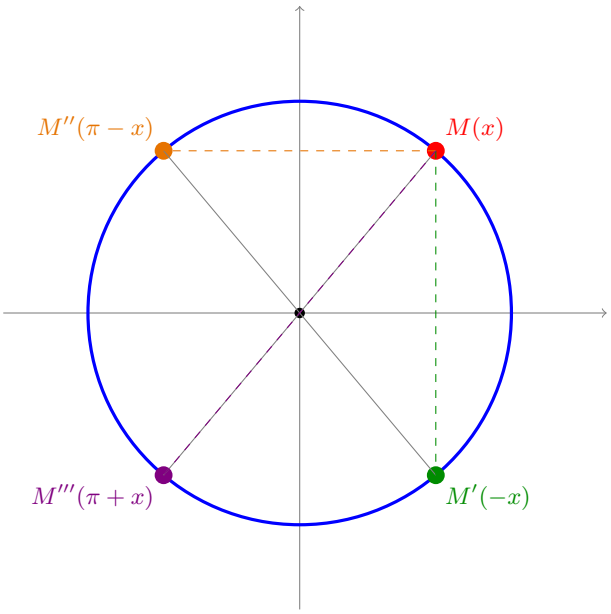
Proposition 3 :

Pour tout réel x, on a les relations suivantes :

	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$
cos	$\cos(x)$	$-\cos(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
sin	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$

∘ Démonstration : Chacune de ces relations traduit une **symétrie** du cercle trigonométrique, comme le montre la figure ci-dessous. Le point image de $-x$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses : son abscisse est donc inchangée et son ordonnée est opposée, ce qui donne la première colonne. De même, le point image de $\pi - x$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées, et celui de $\pi + x$ son symétrique par rapport à l'origine O.

□



ex : Calculons $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ *à l'aide des angles associés.*

Pour le premier, on remarque que $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$*, donc :*

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

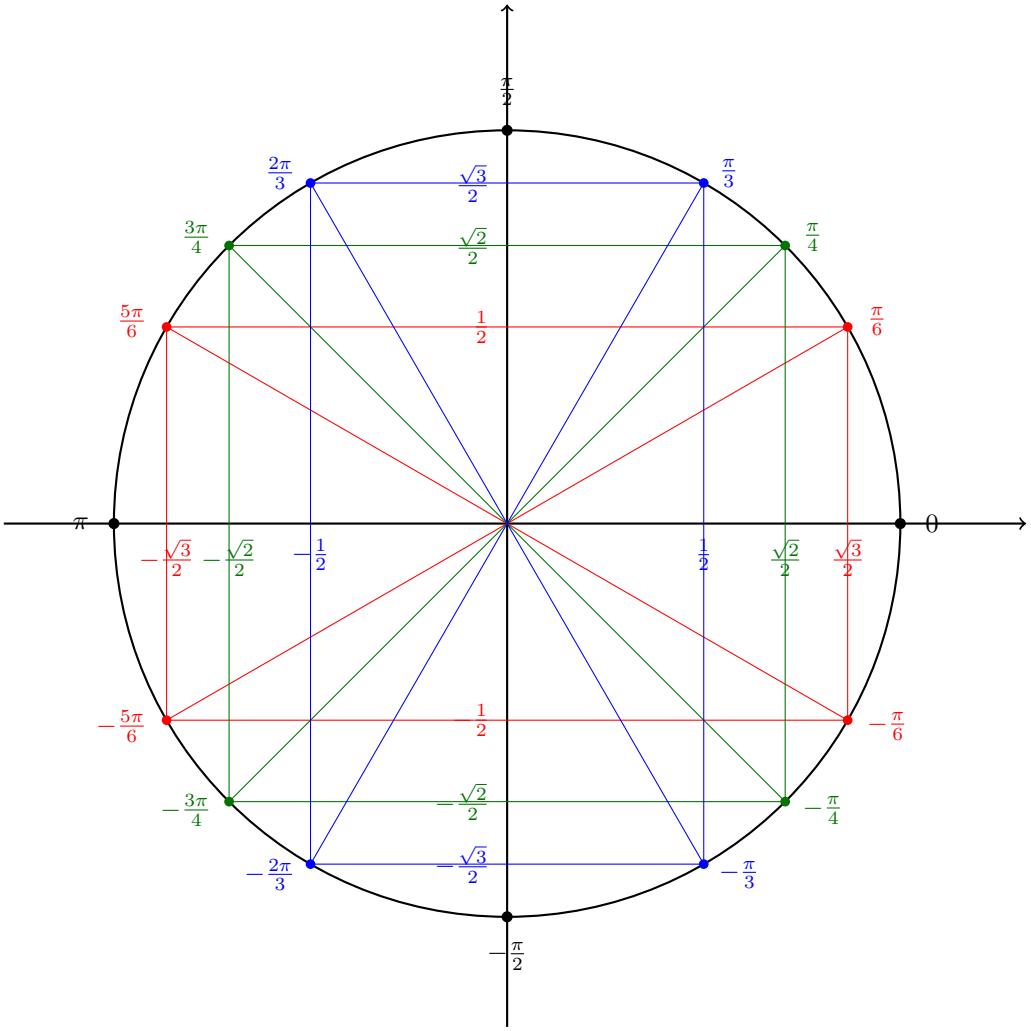
Pour le second, $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$*, donc :*

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

On ramène ainsi tout calcul à l'une des valeurs remarquables du tableau précédent.

rq : Il est inutile d'apprendre ces huit formules par cœur : il suffit de placer les points sur le cercle et de lire les symétries. Un dessin rapide en marge de la copie évite bien des erreurs de signe.

Le schéma suivant rassemble l'ensemble de ces résultats : chaque rayon porte la mesure principale de l'angle correspondant, et les projections sur les deux axes donnent directement son cosinus et son sinus. Les trois familles d'angles remarquables y sont distinguées par une couleur : $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$.

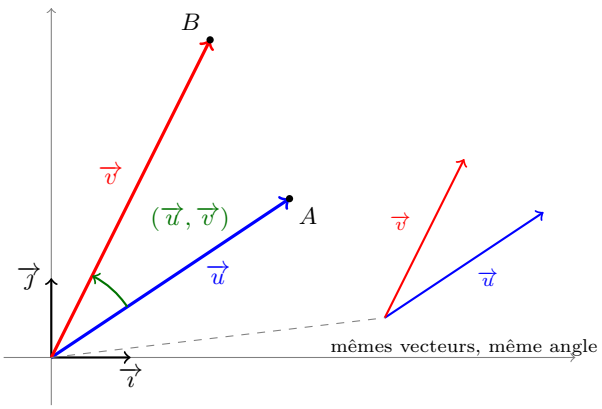


rq : Ce schéma se reconstruit très vite au brouillon : on trace le cercle et les deux axes, on place les trois rayons du premier quadrant, puis on complète par symétrie. C'est la façon la plus sûre de retrouver une valeur remarquable ou le signe d'un cosinus sans rien apprendre par cœur.

6.3.4 Angle entre deux vecteurs

Définition : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

On appelle **angle entre deux vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $(\vec{u}, \vec{v})$, l'angle orienté $\widehat{AOB}$ où A et B sont deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.



rq : L'angle ne dépend donc pas du point où l'on place les représentants des deux vecteurs : seuls comptent leurs directions et leurs sens. Comme toute mesure d'angle orienté, il n'est défini qu'à $2k\pi$ près.

Proposition 4 :
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs non nuls. On a alors :

$$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}) \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})$$

Cette seconde égalité est appelée **relation de Chasles** pour les angles orientés.

◦ Démonstration : Ces deux égalités découlent directement de la définition. Échanger les deux vecteurs revient à parcourir le même angle dans le sens contraire, d'où l'opposé. Quant à la seconde, aller de $\overrightarrow{u}$ à $\overrightarrow{v}$, puis de $\overrightarrow{v}$ à $\overrightarrow{w}$, revient à aller directement de $\overrightarrow{u}$ à $\overrightarrow{w}$.

□

ex : Soient trois vecteurs tels que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \dfrac{\pi}{4}$ *et* $(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \dfrac{\pi}{3}$. *La relation de Chasles donne alors :*

$$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

et l'on en déduit aussitôt $(\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}) = -\dfrac{7\pi}{12}$.