Chapitre 7

Produit scalaire

7.1 Introduction historique

Alors que les autres sciences recherchent les règles que Dieu a choisies pour cet univers, nous, les mathématiciens, recherchons les règles auxquelles même Dieu doit obéir.

Jean-Pierre Serre - 1926 - ◇

Alors qu'au cours du XVIIIème siècle le développement de la notion de vecteur se poursuit, notamment avec les travaux de l'allemand **Hermann Grassmann** en 1844, de l'anglais **William Clifford** en 1878 et de l'américain **Josiah Gibbs** en 1881, les mathématiciens s'interrogent sur ce que pourrait signifier la multiplication de deux vecteurs. En effet la somme de deux vecteurs offre une interprétation très visuelle, mais qu'en est-il de la multiplication ?

7.1.1 Multiplier à l'intérieur ou à l'extérieur ?

Grassmann et Clifford vont définir la **multiplication intérieure** et la **multiplication extérieure** de deux vecteurs. Parce qu'en réalité on a le choix, la multiplication de deux vecteurs peut donner un nombre réel (autrement appelé un **scalaire**), ou un vecteur. Le second, appelé **produit vectoriel**, donne un vecteur qui sort du plan, orthogonalement aux deux autres, et possède d'intéressantes propriétés en physique et en ingénierie.

Celui qui nous intéresse, le **produit scalaire**, nous donne un nombre lié à l'angle entre les deux vecteurs, et cherche à illustrer à quel point deux vecteurs partagent une direction commune. Si le produit scalaire est nul, les vecteurs sont orthogonaux, leurs directions sont perpendiculaires, ce qui sera très pratique pour déterminer des angles droits.

7.1.2 Si tout est vecteur, tout a produit scalaire

À partir d'un vecteur à deux coordonnées, on définit un produit scalaire, mais à partir de trois également, et plus encore. Muni de cette idée, on s'interroge : qu'est ce qu'un vecteur ? Un vecteur fait le lien entre un point de départ (2 nombres) et un point d'arrivée (encore 2 nombres). Mais si nous avons trois dimensions ou plus, alors il fait le lien entre davantage de nombres et autant d'images... Ainsi, si il fait le lien entre une infinité de nombres et une autre infinité de nombres, n'est ce pas une fonction ?

En s'appuyant sur cette idée et les travaux de **Joseph Fourier** (1768-1830), les mathématiciens développent au XIXème siècle l'équivalent d'un produit scalaire entre deux fonctions, et offrent une fertilité surprenante et fort abstraite à cette multiplication de vecteurs, donnant des découvertes très puissantes en Physique ou en Ingénierie...



7.2 Définition géométrique

Définition : Soient deux vecteurs du plan non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- On appelle **produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** le réel $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

- On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si leurs directions sont perpendiculaires.

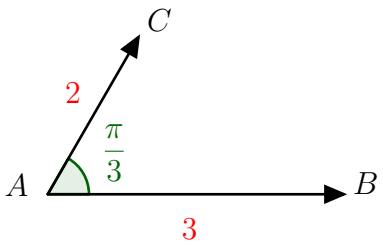
Remarque :

- Si on considère trois points quelconques du plan A, B et C, on a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

ex : On considère le schéma ci-contre. Ici on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$$



Proposition 1 :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

○ Démonstration :

- On applique la formule :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{u} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{u}) \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times 1 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \end{aligned}$$

- De même, sachant que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, alors $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ car $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

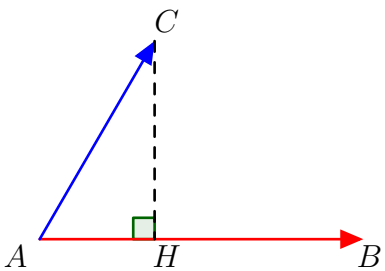
□

Proposition 2 : Projeté orthogonal
Soient A, B et C trois points distincts, et H le projeté orthogonal de C sur (AB). On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

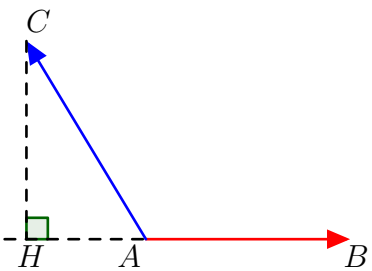
Et on observe deux cas de figure :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH$

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont sens contraire :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$

◦ Démonstration : Découle de la définition du cosinus, en effet si on considère le premier cas :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\begin{aligned} \text{Donc :} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= AB \times AH \\ &= AB \times AH \times \cos(\widehat{BAH}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \end{aligned}$$

□

7.3 Approche analytique

Proposition 3 : Résultat intermédiaire

Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé, et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2(xx' + yy')$$

◦ Démonstration : On remarque que :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

Et on calcule :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 &= (x + x')^2 + (y + y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2) \\ &= x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2 \\ &= 2(xx' + yy') \end{aligned}$$

□

Proposition 4 : Lien entre produit scalaire et norme

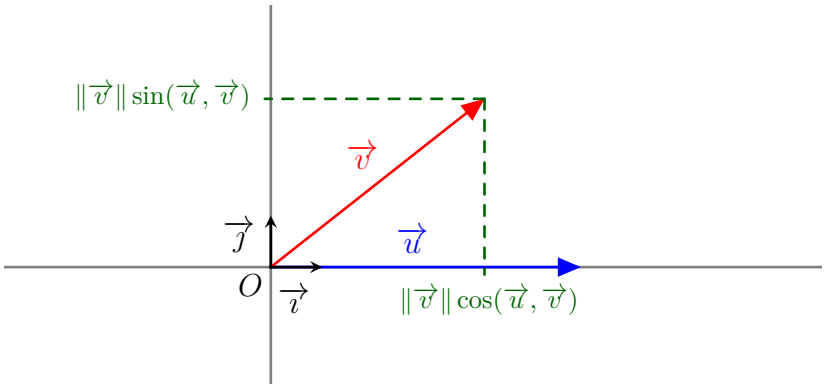
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

◦ Démonstration : Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors le résultat est trivial.
Sinon, on considère le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que :

$$\vec{\imath} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

et $\vec{\jmath}$ tel que $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormal. On peut le représenter ainsi :



On constate alors que dans ce repère les coordonnées des vecteurs sont :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \|\vec{u}\| \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \end{pmatrix}$$

En appliquant la proposition 3 on en déduit :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 &= 2(\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) + 0 \times \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})) \\ &= 2 \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= 2 \times \vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

d'où le résultat attendu.

□

Proposition 5 : Définition cartésienne du produit scalaire

Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé, et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

∘ Démonstration : Découle directement des propositions 3 et 4. □

ex : Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. *On a alors :*

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= -1 \times 5 + 3 \times 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

On utilise souvent les deux expressions de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ *pour trouver la valeur de l'angle* $(\vec{u}, \vec{v})$, *en utilisant le cosinus et la trigonométrie.*

7.4 Propriétés du produit scalaire

Proposition 6 :

Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

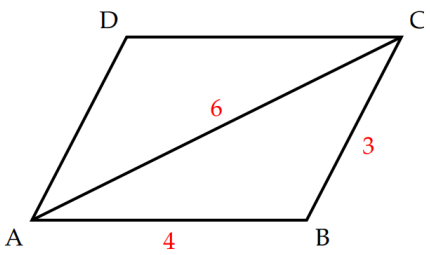
Et de plus :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

∘ Démonstration : Les trois premiers point découlent directement de la proposition 5, et les trois derniers se montrent facilement à partir de l'expression de la norme et de la proposition 5. □

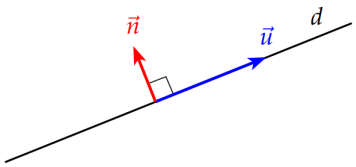
ex : Considérons un parallèlogramme $ABCD$ *tel que* $AB = 4$, $BC = 3$ *et* $AC = 6$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - AD^2) \\ &= \frac{1}{2}(6^2 - 4^2 - 3^2) \\ &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$



7.5 Vecteur normal

Définition :
On dit d'un vecteur $\vec{n}$ qu'il est **normal** à une droite d si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur directeur $\vec{u}$ de d.



Proposition 1 :
Soient a, b et c trois réels non tous nuls. Alors :

- La droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- Si le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est non nul et normal à une droite d, alors il existe une valeur de c telle que $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de d.

∘ Démonstration :

- Soit la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Alors tout vecteur directeur de la droite sera colinéaire à $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$, autrement dit de la forme $k\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ où $k \in \mathbb{R}$. Or :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot k\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = k \times (ab + b(-a))$$
$$= 0$$

d'où le résultat.

- Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vecteur non nul et d une droite telle que $\vec{n}$ est normal à d. Soit $A(x_A; y_A)$ un point choisi de la droite, et soit $M(x; y)$ un point quelconque de la droite. Alors $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de d, et par définition :

$$\begin{aligned} &\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \\ \Rightarrow &\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = 0 \\ \Rightarrow &a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \\ \Rightarrow &ax + by + \underbrace{(-ax_A - by_A)}_{=c} = 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

ex : Considérons une droite d de vecteur normal $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et passant par le point $A(1; 2)$. Alors la droite d aura pour équation cartésienne :

$$3x - 2y + c = 0 \qquad \text{où } c \text{ est un réel à déterminer}$$

On injecte les coordonnées de A pour trouver c :

$$3 \times 1 - 2 \times 2 + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

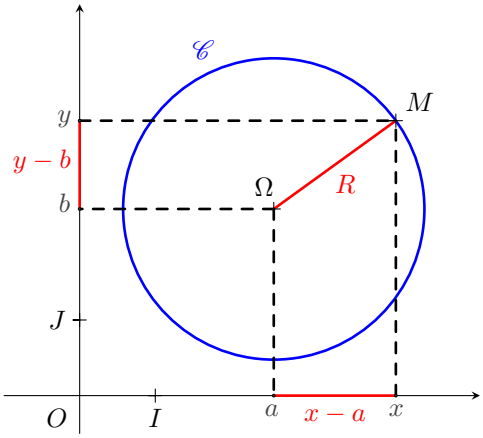
Donc l'équation cartésienne de d est :

$$(d) \ : \ 3x - 2x + 1 = 0$$

7.6 Équation de cercle

Proposition 2 :
Soit un repère orthonormé $(O; I, J)$ et soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R. Alors tout point $M(x; y)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si ses coordonnées sont solution de l'équation :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$



◦ Démonstration : On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \end{aligned}$$

□

ex :

- *Déterminons l'équation du cercle de centre $A(1;3)$ passant par le point $B(2;-2)$.*
  Le rayon est la longueur $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{26}$, l'équation de cercle sera donc :
  $$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 26$$
- *Montrons que l'équation suivante est une équation de cercle dont on déterminera le centre et le rayon :*
  $$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$$
  On fait apparaitre des identités remarquables afin de factoriser :
  $$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 - 2 - 1 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \end{aligned}$$
  C'est donc bien l'équation d'un cercle de centre $(1;1)$ et de rayon 2.