Chapitre 8

Exponentielle

8.1 Introduction historique

Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous.

Pierre-Simon de Laplace - 1749 à 1827

Après avoir étudié les fonctions polynômes, autrement dit les puissances de x telles que x^2, x^n et toutes leurs déclinaisons, une question peut se poser : que se passe-t-il si le x n'est pas « en bas », mais « en haut » ? Qu'est ce que 2^x, est-ce seulement une fonction ? Une telle question nous amène à considérer une toute nouvelle famille de fonction : les exponentielles.

8.1.1 Équation différentielle

A priori, cette fonction qui à un nombre x associerait une image a^x possède toutes les propriétés des puissances, et notamment celle de transformer le produit en somme, en effet tout élève de lycée le sait :

$$2^x \times 2^y = 2^{x+y}$$

Or en s'appuyant sur cette idée et à l'aide du calcul infinitésimal, les mathématiciens parviennent à prouver que ces fameuses fonctions semblent respecter une propriété très originale : la fonction dérivée est égale à la fonction initiale, à un facteur près. Ce facteur dépendant à chaque fois du nombre sous la puissance x, ils donnent alors un nom à l'unique nombre pour lequel la dérivée de cette fonction exponentielle serait précisément elle même : e. Ainsi :

$$(e^x)' = e^x$$

En fait, les mathématiques modernes définissent même l'exponentielle à partir de cette propriété, pour ensuite en déduire qu'elle respecte celles des puissances.

8.1.2 Le génie d'Euler

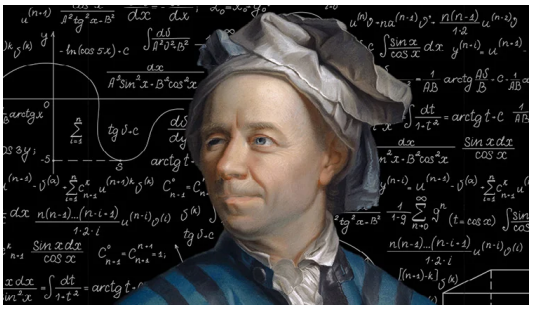
Né en 1707 en Suisse, **Leonhard Euler** est un des plus grands mathématiciens et l'un des plus prolifiques de tous les temps. Lorsqu'il s'intéressa aux avances remarquables du calcul infinitésimal à son époque, il s'attaqua notamment à une question encore mystérieuse : combien vaut ce fameux nombre e ? Encore à partir de ce calcul infinitésimal, il témoigne alors de son génie et démontre un résultat stupéfiant, si on note $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ avec $0! = 1$, alors :

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots \qquad \text{à l'infini...}$$

En faisant des tests numériques, Euler trouvera lui même :

$$e \approx 2,71828182845904523536028...$$

Le nombre réel e est en fait un nouveau nombre transcendant, au même titre que π...



8.2 Définitions

Proposition 1 :
Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable telle que :

$$f' = f \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et on la note $f = \exp$.

∘ Démonstration : Admise, car s'appuyant sur des théorèmes de l'enseignement supérieur. □

Proposition 2 :
La fonction exponentielle ne s'annule jamais, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

∘ Démonstration : Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \exp(x)\exp(-x)$$

Sachant que exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, φ l'est également et pour tout x réel :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \exp'(x)\exp(-x) + \exp(x) \times (-\exp'(-x)) \\ &= \exp'(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp'(-x) \\ &= \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) \text{ par définition de exp} \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi la fonction φ est constante, or $\varphi(0) = \exp(0)\exp(-0) = 1$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \exp(x)\exp(-x) = 1$$

Cela prouve que la fonction exp ne peut pas s'annuler, et par ailleurs que :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

□

Proposition 3 :

$$\text{Pour tout } a, b \in \mathbb{R}, \text{ et } n \in \mathbb{N} : \begin{cases} \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b) \\ \exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)} \\ \exp(n \times a) = (\exp(a))^n \end{cases}$$

∘ Démonstration :

- Soit h la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)}$$

On sait alors que h est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\exp'(a+x)}{\exp(a)} \\ &= \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

$$\text{or de plus :} \qquad h(0) = \frac{\exp(a)}{\exp(a)} = 1$$

Donc $h = h'$ et $h(0) = 1$, il n'existe qu'une seule fonction respectant ces propriétés, c'est la fonction exponentielle : $h = \exp$. Ainsi :

$$h(b) = \exp(b) = \frac{\exp(a+b)}{\exp(a)}$$

ce qui prouve le résultat attendu.

- Découle du point précédent et de la proposition 2.
- Découle du premier point.

□

Définition :
Sachant que la fonction exp admet les mêmes propriétés que la fonction puissance, on pose alors :

$$e = \exp(1) \approx 2,718 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = e^x$$

On a ainsi pour tous réels a, b et tout entier n :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^{na} = (e^a)^n$

La valeur approchée de e est admise.

ex : On a :

$$\begin{aligned}\frac{(e^4)^2 \times e^5}{e^3} &= e^{4\times 2+5-3} \\ &= e^{10}\end{aligned}$$

8.3 Étude de la fonction exponentielle

Proposition 4 :
La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

∘ Démonstration : On sait déjà que l'exponentielle ne s'annule jamais, et de plus :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0$$

□

Proposition 5 :
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et par conséquent :

$$\forall a,\ b \in \mathbb{R}, \qquad e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \qquad \text{et} \qquad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

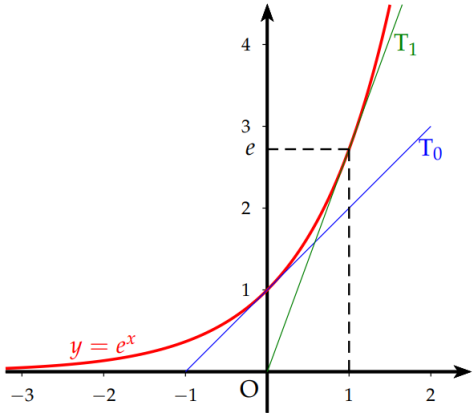
∘ Démonstration : Découle de la proposition précédente et du fait que l'exponentielle est sa propre fonction dérivée. Le résultat suivant est admis car relevant du programme de Terminale. □

ex : On peut alors résoudre des équations de ce type :

$$\begin{aligned} e^{3x+4} &= e^{2x-1} \\ \Rightarrow\ 3x+4 &= 2x-1 \\ \Rightarrow\ x &= -5\end{aligned}$$

D'après les résultats obtenus, on a le tableau de variation suivant, ainsi que la courbe représentative :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		
$\exp(x)$		1 ↗	e	



Et on en déduit deux équations de tangente :

$$\begin{aligned} T_0 &: y = e^0 x + e^0 = x + 1 \\ T_1 &: y = e(x-1) + e = ex\end{aligned}$$

Proposition 6 :
Soit u une fonction quelconque. On a alors :

$$(e^u)' = u'e^u$$

∘ Démonstration : Découle de la formule de dérivation des fonctions composées.

□

ex : On peut dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{x^2+1}$$

$$\textit{On a alors : } f'(x) = 2xe^{x^2+1}$$