# Chapitre 1

# Nombres et Calculs

## 1.1 Introduction historique

*Nous concluons doncques qu'il n'y a aucuns nombres absurds, irrationnels, irreguliers, inexplicables ou sourds ; mais qu'il y a en eux telle excellence, et concordance, que nous avons matière de méditer nuict et jour en leur admirable parfection.*

Simon Stevin - Mathématicien (1548 à 1620)

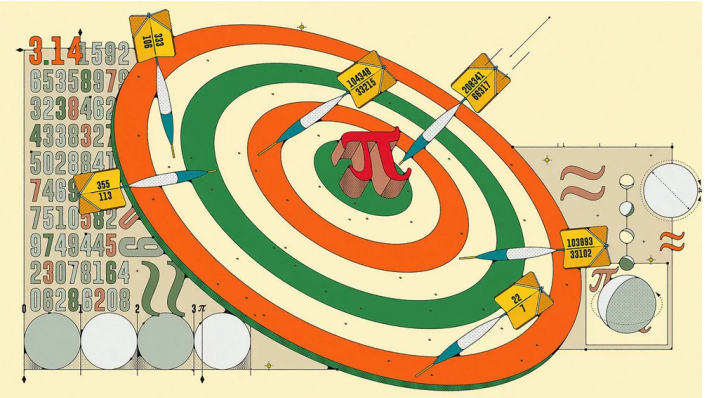
A la lecture de cette affirmation convaincue, on ne peut aujourd'hui que sourire. Si chacun peut trouver perfection dans les nombres, on sait désormais qu'un pan entier de l'étude des nombres et de ses ensembles touchent à un ensemble particulier, et dont la définition précise échappa aux mathématiciens durant des siècles, le nombre **rationnel, ou réel**, qui sera l'objet de ce cours. Si il nous paraît évident avec notre calculatrice entre les mains que $\sqrt{2}$ y a bien sa place, il n'en fut pas forcément pareil pour les plus grands mathématiciens de notre histoire.

### 1.1.1 La crise de l'irrationnel

Nationalement connu par les titulaires du Brevet, Pythagore de Samos (580 av.JC à 495 av.JC) ne fut pas que le rapporteur d'un théorème fondamental de la géométrie, mais aussi un arithméticien convaincu de la perfection et l'omniprésence des nombres dans le monde qui nous entoure, et un philosophe vénéré et respecté par la Grèce Antique. Si tous les nombres sont parfaits, alors il devait en être autant de celui qui mesure la diagonale d'un carré de coté 1. Certains auteurs racontent qu'un de ses disciples, Hippase de Métaponte, en trouvant qu'il en fut impossible, se noya dans un fleuve pour ne pas laisser propager un tel résultat, si contraire à la pensée du Maître... En effet, cette longueur, mesurant $\sqrt{2}$ et dont la valeur nous provient justement du Théorème de Pythagore, ne peut pas être rationnelle, une fraction.

### 1.1.2 L'appel de l'infini

Régulièrement ignorée au cours des siècles, en passant par Simon Stevin dont nous avons vu l'avis sur le sujet, l'établissement rationnel de l'ensemble des nombres réel ne put se faire qu'après la révolution du calcul infinitésimal, lancée par Newton et Leibniz au 17ème siècle. Introduisant avec fracas l'idée qu'il est possible de manier mathématiquement la notion d'infini, ces deux mathématiciens permirent de relancer cette quête du nombre réel, dont la suite de chiffres après la virgule semble s'élancer sans finir. Il faudra attendre Karl Weirstrass (1815 à 1897) et notamment Georg Cantor (1845 à 1918), pour voir apparaître une définition axiomatique de ce qui bercera notre cours, la **droite des réels**.



## 1.2 Fractions, puissances et racines carrées

### 1.2.1 Fractions

**Définition :** Soient $a$ un nombre et $b$ un nombre non nul. Le **quotient** de $a$ par $b$, noté $\frac{a}{b}$, est l'unique nombre qui, multiplié par $b$, donne $a$. Le nombre $a$ est le **numérateur**, le nombre $b$ le **dénominateur**.
Lorsque $a$ et $b$ sont des nombres entiers, ce quotient est appelé une **fraction**.

**Propriété 1 :** Pour tous nombres $a$, $c$ et tous nombres non nuls $b$, $d$, $k$ :

$$\frac{a\times k}{b\times k}=\frac{a}{b} \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

La première égalité, lue de gauche à droite, permet de **simplifier** une fraction ; lue de droite à gauche, elle permet de **réduire au même dénominateur**.

*Remarque :* Pour additionner deux fractions, il est indispensable qu'elles aient le même dénominateur : c'est la seule opération qui l'exige. On cherchera toujours le plus petit dénominateur commun possible afin d'alléger les calculs.

*Exemple :* Calculons $A=\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$. Le plus petit dénominateur commun à 4 et 6 est 12 :

$$A=\frac{3\times 3}{4\times 3}+\frac{5\times 2}{6\times 2}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{19}{12}$$

Calculons ensuite $B=\frac{14}{21}\times\frac{9}{8}$. Plutôt que de multiplier puis simplifier, on simplifie avant :

$$B=\frac{14}{21}\times\frac{9}{8}=\frac{2\times 7}{3\times 7}\times\frac{9}{8}=\frac{2}{3}\times\frac{9}{8}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$$

### 1.2.2 Puissances

**Définition :** Soit $a$ un nombre et $n$ un entier strictement positif. On note :

$$a^n=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n \text{ facteurs}}$$

et on lit « $a$ **puissance** $n$ ». On pose de plus, pour $a$ non nul :

$$a^0=1 \qquad \text{et} \qquad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

**Propriété 2 :** Pour tous nombres non nuls $a$ et $b$ et tous entiers relatifs $m$ et $n$ :

$$a^m\times a^n=a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n} \qquad (a^m)^n=a^{m\times n}$$

$$(a\times b)^n=a^n\times b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

*Remarque :* Attention à deux pièges classiques :

- $a^m\times a^n$ ne vaut *pas* $a^{m\times n}$ : on additionne les exposants ;
- $(-3)^2=9$ alors que $-3^2=-9$ : sans parenthèses, la puissance s'applique uniquement au 3.

*Exemple :*

$$\frac{2^5 \times 2^{-3}}{2^{-4}} = \frac{2^{5+(-3)}}{2^{-4}} = \frac{2^2}{2^{-4}} = 2^{2-(-4)} = 2^6 = 64$$

Les puissances de 10 permettent par ailleurs d'écrire commodément les très grands et très petits nombres, sous la forme dite **scientifique** $a \times 10^n$ avec $1 \leqslant a < 10$ :

$$43\,000\,000 = 4{,}3 \times 10^7 \quad ; \quad 0{,}000\,29 = 2{,}9 \times 10^{-4}$$

### 1.2.3 Racines carrées

**Définition :** Soit $a$ un nombre *positif*. La **racine carrée** de $a$, notée $\sqrt{a}$, est l'unique nombre positif dont le carré vaut $a$ :

$$\sqrt{a} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Un nombre strictement négatif n'admet pas de racine carrée.

**Propriété 3 :** Pour tous nombres positifs $a$ et $b$ (avec $b \neq 0$ pour le quotient) :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad ; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

En revanche, en général $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ : la racine carrée ne « traverse » pas les additions.

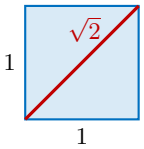
*Remarque :* Le contre-exemple à retenir : $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

*Exemple :* On simplifie une racine en cherchant le plus grand carré parfait qu'elle contient :

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Ce qui permet ensuite de regrouper les termes semblables :

$$\sqrt{72} - \sqrt{50} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$




La diagonale d'un carré de côté 1 mesure $\sqrt{2}$, d'après le théorème de Pythagore : $1^2 + 1^2 = 2$. *C'est ce nombre qui ébranla les Pythagoriciens.*

## 1.3 Ensembles de nombres

**Définition :** On distingue les ensembles de nombres suivants :

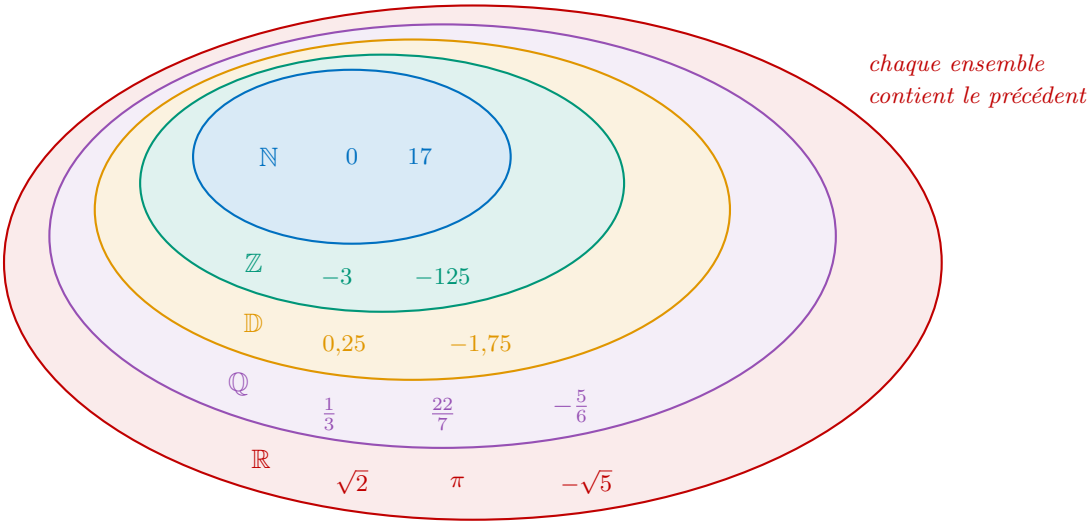
- $\mathbb{N}$ : l'ensemble des **entiers naturels**, les entiers positifs ou nuls, servant à compter.
- $\mathbb{Z}$ : l'ensemble des **entiers relatifs**, c'est-à-dire les entiers naturels et leurs opposés.
- $\mathbb{D}$ : l'ensemble des **nombres décimaux**, ceux qui s'écrivent $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, autrement dit ceux dont l'écriture décimale a un nombre *fini* de chiffres après la virgule.
- $\mathbb{Q}$ : l'ensemble des **nombres rationnels**, ceux qui s'écrivent $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.
- $\mathbb{R}$ : l'ensemble des **nombres réels**, c'est-à-dire tous les nombres repérables sur une droite graduée.

Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**.

**Propriété 4 :** Ces ensembles sont **emboîtés** les uns dans les autres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Le symbole $\subset$ se lit « est inclus dans ». On note $x \in E$ pour dire que le nombre $x$ **appartient** à l'ensemble $E$, et $x \notin E$ dans le cas contraire.




*Exemple :* Justifions l'appartenance de quelques nombres :

- $-5 \in \mathbb{Z}$ mais $-5 \notin \mathbb{N}$, car $\mathbb{N}$ ne contient aucun nombre négatif.
- $\dfrac{3}{4} \in \mathbb{D}$, car $\dfrac{3}{4} = 0{,}75 = \dfrac{75}{100}$ : l'écriture décimale s'arrête.
- $\dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$, car $\dfrac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ ne s'arrête jamais.
- $\dfrac{12}{4} \in \mathbb{N}$ : attention, c'est bien l'écriture $\frac{12}{4} = 3$ *simplifiée* qui décide, pas son apparence.
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ : c'est un nombre irrationnel, tout comme $\pi$.

*Remarque :* Un nombre rationnel se reconnaît à son écriture décimale : elle est soit finie (c'est alors un décimal), soit infinie mais *périodique*, c'est-à-dire qu'un même bloc de chiffres s'y répète indéfiniment. Ainsi :

$$\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}\,142857\ldots$$

À l'inverse, l'écriture décimale de $\pi$ ou de $\sqrt{2}$ est infinie sans jamais devenir périodique.

**Propriété 5 :** Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

∘ *Démonstration :* On raisonne par l'absurde : supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. On pourrait alors l'écrire $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec $a$ et $b$ entiers, cette fraction étant *irréductible* (déjà simplifiée au maximum). En élevant au carré :

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{donc} \quad a^2 = 2b^2$$

Ainsi $a^2$ est pair, ce qui impose que $a$ lui-même soit pair (le carré d'un nombre impair est impair). Écrivons alors $a = 2k$, où $k$ est un entier :

$$(2k)^2 = 2b^2 \quad \text{soit} \quad 4k^2 = 2b^2 \quad \text{soit} \quad b^2 = 2k^2$$

Le même raisonnement montre que $b$ est pair. Mais $a$ et $b$ sont alors tous deux divisibles par 2, ce qui contredit le caractère irréductible de la fraction. L'hypothèse de départ est donc fausse : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. □

# 1.4 Intervalles

## 1.4.1 Définitions

**Définition :** Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a \leqslant b$. On appelle **intervalle** l'ensemble des nombres réels compris entre deux bornes. On distingue :

| Notation | Ensemble des réels $x$ tels que | Nom |
|---|---|---|
| $[a\,;b]$ | $a \leqslant x \leqslant b$ | intervalle **fermé** |
| $]a\,;b[$ | $a < x < b$ | intervalle **ouvert** |
| $[a\,;b[$ | $a \leqslant x < b$ | semi-ouvert |
| $]a\,;b]$ | $a < x \leqslant b$ | |
| $[a\,;+\infty[$ | $x \geqslant a$ | non borné |
| $]a\,;+\infty[$ | $x > a$ | |
| $]-\infty\,;b]$ | $x \leqslant b$ | |
| $]-\infty\,;b[$ | $x < b$ | |

Le crochet est **tourné vers l'intérieur** si la borne appartient à l'intervalle, **vers l'extérieur** sinon.

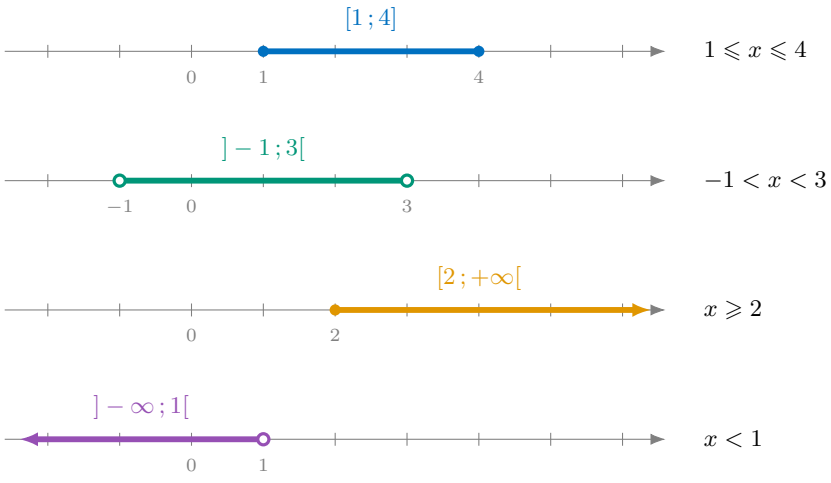
*Remarque :* Les symboles $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres : ce sont des indications de sens de parcours sur la droite. Le crochet situé de leur côté est donc *toujours* tourné vers l'extérieur. On note enfin $\mathbb{R} = ]-\infty\,;+\infty[$.

*Exemple :*

- L'intervalle $[2;5]$ représente l'ensemble des nombres réels contenus entre 2 et 5, 2 et 5 étant compris dans l'intervalle.
- L'intervalle $]-3;2,4[$ représente l'ensembles des nombres réels contenus entre $-3$ et $2,4$, $-3$ et $2,4$ n'appartenant pas à cet intervalle.
- Dans certains cas, les intervalles peuvent être ouverts sur une borne mais fermés sur l'autre, comme avec $[19;304[$ ou $]-\frac{3}{4};0]$ ;

## 1.4.2 Représentation graphique

Sur une droite graduée, un intervalle se représente par un segment ou une demi-droite colorés. Une borne *incluse* se marque par un crochet tourné vers l'intérieur et un point plein, une borne *exclue* par un crochet tourné vers l'extérieur et un point creux.

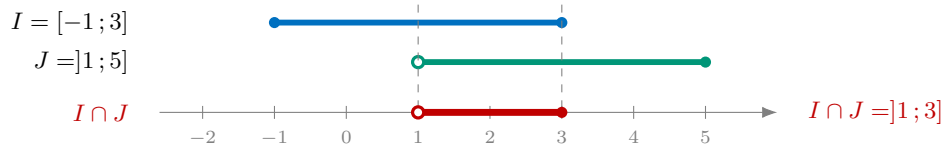


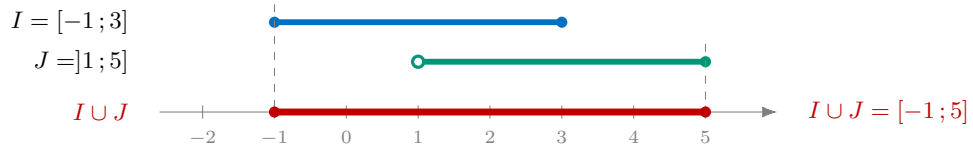
### 1.4.3 Intersection et réunion

**Définition :** Soient $I$ et $J$ deux intervalles.

- L'**intersection** de $I$ et $J$, notée $I \cap J$, est l'ensemble des réels appartenant à $I$ **et** à $J$.
- La **réunion** de $I$ et $J$, notée $I \cup J$, est l'ensemble des réels appartenant à $I$ **ou** à $J$ (l'un, l'autre, ou les deux).

Si deux intervalles n'ont aucun élément commun, leur intersection est l'**ensemble vide**, noté $\varnothing$.




*Exemple :* Déterminons $[0\,;2[ \cap ]3\,;7]$. Aucun réel ne peut être à la fois inférieur à 2 et supérieur à 3 : ces deux intervalles sont disjoints, donc leur intersection vaut $\varnothing$.

En revanche, leur réunion $[0\,;2[ \cup ]3\,;7]$ ne peut pas s'écrire comme un seul intervalle : on conserve alors l'écriture avec le symbole $\cup$, car l'ensemble obtenu est « en deux morceaux ».

*Remarque :* Une confusion fréquente concerne les mots *et* et *ou* :

- $x \in [1\,;3] \cap [2\,;5]$ signifie $x \geqslant 1$ *et* $x \leqslant 3$ *et* $x \geqslant 2$ *et* $x \leqslant 5$, c'est-à-dire $x \in [2\,;3]$ : l'intersection *restreint*.
- $x \in [1\,;3] \cup [2\,;5]$ signifie que $x$ est dans l'un au moins des deux, c'est-à-dire $x \in [1\,;5]$ : la réunion *élargit*.

*Exemple :* Traduisons enfin quelques phrases en intervalles :

- « $x$ est un réel positif » : $x \in [0\,;+\infty[$.
- « $x$ est strictement compris entre $-2$ et $6$ » : $x \in ]-2\,;6[$.
- « $x$ est un réel non nul » : $x \in ]-\infty\,;0[ \cup ]0\,;+\infty[$, ensemble que l'on note aussi $\mathbb{R}^*$.