# Chapitre 2

# Calcul littéral

## 2.1 Introduction historique

*L'art analytique s'attribue à bon droit le problème le plus fier de tous les problèmes, à savoir : ne laisser aucun problème sans le résoudre.*

François Viète - Mathématicien (1540 à 1603)

Écrire $2(x+3) = 2x+6$ paraît aujourd'hui d'une évidence désarmante. Pourtant, cette simple ligne contient une invention qui a mis près de trois mille ans à voir le jour : celle de la **lettre**, ce symbole qui ne désigne aucun nombre en particulier et les désigne donc tous à la fois.

### 2.1.1 L'algèbre des mots

Les Babyloniens, puis les Grecs, savaient résoudre des problèmes que nous qualifierions d'algébriques, mais ils les rédigeaient intégralement en toutes lettres, à la manière d'une recette de cuisine. Vers 250 après J.-C., le grec Diophante d'Alexandrie introduit dans ses *Arithmétiques* quelques abréviations pour l'inconnue et ses puissances : c'est un premier pas, mais chaque problème garde encore sa solution propre.

Un tournant décisif se produit à Bagdad vers 820, lorsque le mathématicien perse **al-Khwarizmi** rédige son traité *Kitab al-jabr wa'l-muqabala*. Les deux mots du titre décrivent précisément les gestes que vous allez pratiquer : *al-jabr*, la « restauration », consiste à transposer un terme d'un membre à l'autre d'une égalité, et *al-muqabala*, la « réduction », à regrouper les termes semblables. Le premier de ces mots, déformé par le latin, nous a donné le mot **algèbre**.

### 2.1.2 La naissance des lettres

Il faut attendre la Renaissance pour que le symbolisme se mette en place. Les signes $+$ et $-$ apparaissent en Allemagne à la fin du XV$^{e}$ siècle, le signe $=$ est proposé par l'Anglais Robert Recorde en 1557, et l'italien Bombelli fixe vers 1572 la notation des puissances. Mais la véritable révolution est l'œuvre du français **François Viète**, qui publie en 1591 son *In artem analyticem isagoge*. Son idée est d'une portée considérable : utiliser des lettres non seulement pour les inconnues, mais aussi pour les *données* du problème. Il devient alors possible d'écrire une formule générale, valable pour tous les nombres à la fois, et de raisonner sur la structure d'un calcul plutôt que sur ses valeurs.

Viète réservait les consonnes aux données et les voyelles aux inconnues. C'est **René Descartes** qui, dans *La Géométrie* publiée en 1637, fixe l'usage que nous suivons encore : les premières lettres de l'alphabet ($a$, $b$, $c$) pour les nombres connus, les dernières ($x$, $y$, $z$) pour les inconnues, ainsi que la notation des exposants.



# 2.2 Développement

## 2.2.1 Expressions littérales

**Définition :** Une **expression littérale** est une expression mathématique contenant une ou plusieurs lettres, appelées **variables**, représentant des nombres.
Calculer la **valeur numérique** d'une expression littérale, c'est remplacer chaque variable par un nombre donné, puis effectuer les calculs.

*Exemple :* Considérons l'expression $A(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

Pour $x = 4$ : $A(4) = 3 \times 4^2 - 5 \times 4 + 2 = 3 \times 16 - 20 + 2 = 48 - 18 = 30$.
Pour $x = -1$ : $A(-1) = 3 \times (-1)^2 - 5 \times (-1) + 2 = 3 + 5 + 2 = 10$.

Notez l'usage indispensable des parenthèses lorsque l'on substitue un nombre négatif à la variable.

**Définition :** Une expression littérale peut se présenter sous deux formes :

- une **somme**, c'est-à-dire une suite de termes séparés par des signes $+$ ou $-$ ;
- un **produit**, c'est-à-dire un ou plusieurs facteurs multipliés entre eux.

**Développer** une expression, c'est la transformer en une somme. **Réduire** une somme, c'est regrouper les termes semblables afin d'obtenir l'écriture la plus courte possible.

*Remarque :* Pour reconnaître la nature d'une expression, on regarde la *dernière* opération que l'on effectuerait pour la calculer. Ainsi $3(x + 1) + 5$ est une somme (le $+5$ vient en dernier), tandis que $3(x + 1 + 5)$ est un produit.

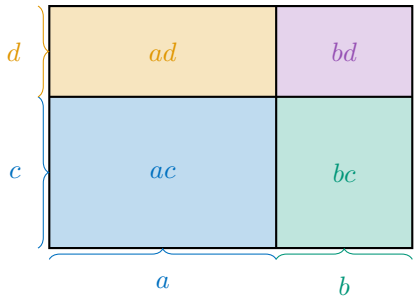
## 2.2.2 Distributivité

**Propriété 1 :** Pour tous nombres réels $k$, $a$, $b$, $c$ et $d$ :

$$k(a + b) = ka + kb \qquad \text{et} \qquad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

La première égalité s'appelle la **simple distributivité**, la seconde la **double distributivité**.

La double distributivité se visualise très bien à l'aide des aires : le grand rectangle, de dimensions $(a + b)$ et $(c + d)$, se découpe en quatre rectangles plus petits.




aire totale $= (a + b)(c + d)$

somme des aires $= ac + ad + bc + bd$

*Exemple :* Développons puis réduisons les expressions suivantes :

$$A = 5(2x - 3) = 5 \times 2x - 5 \times 3 = 10x - 15$$

$$B = (x + 4)(3x - 2) = 3x^2 - 2x + 12x - 8 = 3x^2 + 10x - 8$$

$$C = 2x(x - 1) - 3(x + 5) = 2x^2 - 2x - 3x - 15 = 2x^2 - 5x - 15$$

*Remarque :* L'erreur la plus fréquente concerne le signe $-$ placé devant une parenthèse : il faut le distribuer à *tous* les termes.

$$-(x - 3) = -x + 3 \qquad \text{et non} \qquad -x - 3$$

On peut retenir qu'un signe $-$ devant une parenthèse revient à multiplier par $-1$.

### 2.2.3 Les identités remarquables

**Propriété 2 :** Pour tous nombres réels $a$ et $b$ :

| Nom | Forme factorisée | Forme développée |
|---|---|---|
| carré d'une somme | $(a+b)^2$ | $a^2+2ab+b^2$ |
| carré d'une différence | $(a-b)^2$ | $a^2-2ab+b^2$ |
| différence de deux carrés | $(a+b)(a-b)$ | $a^2-b^2$ |

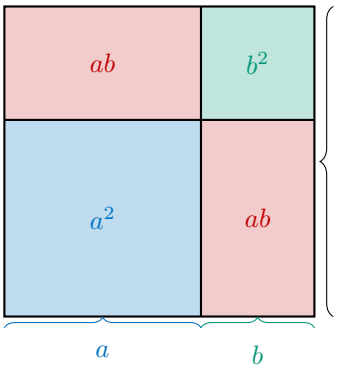
Ces trois égalités sont appelées les **identités remarquables**.

∘ *Démonstration :* Il suffit d'appliquer la double distributivité à chacune des trois formes factorisées :

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2-ab-ba+b^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2-ab+ba-b^2 = a^2-b^2$$

Les termes $ab$ et $ba$ étant égaux, ils se cumulent dans les deux premiers cas et se compensent dans le troisième. □

La première identité s'interprète elle aussi géométriquement : un carré de côté $a+b$ se découpe en un carré de côté $a$, un carré de côté $b$ et *deux* rectangles de dimensions $a$ et $b$, ce qui explique le facteur 2 du double produit.




$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

*Exemple :* Développons en identifiant à chaque fois les nombres $a$ et $b$ :

$$D = (x+5)^2 = x^2+2\times x\times 5+5^2 = x^2+10x+25$$
$$E = (3x-2)^2 = (3x)^2-2\times 3x\times 2+2^2 = 9x^2-12x+4$$
$$F = (x+7)(x-7) = x^2-7^2 = x^2-49$$

Dans le calcul de $E$, remarquez que le carré porte sur le facteur $3x$ tout entier : $(3x)^2 = 9x^2$ et non $3x^2$.

*Remarque :* Les identités remarquables permettent aussi d'effectuer certains calculs numériques de tête :

$$101^2 = (100+1)^2 = 10\,000+200+1 = 10\,201$$
$$97\times 103 = (100-3)(100+3) = 10\,000-9 = 9\,991$$

# 2.3 Factorisation

## 2.3.1 Facteur commun

**Définition :** **Factoriser** une expression, c'est la transformer en un **produit** de facteurs.
C'est donc l'opération inverse du développement : on lit les égalités de la propriété 1 et de la propriété 2 de la droite vers la gauche.

**Propriété 3 :** Si un même facteur $k$ apparaît dans tous les termes d'une somme, on peut le mettre en évidence :

$$ka + kb = k(a + b)$$

Le nombre ou l'expression $k$ est appelé le **facteur commun**.

*Exemple :* Factorisons les expressions suivantes :

$$A = 6x + 15 = 3 \times 2x + 3 \times 5 = 3(2x + 5)$$

$$B = 4x^2 - 7x = x \times 4x - x \times 7 = x(4x - 7)$$

$$C = (x + 2)(3x - 1) + (x + 2)(x + 8) = (x + 2)\big[(3x - 1) + (x + 8)\big] = (x + 2)(4x + 7)$$

Dans le calcul de $C$, le facteur commun n'est pas un nombre mais l'expression $(x + 2)$ tout entière.

*Remarque :* Le facteur commun est parfois dissimulé, et il faut le faire apparaître avant de l'extraire. Ainsi, dans :

$$D = (2x - 1)(x + 4) + (2x - 1)$$

le second terme s'écrit $(2x - 1) \times 1$. Le facteur commun est donc $(2x - 1)$, et :

$$D = (2x - 1)\big[(x + 4) + 1\big] = (2x - 1)(x + 5)$$

Attention à ne jamais « oublier » ce facteur 1, erreur qui conduirait à écrire à tort $D = (2x - 1)(x + 4)$.

## 2.3.2 Factoriser à l'aide d'une identité remarquable

**Propriété 4 :** Lues de droite à gauche, les identités remarquables deviennent des outils de factorisation :

| Si l'on reconnaît | alors on factorise en |
|---|---|
| $a^2 + 2ab + b^2$ | $(a + b)^2$ |
| $a^2 - 2ab + b^2$ | $(a - b)^2$ |
| $a^2 - b^2$ | $(a + b)(a - b)$ |

**Méthode :** Pour factoriser une expression, on procède dans l'ordre suivant :

**1.** On cherche d'abord un **facteur commun** à tous les termes.

**2.** À défaut, on regarde si l'expression comporte deux ou trois termes qui sont des **carrés**, afin de reconnaître une identité remarquable.

**3.** On vérifie toujours le résultat en redéveloppant : on doit retrouver l'expression de départ.

*Exemple :* Factorisons les expressions suivantes :

$$E = x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x+4)(x-4)$$
$$F = x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x+3)^2$$
$$G = 25x^2 - 20x + 4 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 2 + 2^2 = (5x-2)^2$$
$$H = 9x^2 - 49 = (3x)^2 - 7^2 = (3x+7)(3x-7)$$

Dans le calcul de $F$, c'est le terme central $6x$ qui permet de confirmer l'identité : il doit être égal au double produit $2 \times x \times 3$.

*Remarque :* Une somme de deux carrés, comme $x^2 + 9$, ne se factorise pas : il n'existe pas d'identité remarquable correspondante. Seule la *différence* de deux carrés se factorise.
Par ailleurs, certaines expressions demandent d'enchaîner les deux techniques. Ainsi :

$$I = 2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) = 2(x+3)(x-3)$$

où l'on extrait d'abord le facteur commun 2, ce qui fait apparaître une différence de carrés.

*Exemple :* Voici un cas où l'identité remarquable révèle un facteur commun caché :

$$\begin{aligned} J &= (x-1)^2 - 9 \\ &= (x-1)^2 - 3^2 \\ &= \big[(x-1)+3\big]\big[(x-1)-3\big] \\ &= (x+2)(x-4) \end{aligned}$$

Ici, le rôle de $a$ est tenu par l'expression $(x-1)$ et celui de $b$ par le nombre 3.

### 2.3.3 Application : l'équation produit nul

**Propriété 5 :** Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul :

$$A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$$

*Exemple :* Résolvons l'équation $x^2 - 5x = 0$. Le membre de gauche se factorise :

$$x^2 - 5x = 0 \iff x(x-5) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x - 5 = 0$$

Les solutions sont donc $x = 0$ et $x = 5$.

Résolvons de même $4x^2 - 9 = 0$ :

$$4x^2 - 9 = 0 \iff (2x+3)(2x-3) = 0 \iff x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$

*Remarque :* Cette propriété est la raison d'être de la factorisation : une somme nulle ne donne aucune information sur ses termes, alors qu'un produit nul livre immédiatement toutes les solutions. C'est pourquoi, face à une équation, on cherchera toujours à ramener tous les termes d'un même côté, puis à factoriser.

## 2.4 Expressions rationnelles

### 2.4.1 Valeurs interdites

**Définition :** Une **expression rationnelle** est un quotient de deux expressions littérales, de la forme $\dfrac{A(x)}{B(x)}$.
Comme la division par zéro est impossible, une telle expression n'est définie que si son dénominateur n'est pas nul. Les valeurs de $x$ qui annulent le dénominateur sont appelées les **valeurs interdites** de l'expression.

*Exemple :* Cherchons les valeurs interdites de $P(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$.

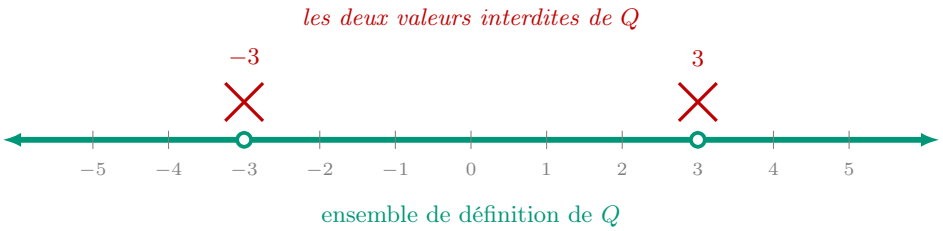
Le dénominateur s'annule lorsque $x - 2 = 0$, c'est-à-dire pour $x = 2$. La valeur interdite est donc 2, et l'expression est définie pour tout réel $x$ appartenant à $]-\infty\,;2[ \cup ]2\,;+\infty[$.

*Exemple :* Cherchons les valeurs interdites de $Q(x) = \dfrac{x+5}{x^2-9}$.

On factorise le dénominateur, puis on applique la propriété du produit nul :

$$x^2 - 9 = 0 \iff (x+3)(x-3) = 0 \iff x = -3 \text{ ou } x = 3$$

Il y a donc deux valeurs interdites, $-3$ et 3, et $Q$ est définie sur $]-\infty\,;-3[ \cup ]-3\,;3[ \cup ]3\,;+\infty[$.




### 2.4.2 Simplification

**Propriété 6 :** Pour tous nombres $a$, $b$ et $k$, avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$ :

$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$$

Pour simplifier une expression rationnelle, on factorise donc le numérateur et le dénominateur, puis on supprime les facteurs communs.

*Exemple :* Simplifions $R(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}$, définie pour $x \neq -2$.

On factorise séparément les deux membres du quotient :

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2) \qquad \text{et} \qquad x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

d'où, pour tout $x \neq -2$ :

$$R(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}$$

*Remarque :* On ne simplifie que des **facteurs**, jamais des termes d'une somme. L'écriture suivante est donc fausse :

$$\frac{x+3}{x+5} \neq \frac{3}{5}$$

car $x$ y est un terme et non un facteur. Un moyen de s'en convaincre est de tester avec $x = 1$ : le membre de gauche vaut $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, le membre de droite $\frac{3}{5}$.

### 2.4.3 Opérations

**Propriété 7 :** Pour toutes expressions $A$, $B$, $C$, $D$, sous réserve que les dénominateurs ne s'annulent pas :

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C} \qquad \frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D} \qquad \frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}$$

Comme pour les fractions numériques, une addition exige au préalable un **dénominateur commun**.

*Exemple :* Écrivons $S(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x+1}$ sous la forme d'un quotient unique, pour $x\neq 0$ et $x\neq -1$.

Le dénominateur commun est le produit $x(x+1)$ :

$$S(x)=\frac{2(x+1)}{x(x+1)}+\frac{3x}{x(x+1)}=\frac{2x+2+3x}{x(x+1)}=\frac{5x+2}{x(x+1)}$$

*Exemple :* Écrivons de même $T(x)=x+\dfrac{1}{x-3}$ sous la forme d'un quotient unique, pour $x\neq 3$.

Le terme $x$ s'écrit $\dfrac{x(x-3)}{x-3}$, ce qui donne :

$$T(x)=\frac{x(x-3)}{x-3}+\frac{1}{x-3}=\frac{x^2-3x+1}{x-3}$$

*Remarque :* Réunir plusieurs quotients en un seul est souvent l'étape décisive dans la résolution d'une équation : une fois l'expression écrite sous la forme $\dfrac{A(x)}{B(x)}$, elle s'annule exactement lorsque son numérateur $A(x)$ s'annule, à condition bien sûr que $x$ ne soit pas une valeur interdite.