Chapitre 3

Probabilités

3.1 Introduction historique

La plupart de nos jugements étant fondés sur la probabilité des témoignages, il est bien important de la soumettre au calcul.

Pierre Simon Laplace - 1812

3.1.1 Le paradoxe du chevalier

Antoine Gombaud (1607-1684), l'auto-proclamé Chevalier de Méré, mis au jour un intéressant problème mathématique au 17ème siècle, en cherchant à concilier son amour du jeu de hasard avec ses qualités mathématiques. Dans une de ses lettres au mathématicien et philosophe **Blaise Pascal** (1623-1662), il explique en effet que de parier sur l'apparition d'un 6 en lançant 4 fois un dé à 6 faces est avantageux, et il le prouve par un calcul :

$$1 - (\frac{5}{6})^4 \simeq 0,5177...$$

Sachant ceci, il lui paraît donc logique qu'en lançant cette fois-ci deux dés (donc avec 36 combinaisons possibles), il faille attendre $4 \times 6 = 24$ lancers pour obtenir un double 6, puisque les combinaisons sont 6 fois plus nombreuses. Or Pascal lui répond par un calcul similaire, et lui montre en fait son erreur :

$$1 - (\frac{35}{36})^{24} \simeq 0,4914...$$

Par cet exemple, et par d'autres encore plus connus, cet écrivain français initia la recherche de ce que l'on appelera plus tard théorie des probabilités, et qui occupera de nombreux mathématiciens du 17ème siècle à nos jours. Car en effet en probabilité, les intuitions peuvent parfois êtres trompeuses...

3.1.2 Au réel le complexe du spirituel

Comme nos mathématiques résident essentiellement dans notre capacité d'abstraction, à projeter des nombres dans notre esprit et les utiliser dans nos opérations, il semble donc naturel que de les appliquer à un sujet typiquement réel et matériel comme les probabilités va nous poser un problème. Alors que pourtant rien ne nous semble intuitivement plus évident que de donner la probabilité de tomber sur un 1 en lançant un dé à 6 faces (une chance sur six, c'est ça ?), de théoriser ce résultat avec l'intraitable rigueur mathématique représente un travail de titan. Ainsi, la théorie des probabilités est un produit très récent, et l'oeuvre de mathématiciens faisant appel à des outils paradoxalement complexes pour un calcul en apparence transparent, comme l'apprit à ses dépends le chevalier de Méré...



3.2 Vocabulaire et schémas

3.2.1 Expérience aléatoire et univers

Définition : Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît à l'avance tous les résultats possibles, sans pouvoir prévoir lequel se produira.

Chacun de ces résultats possibles s'appelle une **issue**. L'ensemble de toutes les issues s'appelle l'**univers** de l'expérience, et se note Ω (lettre grecque « oméga »).

Exemple : Voici trois expériences aléatoires et leurs univers respectifs :

- on lance un dé équilibré à six faces : $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$, soit 6 issues ;
- on lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{\text{Pile}\,;\text{Face}\}$, soit 2 issues ;
- on tire une carte dans un jeu de 32 cartes : Ω contient 32 issues.

En revanche, mesurer la taille d'un élève de la classe n'est pas une expérience aléatoire : le résultat est certes inconnu, mais il ne dépend pas du hasard.

Définition : Un **événement** est un ensemble d'issues de l'expérience, c'est-à-dire une partie de l'univers Ω. On le note généralement par une lettre majuscule.

Un événement qui ne contient qu'une seule issue est appelé un **événement élémentaire**. L'événement qui ne contient aucune issue est l'**événement impossible**, noté $\varnothing$; l'univers Ω tout entier est l'**événement certain**.

Exemple : On lance un dé équilibré à six faces, et on considère les événements :

A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir un nombre supérieur ou égal à 5 »

En listant leurs issues, on obtient $A = \{2\,;4\,;6\}$ et $B = \{5\,;6\}$. L'événement « obtenir un 7 » est impossible, tandis que l'événement « obtenir un nombre inférieur à 10 » est certain.

3.2.2 Opérations sur les événements

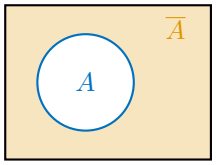
Définition : Soient A et B deux événements d'un même univers Ω.

- L'**événement contraire** de A, noté $\overline{A}$, est l'événement constitué de toutes les issues qui ne sont pas dans A.
- L'**intersection** de A et B, notée $A \cap B$ et lue « A **et** B », est l'événement constitué des issues appartenant à la fois à A et à B.
- La **réunion** de A et B, notée $A \cup B$ et lue « A **ou** B », est l'événement constitué des issues appartenant à A, à B, ou aux deux.

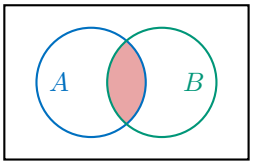
Lorsque $A \cap B = \varnothing$, c'est-à-dire lorsque A et B ne peuvent pas se produire en même temps, on dit que les deux événements sont **incompatibles**.

Remarque : Ce vocabulaire est exactement celui rencontré au chapitre 1 à propos des intervalles : les symboles $\cap$ et $\cup$ ont ici le même sens. Attention comme alors au mot « ou », qui n'est pas exclusif en mathématiques : $A \cup B$ contient aussi les issues qui réalisent *les deux* événements à la fois.

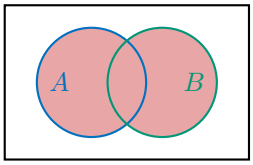
Ces trois opérations se visualisent commodément à l'aide de **diagrammes**, où l'univers est représenté par un rectangle et les événements par des disques :



événement contraire $\overline{A}$



intersection $A \cap B$



réunion $A \cup B$

Exemple : Reprenons le lancer du dé, avec $A = \{2\,;4\,;6\}$ et $B = \{5\,;6\}$. On obtient alors :

$$\overline{A} = \{1\,;3\,;5\} \qquad A \cap B = \{6\} \qquad A \cup B = \{2\,;4\,;5\,;6\}$$

Les événements A et B ne sont donc pas incompatibles, puisqu'ils ont l'issue 6 en commun. En revanche, A et $\overline{A}$ sont toujours incompatibles, quel que soit l'événement A.

3.2.3 Loi de probabilité

Définition : Définir une **loi de probabilité** sur un univers $\Omega = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$, c'est associer à chaque issue x_i un nombre p_i tel que :

- chaque p_i est compris entre 0 et 1 ;
- la somme de tous ces nombres vaut 1 : $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Le nombre p_i s'appelle la **probabilité** de l'issue x_i. La **probabilité d'un événement** A, notée $P(A)$, est alors la somme des probabilités des issues qui le composent.

Remarque : Une probabilité est toujours un nombre compris entre 0 et 1. Une probabilité de 0 correspond à un événement impossible, une probabilité de 1 à un événement certain. Un résultat négatif ou supérieur à 1 signale donc à coup sûr une erreur de calcul, ce qui en fait un excellent moyen de vérification.

On exprime souvent une probabilité en pourcentage : dire que $P(A) = 0{,}25$ ou que A a 25 % de chances de se produire revient au même.

Exemple : On lance un dé truqué, dont on a mesuré le comportement sur un très grand nombre de lancers. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,1	0,1	0,2	0,2	0,1	0,3

La somme des probabilités vaut bien $0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 = 1$. La probabilité de l'événement A : « obtenir un nombre pair » se calcule alors en additionnant les probabilités des issues 2, 4 et 6 :

$$P(A) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}6$$

Ce dé est donc truqué en faveur des nombres pairs.

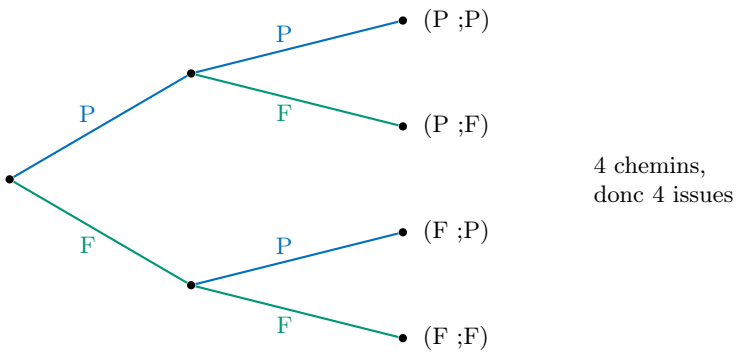
3.2.4 Schématiser une expérience

Lorsqu'une expérience se déroule en plusieurs étapes, ou lorsqu'elle croise deux critères, une simple liste d'issues devient vite illisible. On utilise alors l'un des deux schémas suivants.

Définition : Un **arbre de dénombrement** représente une expérience à plusieurs étapes : chaque étape correspond à un niveau de l'arbre, et chaque chemin complet, de la racine jusqu'à une extrémité, représente une issue de l'expérience.

Un **tableau à double entrée** croise deux caractéristiques : chaque case contient l'effectif ou la probabilité correspondant au croisement d'une ligne et d'une colonne.

Exemple : On lance successivement deux fois une pièce équilibrée. L'arbre ci-dessous représente les deux étapes de l'expérience, et l'on y lit les quatre issues possibles :



Attention : les issues (P ;F) et (F ;P) sont bien *distinctes*, car l'ordre des lancers est pris en compte. C'est là tout l'intérêt de l'arbre, qui les fait apparaître comme deux chemins différents.

Exemple : Dans un lycée de 500 élèves, on interroge chaque élève sur sa pratique d'un sport et d'un instrument de musique. Les résultats sont consignés dans un tableau à double entrée :

	Sport	**Pas de sport**	**Total**
Musique	90	60	150
Pas de musique	210	140	350
Total	300	200	500

La ligne et la colonne « Total » sont indispensables : elles permettent de compléter le tableau lorsque certaines cases manquent, et de vérifier la cohérence de l'ensemble, le total général devant se retrouver aussi bien en additionnant les lignes que les colonnes.

3.3 Calculs de probabilités

3.3.1 Situations d'équiprobabilité

Définition : Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit que l'on est dans une situation d'**équiprobabilité**.

Propriété 1 : Dans une situation d'équiprobabilité, si l'univers Ω compte n issues, alors chaque issue a pour probabilité $\dfrac{1}{n}$, et pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

Remarque : C'est la formule énoncée par Cardan dès le XVI^{e} siècle. Elle est d'un usage si commode que l'on est tenté de l'appliquer partout : il faut résister, car elle n'est valable qu'en situation d'équiprobabilité. Certains mots de l'énoncé la signalent, comme « équilibré », « non truqué », « bien mélangé » ou « au hasard ».

Exemple : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes bien mélangé. Toutes les cartes ayant la même chance d'être tirées, on est en situation d'équiprobabilité avec 32 issues.

Soit A l'événement « tirer un cœur ». Le jeu contient 8 cœurs, donc :

$$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Soit B l'événement « tirer un roi ». Le jeu contient 4 rois, donc $P(B) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$.

3.3.2 Probabilité du contraire, de la réunion

Propriété 2 : Soient A et B deux événements d'un même univers. Alors :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad \text{et} \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En particulier, si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

◦ *Démonstration :* Un événement et son contraire n'ont aucune issue commune, et à eux deux ils contiennent toutes les issues de l'univers. La somme de leurs probabilités vaut donc $P(\Omega) = 1$, d'où $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Pour la seconde formule, additionner $P(A)$ et $P(B)$ revient à compter deux fois les issues qui appartiennent à la fois à A et à B, c'est-à-dire celles de $A \cap B$. Il faut donc retrancher une fois $P(A \cap B)$ pour rétablir le compte. Lorsque les événements sont incompatibles, cette intersection est vide et le terme correctif disparaît. □

Exemple : Reprenons le tirage d'une carte dans un jeu de 32 cartes, avec A : « tirer un cœur » et B : « tirer un roi ».

(a) Probabilité de ne pas tirer un cœur :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(b) Probabilité de tirer un cœur ou un roi : il y a exactement une carte qui est à la fois un cœur et un roi, le roi de cœur, donc $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$. Par conséquent :

$$P(A \cup B) = \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$

Le résultat se vérifie par dénombrement direct : les 8 cœurs, plus les 3 rois qui ne sont pas des cœurs, soit 11 cartes favorables.

Remarque : L'événement contraire est un outil précieux dès que l'énoncé contient l'expression « au moins un ». Ainsi, pour calculer la probabilité d'obtenir au moins un six en lançant deux dés, il est bien plus rapide de calculer la probabilité de n'obtenir *aucun* six, puis de la soustraire à 1.

3.3.3 Expériences à plusieurs étapes

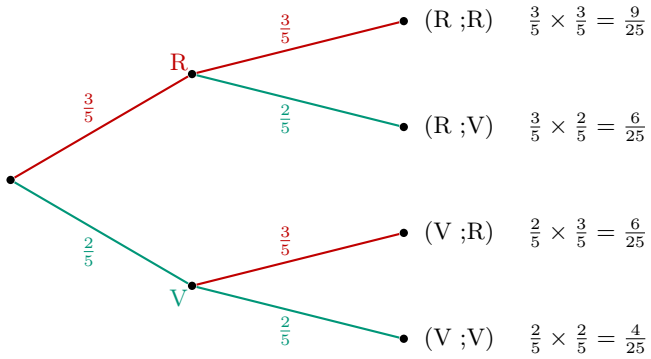
Méthode : Pour calculer une probabilité dans une expérience à plusieurs étapes, on peut construire un arbre, puis appliquer les deux règles suivantes :

1. La probabilité d'un *chemin* s'obtient en **multipliant** les probabilités rencontrées le long de ce chemin.

2. La probabilité d'un *événement* s'obtient en **additionnant** les probabilités de tous les chemins qui le réalisent.

Exemple : Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes, indiscernables au toucher. On tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne, puis on en tire une seconde.

À chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule rouge vaut $\frac{3}{5}$ et celle d'obtenir une verte $\frac{2}{5}$. Comme la boule est remise, le second tirage se déroule dans les mêmes conditions que le premier. On obtient l'arbre suivant, dont les branches sont **pondérées**, c'est-à-dire munies des probabilités :



On vérifie que la somme des quatre probabilités vaut $\frac{9+6+6+4}{25} = \frac{25}{25} = 1$. La probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes s'obtient alors en additionnant les deux chemins qui la réalisent :

$$P = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25} = 0{,}48$$

3.4 Probabilités conditionnelles

3.4.1 Une information supplémentaire

Il arrive que l'on dispose d'une information partielle sur le résultat d'une expérience, et que cette information modifie les chances que l'on accorde à un événement. Reprenons le tableau des 500 élèves de la section 3.2 :

	Sport	**Pas de sport**	**Total**
Musique	90	60	150
Pas de musique	210	140	350
Total	300	200	500

On choisit un élève au hasard, et on note M l'événement « l'élève fait de la musique » et S l'événement « l'élève fait du sport ». Sur l'ensemble du lycée :

$$P(M) = \frac{150}{500} = 0{,}3$$

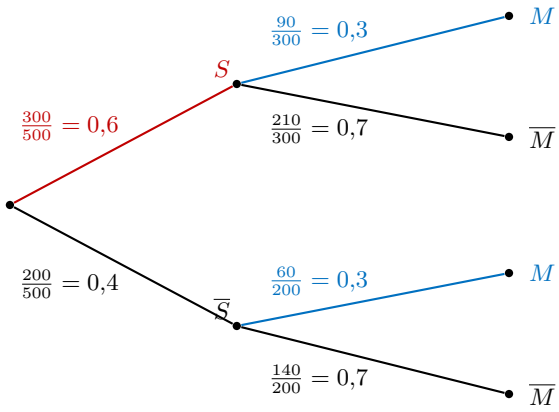
Supposons maintenant que l'on apprenne que l'élève choisi fait du sport. Cette information restreint la population étudiée à la seule colonne colorée, qui compte 300 élèves, parmi lesquels 90 font de la musique. La probabilité cherchée devient alors :

$$\frac{90}{300} = 0{,}3$$

Dans cet exemple, l'information n'a rien changé. Nous verrons que ce n'est pas toujours le cas, et qu'une information peut modifier considérablement une probabilité.

3.4.2 Lecture sur un arbre pondéré

La même situation se représente par un arbre pondéré, où l'on choisit de placer le critère « sport » à la première étape. Les probabilités portées par les branches du *second* niveau sont précisément des probabilités conditionnelles : elles se lisent en se plaçant à l'extrémité de la première branche, comme si l'expérience s'était déjà partiellement déroulée.



ces probabilités sont *conditionnelles* : elles supposent l'étape précédente réalisée

Remarque : Sur un arbre pondéré, la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut toujours 1 : ici $0{,}6 + 0{,}4 = 1$ à la première étape, et $0{,}3 + 0{,}7 = 1$ à chacun des deux nœuds de la seconde. Cette règle permet de compléter un arbre dont certaines branches ne sont pas renseignées.

3.4.3 Définition et calcul

Définition : Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$. On appelle **probabilité de B sachant A** le nombre :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

C'est la probabilité que B se réalise, lorsque l'on sait déjà que A est réalisé.

Remarque : La formule traduit exactement le raisonnement mené sur le tableau. Savoir que A est réalisé revient à ne plus considérer que les issues de A : celui-ci devient le nouvel univers de référence. Le dénominateur $P(A)$ joue le rôle du « total » de la colonne colorée, et le numérateur $P(A \cap B)$ celui des issues qui, dans cette colonne, réalisent aussi B.

Attention à l'ordre des lettres : $P_A(B)$ et $P_B(A)$ ne sont pas la même chose. La probabilité qu'un élève fasse de la musique sachant qu'il fait du sport n'a aucune raison d'être égale à la probabilité qu'il fasse du sport sachant qu'il fait de la musique.

Exemple : Vérifions la formule sur l'exemple du lycée. On a $P(S) = 0{,}6$ et, les élèves faisant à la fois du sport et de la musique étant au nombre de 90 :

$$P(S \cap M) = \frac{90}{500} = 0{,}18$$

d'où :

$$P_S(M) = \frac{P(S \cap M)}{P(S)} = \frac{0{,}18}{0{,}6} = 0{,}3$$

On retrouve bien la valeur lue directement dans le tableau, ainsi que la probabilité portée par la branche correspondante de l'arbre.

Propriété 3 : Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$. Alors :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

∘ *Démonstration :* Il suffit de multiplier les deux membres de la définition par $P(A)$, ce qui est licite puisque $P(A) \neq 0$. □

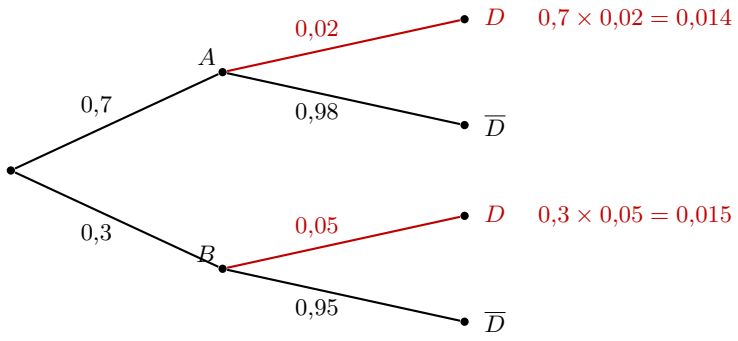
Remarque : Cette égalité justifie la première règle des arbres énoncée en section 3.3 : la probabilité d'un chemin est bien le produit des probabilités rencontrées, celle de la première branche puis celle, conditionnelle, de la seconde. Sur l'arbre du lycée, le chemin supérieur donne ainsi :

$$P(S \cap M) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$$

ce qui correspond bien aux 90 élèves sur 500.

Exemple : Une usine possède deux ateliers. L'atelier A fabrique 70 % de la production, et 2 % de ses pièces sont défectueuses. L'atelier B fabrique les 30 % restants, dont 5 % sont défectueuses.

On note D l'événement « la pièce est défectueuse ». Les données de l'énoncé sont des probabilités conditionnelles : $P_A(D) = 0{,}02$ et $P_B(D) = 0{,}05$. On construit l'arbre :



La probabilité qu'une pièce provienne de l'atelier A *et* soit défectueuse vaut donc :

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0{,}7 \times 0{,}02 = 0{,}014$$

soit 1,4 % de la production totale. De même, $P(B \cap D) = 0{,}015$, soit 1,5 %. Bien que l'atelier B produise moins de pièces, il est à l'origine du plus grand nombre de pièces défectueuses.

3.4.4 Indépendance

Définition : Deux événements A et B, de probabilités non nulles, sont dits **indépendants** lorsque la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de l'autre :

$$P_A(B) = P(B)$$

Propriété 4 : Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

∘ *Démonstration :* Si A et B sont indépendants, alors $P_A(B) = P(B)$. En reportant dans la propriété 3 :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(A) \times P(B)$$

Réciproquement, si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, alors en divisant par $P(A)$, qui est non nul :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$$

□

Exemple : Dans l'exemple du lycée, on a vu que $P_S(M) = 0{,}3$ et $P(M) = 0{,}3$. Les événements S et M sont donc *indépendants* : dans cet établissement, faire du sport n'a aucune influence sur la pratique de la musique. On peut le vérifier par la propriété 4 :

$$P(S) \times P(M) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18 = P(S \cap M)$$

Remarque : Ne confondez pas **indépendants** et **incompatibles**, deux notions sans rapport, et même contradictoires. Deux événements incompatibles ne peuvent pas se produire ensemble : savoir que l'un est réalisé rend l'autre impossible, ce qui constitue une influence maximale et non une absence d'influence.

Exemple : Modifions les effectifs du lycée pour observer une situation de dépendance. Supposons désormais que parmi les 300 sportifs, 150 pratiquent la musique, les autres nombres étant ajustés en conséquence. On aurait alors :

$$P_S(M) = \frac{150}{300} = 0{,}5 \qquad \text{alors que} \qquad P(M) = \frac{150 + 60}{500} = 0{,}42$$

Comme $P_S(M) \neq P(M)$, les deux événements ne seraient plus indépendants : savoir qu'un élève fait du sport augmenterait alors la probabilité qu'il fasse aussi de la musique.