Chapitre 4

Équations

4.1 Introduction historique

Pour éviter la fastidieuse répétition des mots « est égal à », je poserai deux traits jumeaux de même longueur, car deux choses ne sauraient être plus égales.

Robert Recorde - Mathématicien gallois (1510 à 1558)

Résoudre une équation, c'est retrouver un nombre que l'on ne connaît pas à partir de ce que l'on sait de lui. Le problème est vieux comme les mathématiques, et il est né de préoccupations très concrètes : partager une récolte, répartir un héritage, calculer la hauteur d'une pyramide. Bien avant qu'existent les lettres, les symboles et le signe =, les scribes essayaient déjà de répondre à ces questions.

4.1.1 La méthode de la fausse position

Le papyrus Rhind, rédigé en Égypte vers 1650 av. J.-C. par le scribe **Ahmès**, contient quatre-vingt-sept problèmes résolus, dont plusieurs portent sur une quantité inconnue appelée « aha ». L'un d'eux s'énonce ainsi : *une quantité et son septième font 19.* Nous écririons aujourd'hui $x + \frac{x}{7} = 19$, mais Ahmès ne dispose d'aucune notation pour cela.

Sa méthode, dite de la **fausse position**, est pourtant d'une élégance remarquable. Il essaie d'abord une valeur commode, ici 7, qui donne $7+1 = 8$ au lieu de 19. Le résultat est faux, mais il suffit de corriger proportionnellement : puisque 8 doit devenir 19, la valeur d'essai doit être multipliée par $\frac{19}{8}$. La réponse est donc $7 \times \frac{19}{8}$. Cette technique, transmise pendant près de trois mille ans, fonctionne à merveille, mais elle exige une astuce nouvelle à chaque problème.

4.1.2 Une histoire d'équilibre

Ce qui manquait aux anciens n'était donc pas l'ingéniosité, mais une **méthode générale** et les **symboles** pour l'écrire. Le premier pas vient de Bagdad : dans son traité rédigé vers 820, déjà rencontré au chapitre 2, **al-Khwarizmi** nomme *al-jabr*, la « restauration », le geste consistant à faire passer un terme d'un membre à l'autre. L'équation devient alors un objet que l'on manipule, et non plus une énigme que l'on devine.

Restait à l'écrire. Jusqu'au XVI^{e} siècle, les égalités sont rédigées en toutes lettres, ce qui rend le moindre calcul interminable. C'est le gallois **Robert Recorde** qui invente en 1557 le signe =, pour la raison charmante que rappelle la citation ci-dessus : deux traits parallèles, parce que rien n'est plus égal que deux droites qui ne se rencontrent jamais.

Ce signe suggère aussitôt la bonne image, celle qui guidera tout ce chapitre : une équation est une **balance en équilibre**. Tant que l'on fait subir le même traitement aux deux plateaux, l'équilibre est préservé. C'est en exploitant ce principe que nous isolerons l'inconnue, jusqu'à ce qu'elle se retrouve seule d'un côté et livre sa valeur.



4.2 Équations du premier degré

4.2.1 Vocabulaire

Définition : Une **équation** est une égalité contenant un nombre inconnu, désigné par une lettre appelée l'**inconnue**.

L'expression située à gauche du signe = est le **premier membre**, celle située à droite le **second membre**. Une **solution** de l'équation est une valeur de l'inconnue qui rend l'égalité vraie. **Résoudre** l'équation, c'est trouver *toutes* ses solutions.

Exemple : Considérons l'équation $5x - 3 = 2x + 9$, d'inconnue x.

Le nombre 4 est une solution, car en remplaçant x par 4 dans chaque membre :

$$5 \times 4 - 3 = 17 \qquad \text{et} \qquad 2 \times 4 + 9 = 17$$

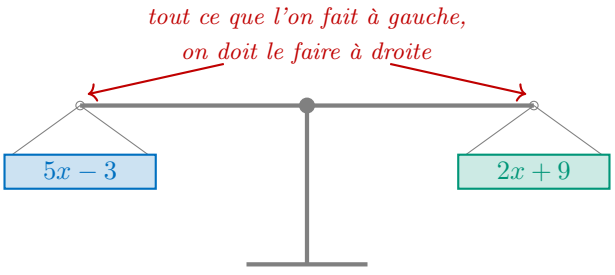
Les deux membres sont égaux, l'égalité est vraie. En revanche 1 n'est pas solution, car $5 \times 1 - 3 = 2$ tandis que $2 \times 1 + 9 = 11$.

Remarque : Vérifier qu'un nombre est solution est donc facile : il suffit de calculer séparément les deux membres et de comparer. Mais tester les nombres un par un ne permettra jamais d'être sûr de les avoir tous trouvés. C'est pourquoi il nous faut une méthode.

4.2.2 Le principe de la balance

Propriété 1 : On ne change pas les solutions d'une équation lorsque l'on :
- **ajoute** ou **retranche** un même nombre aux deux membres ;
- **multiplie** ou **divise** les deux membres par un même nombre **non nul**.

Tout repose sur l'image de la balance : les deux plateaux sont à l'équilibre, et l'on peut leur faire subir n'importe quel traitement, à condition de le faire *des deux côtés à la fois*.



4.2.3 Méthode de résolution

Méthode : Pour résoudre une équation du premier degré, on procède en trois temps :

1. On **regroupe** les termes contenant l'inconnue dans un membre, et les nombres seuls dans l'autre, en ajoutant ou en retranchant les mêmes quantités des deux côtés.

2. On **réduit** chaque membre.

3. On **divise** les deux membres par le coefficient de l'inconnue, afin de l'isoler.

On vérifie enfin le résultat en remplaçant l'inconnue par la valeur trouvée.

Détaillons chaque étape sur l'équation $5x-3 = 2x+9$. À droite de chaque ligne figure, en rouge, l'opération effectuée sur les *deux* membres ; les termes qu'elle fait disparaître sont colorés dans la ligne du dessus.

$$\begin{aligned}
5x-3 &= 2x+9 && \text{on retranche } 2x \text{ aux deux membres}\\
5x-3-2x &= 2x+9-2x && \text{les } 2x \text{ disparaissent à droite}\\
3x-3 &= 9 && \text{on ajoute 3 aux deux membres}\\
3x-3+3 &= 9+3 && \text{le } -3 \text{ disparaît à gauche}\\
3x &= 12 && \text{on divise les deux membres par 3}\\
\frac{3x}{3} &= \frac{12}{3} && \text{l'inconnue est enfin isolée}\\
x &= 4
\end{aligned}$$

Vérification. Pour $x=4$: le premier membre vaut $5\times 4-3=17$, le second $2\times 4+9=17$. L'équation admet donc une unique solution, le nombre 4.

Remarque : Avec l'habitude, on abrège en disant qu'un terme « change de membre en changeant de signe ». C'est exact, mais ce n'est qu'un raccourci : ce que l'on fait réellement, c'est retrancher ce terme des deux côtés. Garder l'image de la balance en tête évite bien des erreurs de signe.

Exemple : Résolvons $4(x-2)=7x+1$. Le premier membre contient des parenthèses : on commence donc par le développer.

$$\begin{aligned}
4(x-2) &= 7x+1 && \text{on développe le premier membre}\\
4x-8 &= 7x+1 && \text{on retranche } 4x \text{ aux deux membres}\\
-8 &= 3x+1 && \text{on retranche 1 aux deux membres}\\
-9 &= 3x && \text{on divise les deux membres par 3}\\
-3 &= x
\end{aligned}$$

La solution est donc -3. Remarquez qu'il est parfois plus commode de regrouper l'inconnue dans le *second* membre : on évite ainsi de manipuler un coefficient négatif.

Exemple : Résolvons $\frac{x}{3}+1=\frac{x-4}{2}$. La présence de fractions invite à multiplier d'emblée les deux membres par un même nombre bien choisi, ici 6, qui est un multiple commun de 3 et de 2 :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3}+1 &= \frac{x-4}{2} && \text{on multiplie les deux membres par 6}\\
6\times\frac{x}{3}+6\times 1 &= 6\times\frac{x-4}{2} && \text{on simplifie chaque fraction}\\
2x+6 &= 3(x-4) && \text{on développe le second membre}\\
2x+6 &= 3x-12 && \text{on retranche } 2x \text{ puis on ajoute 12}\\
18 &= x
\end{aligned}$$

La solution est 18, ce que l'on vérifie aisément : $\frac{18}{3}+1=7$ et $\frac{18-4}{2}=7$.

4.2.4 Deux cas particuliers

Remarque : Il arrive que l'inconnue disparaisse complètement au cours de la résolution. Deux situations se présentent alors :

- $2x+5=2x+1$ conduit, après avoir retranché $2x$ aux deux membres, à $5=1$. Cette égalité étant *fausse*, aucune valeur de x ne convient : l'équation **n'a pas de solution**.
- $3(x+2)=3x+6$ conduit à $3x+6=3x+6$, puis à $0=0$. Cette égalité étant *toujours vraie*, n'importe quelle valeur convient : **tous les réels** sont solutions.

Une inconnue qui s'évanouit n'est donc pas le signe d'une erreur : c'est l'égalité restante qu'il faut regarder.

4.3 Équations produit

4.3.1 Le produit nul

Définition : Une **équation produit** est une équation qui se présente sous la forme d'un **produit de facteurs égal à zéro**, c'est-à-dire :

$$A \times B = 0$$

où A et B sont des expressions contenant l'inconnue.

Propriété 2 : Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul :

$$A \times B = 0 \quad \text{équivaut à} \quad A = 0 \ \text{ ou } \ B = 0$$

∘ *Démonstration :* Si $A = 0$, alors le produit $A \times B$ vaut 0, et de même si $B = 0$: une telle équation est donc bien vérifiée.

Réciproquement, supposons $A \times B = 0$ et $A \neq 0$. On peut alors diviser les deux membres par A, ce qui donne $B = \dfrac{0}{A} = 0$. Ainsi, dès que l'un des facteurs n'est pas nul, l'autre l'est nécessairement. □

Remarque : Cette propriété est remarquable, car elle est propre au nombre 0. Un produit égal à 12 ne renseigne en rien sur ses facteurs : $12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = 24 \times \frac{1}{2}$, et il existe une infinité d'autres possibilités. C'est pourquoi une équation produit doit *impérativement* être ramenée à la forme $\ldots = 0$ avant d'être résolue.

4.3.2 Méthode de résolution

Méthode : Pour résoudre une équation produit :

1. On s'assure que l'équation est bien de la forme produit $= 0$, en factorisant si nécessaire.

2. On annonce que le produit est nul si et seulement si l'un des facteurs l'est, et on écrit les équations obtenues séparées par le mot **ou**.

3. On résout chacune de ces équations du premier degré.

Exemple : Résolvons $(2x - 6)(x + 5) = 0$. L'équation est déjà sous forme d'un produit nul :

$$(2x - 6)(x + 5) = 0$$

$$\text{équivaut à} \quad 2x - 6 = 0 \quad \textbf{ou} \quad x + 5 = 0$$

On résout alors chacune des deux équations séparément :

$$2x - 6 = 0 \iff 2x = 6 \iff x = 3 \qquad ; \qquad x + 5 = 0 \iff x = -5$$

L'équation admet donc *deux* solutions : 3 et -5.

Remarque : Une erreur fréquente consiste à développer le produit avant de résoudre, ce qui donnerait ici $2x^2 + 4x - 30 = 0$, une équation que l'on ne sait pas résoudre en Seconde. La forme factorisée est donc la forme *utile* : lorsqu'une équation est déjà factorisée, on ne la développe surtout pas.

Exemple : Résolvons $x^2 = 9$. Le membre de droite n'étant pas nul, on commence par tout ramener du même côté, puis on reconnaît une identité remarquable vue au chapitre 2 :

$$\begin{aligned} x^2 &= 9 && \text{on retranche 9 aux deux membres} \\ x^2 - 9 &= 0 && \text{on reconnaît } a^2 - b^2 \text{ avec } a = x \text{ et } b = 3 \\ (x + 3)(x - 3) &= 0 && \text{c'est une équation produit} \end{aligned}$$

d'où $x+3=0$ **ou** $x-3=0$, c'est-à-dire $x=-3$ ou $x=3$.

Retenez que l'équation $x^2=9$ admet bien *deux* solutions, et non la seule solution 3 : c'est l'oubli le plus courant.

Exemple : Résolvons $5x^2+3x=0$. Ici, aucune identité remarquable, mais un facteur commun évident :

$$5x^2+3x=0 \iff x(5x+3)=0$$

d'où $x=0$ ou $5x+3=0$, c'est-à-dire $x=-\dfrac{3}{5}$.

Notez bien que 0 est une solution à part entière, qu'il serait tentant mais faux d'écarter.

4.4 Équations quotient

4.4.1 Valeurs interdites

Définition : Une **équation quotient** est une équation de la forme :

$$\frac{A}{B}=0$$

où A et B sont des expressions contenant l'inconnue.

La division par zéro étant impossible, les valeurs de l'inconnue qui annulent le dénominateur B sont appelées les **valeurs interdites** de l'équation : elles ne peuvent en aucun cas être solutions.

Exemple : Cherchons les valeurs interdites de l'équation $\dfrac{2x-6}{x+1}=0$.

Le dénominateur s'annule lorsque $x+1=0$, c'est-à-dire pour $x=-1$. La valeur interdite est donc -1, et l'équation n'a de sens que pour les autres valeurs de x.

4.4.2 Méthode de résolution

Propriété 3 : Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul, sans que son dénominateur le soit :

$$\frac{A}{B}=0 \quad \text{équivaut à} \quad A=0 \ \text{ et } \ B\neq 0$$

Remarque : Attention à ne pas confondre les deux situations :

- pour un *produit* nul, on cherche les facteurs nuls et l'on relie les équations par **ou** ;
- pour un *quotient* nul, seul le numérateur doit s'annuler, et le dénominateur doit être écarté : les deux conditions sont reliées par **et**.

Autrement dit, le dénominateur ne fournit jamais de solution, il en *retire*.

Méthode : Pour résoudre une équation quotient :

1. On détermine d'abord les **valeurs interdites**, en résolvant « dénominateur $=0$ ».

2. On résout ensuite l'équation « numérateur $=0$ ».

3. On **compare** : toute valeur trouvée à l'étape 2 qui figure parmi les valeurs interdites doit être rejetée.

Exemple : Reprenons $\dfrac{2x-6}{x+1}=0$.

Valeurs interdites : $x+1=0$ donne $x=-1$, valeur interdite.
Numérateur nul : $2x-6=0$ donne $2x=6$, puis $x=3$.
Comparaison : la valeur 3 n'est pas la valeur interdite, elle est donc acceptée. L'équation admet une unique solution : 3.

Exemple : Résolvons $\dfrac{x^2-4}{x-2}=0$, un cas où la comparaison finale devient déterminante.

Valeurs interdites : $x-2=0$ donne $x=2$, valeur interdite.
Numérateur nul : on factorise par l'identité remarquable :

$$x^2-4=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (x+2)(x-2)=0$$

d'où $x=-2$ ou $x=2$.
Comparaison : la valeur 2 est précisément la valeur interdite, elle doit donc être *rejetée*. L'équation n'admet finalement qu'une seule solution : -2.

Remarque : Cet exemple montre pourquoi la troisième étape n'est jamais facultative. On serait tenté de simplifier d'emblée le quotient en écrivant $\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$, et de conclure hâtivement que les solutions sont celles de $x+2=0$. Le résultat serait ici correct, mais le raisonnement est dangereux : simplifier par $x-2$ suppose que ce nombre n'est pas nul, ce qui est justement la question. Mieux vaut conserver la méthode en trois temps.