Chapitre 5

Géométrie cartésienne

5.1 Introduction historique

Toute science est une connaissance certaine et évidente.

René Descartes - Philosophe et Mathématicien (1596 à 1650)

5.1.1 Un système pour les résoudre tous

Depuis les Grecs, l'arithmétique s'est considérablement enrichie et est couronnée par l'algèbre. La géométrie, par contre, à très peu progressé. Une ébauche de trigonométrie a été développée par certaines astronomes, mais hormis ça, on peut dire qu'en géométrie, un mathématicien de 1600 est l'exact contemporain d'Archimède ou d'Euclide. Les chercheurs auraient pu continuer de résoudre leurs éternels problèmes de la quadrature du cercle, de la trisection de l'angle de la même manière, mais tout bascula un jour du mois de mars 1636, quand un géomètre français, René Descartes, prévient son collègue et ami Marin Mersenne dans une lettre : « En la Géométrie, je tâche de donner une façon générale pour résoudre tous les problèmes qui ne l'ont encore jamais été. »

5.1.2 Géométrie Analytique

Sans présomption, ni vantardise, Descartes avait vu juste. Parce qu'en effet, sa *Géométrie* connaît à partir de juin 1637 un ressentissement considérable. Dans cet ouvrage, il expose une méthode pour résoudre les problèmes, tous les problèmes qui ne l'ont encore jamais été ! En somme, Descartes achève de réunir ce qu'avait déjà tenté Pythagore avant lui, l'arithmétique et la géométrie. Il invente en fait la géométrie algébrique, c'est à dire la géométrie traitée par des méthodes algébriques, qu'on appellera plus tard **géométrie analytique**.

Quel est ce dispositif simple et ingénieux ? Pour l'exprimer simplement, on pourrait dire que c'est l'idée du papier quadrillé. On pourrait dire aussi, pour reprendre géographes et marins, l'idée de représenter la position d'un point sur une sphère par deux nombres, la latitude et la longitude. Mais Descartes travaille dans un plan et pas sur une sphère. Et à partir de ces nombres, tout pourra être démontré, que ce soit longueur, angles ou propriétés.



5.2 Repères et coordonnées

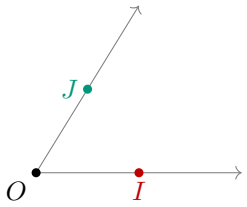
5.2.1 Repères du plan

Définition : Soient O, I et J trois points **non alignés** du plan. Le triplet $(O\,;I,J)$ est appelé un **repère du plan**.

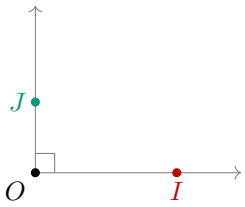
- Le point O est l'**origine** du repère.
- La droite (OI) est l'**axe des abscisses**, la droite (OJ) l'**axe des ordonnées**.

Définition : On distingue trois sortes de repères :

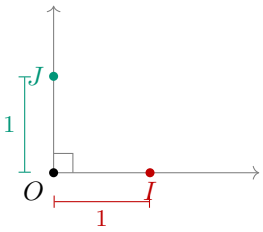
- un repère est **quelconque** lorsque les axes ne sont pas perpendiculaires ;
- il est **orthogonal** lorsque les axes sont perpendiculaires ;
- il est **orthonormé** lorsque les axes sont perpendiculaires *et* que $OI = OJ$.



repère **quelconque**



repère **orthogonal**



repère **orthonormé**

Remarque : Les formules des sections 5.3 et 5.4 n'exigent pas toutes les mêmes hypothèses : celle du milieu est valable dans *n'importe quel* repère, alors que celle de la distance ne fonctionne que dans un repère **orthonormé**. C'est une différence essentielle, sur laquelle nous reviendrons.

5.2.2 Coordonnées d'un point

Définition : Dans un repère $(O\,;I,J)$, tout point M du plan est repéré par un unique couple de nombres $(x\,;y)$, appelé le couple des **coordonnées** de M. On note $M(x\,;y)$.

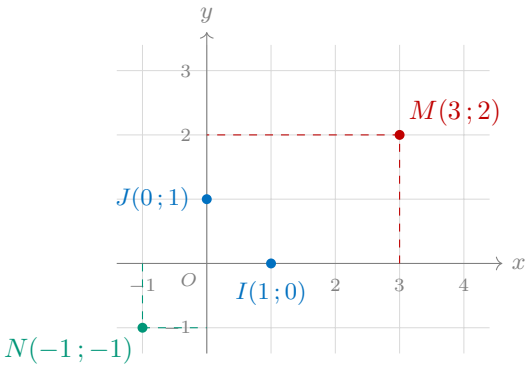
Le premier nombre x est l'**abscisse** de M, le second y son **ordonnée**. L'ordre est essentiel : le point $(3\,;1)$ n'est pas le point $(1\,;3)$.

Les trois points qui définissent le repère ont eux-mêmes des coordonnées, fixées une fois pour toutes :

$$O(0\,;0) \qquad I(1\,;0) \qquad J(0\,;1)$$

Remarque : Ces trois couples ne se calculent pas : ils découlent de la définition même du repère. C'est en effet le point I qui *fixe* l'unité sur l'axe des abscisses, et le point J celle sur l'axe des ordonnées. Dire que I a pour abscisse 1 revient donc simplement à dire que la longueur OI sert d'étalon pour graduer le premier axe.

C'est aussi la raison pour laquelle un même point du plan change de coordonnées lorsque l'on change de repère : les nombres ne décrivent pas le point tout seul, mais sa position *relativement* aux trois points O, I et J choisis au départ.



on lit d'abord l'**abscisse** sur l'axe horizontal, puis l'**ordonnée** sur l'axe vertical

Exemple : Sur la figure ci-dessus, le point M a pour abscisse 3 et pour ordonnée 2 : on écrit $M(3\,;2)$. Le point N, situé en bas à gauche de l'origine, a deux coordonnées négatives : $N(-1\,;-1)$.

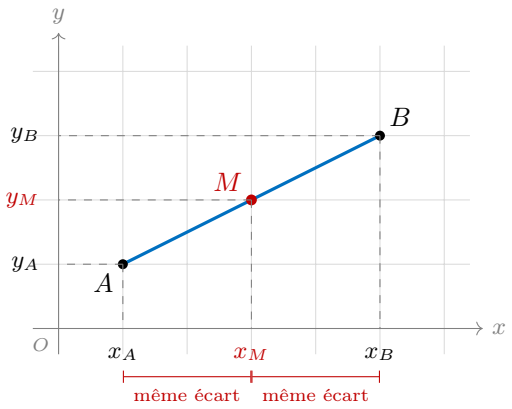
Notez que tout point de l'axe des abscisses a une ordonnée nulle, et que tout point de l'axe des ordonnées a une abscisse nulle. L'origine, elle, a pour coordonnées $(0\,;0)$.

5.3 Milieu d'un segment

Propriété 1 : Le plan est muni d'un repère quelconque. Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points. Les coordonnées du **milieu** M du segment $[AB]$ sont :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad \text{et} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Remarque : Les coordonnées du milieu sont donc les *moyennes* des coordonnées des extrémités, ce qui est très intuitif : le milieu est à mi-chemin en abscisse comme en ordonnée. Cette formule ne fait intervenir aucune longueur ni aucun angle : elle reste vraie dans n'importe quel repère, même non orthogonal.



Sur la figure, les projections de A, M et B sur l'axe des abscisses sont régulièrement espacées : x_M est bien au milieu de x_A et x_B, c'est-à-dire leur moyenne. Il en va de même sur l'axe des ordonnées.

Exemple : Soient $A(-2\,;5)$ et $B(6\,;1)$. Les coordonnées du milieu M de $[AB]$ sont :

$$x_M = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad y_M = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Le milieu est donc le point $M(2\,;3)$.

Méthode : Pour retrouver une extrémité connaissant l'autre et le milieu, on ne cherche pas de nouvelle formule : on utilise la même, en considérant la coordonnée manquante comme l'inconnue d'une équation du premier degré.

Exemple : Le point $M(4\,;-1)$ est le milieu de $[AB]$, avec $A(1\,;3)$. Déterminons les coordonnées de B.

D'après la propriété 1, l'abscisse de B vérifie :

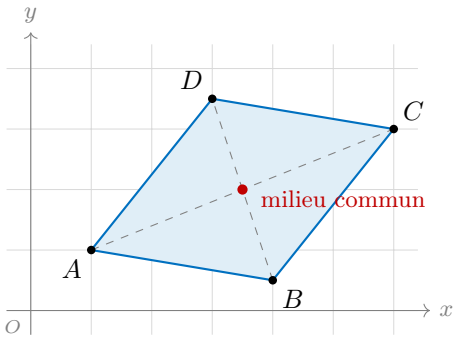
$$\frac{1+x_B}{2} = 4 \iff 1 + x_B = 8 \iff x_B = 7$$

De la même façon pour l'ordonnée :

$$\frac{3+y_B}{2} = -1 \iff 3 + y_B = -2 \iff y_B = -5$$

On obtient donc $B(7\,;-5)$. Ce point est le **symétrique** de A par rapport à M.

Remarque : Cette propriété fournit aussi un critère pour reconnaître un **parallélogramme** : $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le *même milieu*. Il suffit donc de calculer deux milieux et de les comparer.



5.4 Distance entre deux points

Propriété 2 : Le plan est muni d'un repère **orthonormé**. Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points. Alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

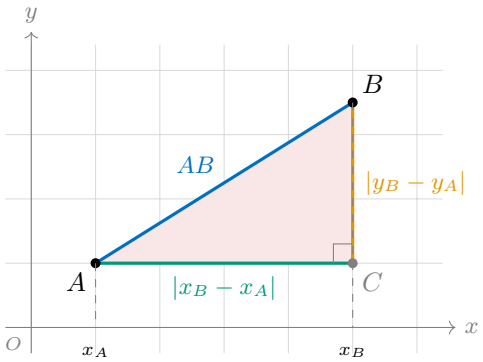
∘ *Démonstration :* Appelons C le point de coordonnées $(x_B\,;y_A)$, situé à l'intersection de l'horizontale passant par A et de la verticale passant par B. Le repère étant orthonormé, le triangle ABC est *rectangle en* C, et ses deux côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes :

$$AC = |x_B - x_A| \qquad \text{et} \qquad BC = |y_B - y_A|$$

Le théorème de Pythagore donne alors :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

les valeurs absolues disparaissant puisqu'elles sont élevées au carré. Comme une longueur est positive, on conclut en prenant la racine carrée. □



Remarque : L'hypothèse « repère orthonormé » est ici *indispensable* : sans angle droit entre les axes, le triangle ABC ne serait pas rectangle et Pythagore ne s'appliquerait pas. C'est là toute la différence avec la formule du milieu, valable dans n'importe quel repère.

Remarquez enfin que l'ordre des points est sans importance, puisque $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$: on trouve la même distance en partant de A ou de B.

Exemple : Dans un repère orthonormé, calculons la distance entre $A(-1\,;2)$ et $B(3\,;5)$:

$$AB = \sqrt{(3-(-1))^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Exemple : Montrons que le triangle ABC, avec $A(1\,;1)$, $B(5\,;1)$ et $C(3\,;4)$, est isocèle en C. Calculons les trois longueurs :

$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{16} = 4$$
$$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$
$$BC = \sqrt{(3-5)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Comme $AC = BC = \sqrt{13}$, le triangle est bien isocèle en C. Il n'est en revanche pas rectangle, puisque $AC^2 + BC^2 = 26$ alors que $AB^2 = 16$.

Remarque : Ce dernier exemple illustre la démarche générale : pour déterminer la nature d'un triangle, on calcule ses trois longueurs, puis on compare. L'égalité de deux longueurs révèle un triangle isocèle, et l'égalité de Pythagore un triangle rectangle. On conserve toujours les longueurs sous forme de racines carrées, sans les arrondir, afin de pouvoir comparer exactement.

5.5 Applications Python

5.5.1 Traduire une formule en fonction

Les deux formules de ce chapitre se programment sans difficulté : elles ne demandent que des opérations élémentaires et une racine carrée. Rappelons qu'en Python, une fonction se déclare par le mot-clé `def`, et que la racine carrée s'obtient en important le module `math`.

Listing 5.1 – Coordonnées du milieu d'un segment

```
def milieu(xA, yA, xB, yB):
    """Renvoie les coordonnees du milieu de [AB]."""
    xM = (xA + xB) / 2
    yM = (yA + yB) / 2
    return xM, yM
```

Exemple : Reprenons l'exemple de la section 5.3, avec $A(-2\,;5)$ et $B(6\,;1)$. L'appel de la fonction donne :

```
>>> milieu(-2, 5, 6, 1)
(2.0, 3.0)
```

On retrouve bien le point $M(2\,;3)$. Notez que Python affiche 2.0 et non 2 : la division `/` produit toujours un nombre décimal, même lorsque le résultat est entier.

Listing 5.2 – Distance entre deux points dans un repère orthonormé

```
from math import sqrt

def distance(xA, yA, xB, yB):
    """Renvoie la distance AB."""
    return sqrt((xB - xA)**2 + (yB - yA)**2)
```

Remarque : L'opérateur `**` désigne la puissance : `(xB - xA)**2` est le carré de la différence des abscisses. Attention aux parenthèses, car `xB - xA**2` calculerait tout autre chose, la puissance étant prioritaire sur la soustraction.

5.5.2 Un programme qui décide

L'intérêt de la programmation apparaît lorsque le calcul doit être suivi d'une *décision*. Le programme suivant détermine si un triangle est isocèle, en comparant les longueurs obtenues.

Listing 5.3 – Nature d'un triangle

```
from math import sqrt

def distance(xA, yA, xB, yB):
    return sqrt((xB - xA)**2 + (yB - yA)**2)

```

```
6  def est_isocele(xA, yA, xB, yB, xC, yC):
7      AB = distance(xA, yA, xB, yB)
8      AC = distance(xA, yA, xC, yC)
9      BC = distance(xB, yB, xC, yC)
10     if AB == AC or AB == BC or AC == BC:
11         return True
12     else:
13         return False
```

Exemple : Testons ce programme sur le triangle de la section 5.4, avec $A(1\,;1)$, $B(5\,;1)$ et $C(3\,;4)$:

```
>>> est_isocele(1, 1, 5, 1, 3, 4)
True
```

Le programme confirme le résultat obtenu à la main.

Remarque : Une remarque importante sur les tests d'égalité : les calculs de racines carrées produisent des valeurs *approchées*, et deux longueurs théoriquement égales peuvent différer de très peu dans la mémoire de la machine. Le test `AB == AC` peut donc parfois renvoyer `False` à tort.

C'est pourquoi le calcul à la main, mené avec des valeurs exactes comme $\sqrt{13}$, reste plus fiable que le programme : l'ordinateur calcule vite, mais il arrondit.

Méthode : Pour écrire un programme traduisant une formule de géométrie :

1. On identifie les **entrées** du problème, ici les coordonnées des points, qui deviennent les paramètres de la fonction.

2. On traduit la formule ligne par ligne, en respectant les priorités opératoires à l'aide de parenthèses.

3. On indique la **sortie** avec `return`.

4. On teste enfin la fonction sur un exemple dont on connaît déjà le résultat.