Chapitre 6

Pourcentages

6.1 Introduction historique

Il y a trois sortes de mensonges : les mensonges, les gros mensonges et les statistiques.

Formule popularisée par Mark Twain - Écrivain américain (1835 à 1910)

Le pourcentage est sans doute l'outil mathématique le plus présent dans la vie quotidienne : soldes, taux d'intérêt, sondages, taux d'inflation, résultats d'élections. C'est aussi celui dont on abuse le plus, volontairement ou non : d'où la boutade ci-dessus. Annoncer qu'un prix a baissé de 50 % puis augmenté de 50 % laisse croire qu'il est revenu à sa valeur initiale : nous verrons en section 6.3 qu'il n'en est rien. Ce chapitre a donc un double objectif, savoir calculer avec des pourcentages, et savoir ne pas se laisser tromper par eux.

6.1.1 Un impôt romain

L'usage de compter « sur cent » remonte à la Rome antique. L'empereur Auguste institue une taxe sur les ventes aux enchères appelée *centesima rerum venalium*, littéralement « le centième des choses vendues », soit un pourcentage de 1 %. Le choix de la base cent n'a rien d'anodin : elle permet de comparer des quantités très différentes en les ramenant à une échelle commune, exactement comme le fait aujourd'hui un taux de chômage ou un taux de réussite.

6.1.2 De « per cento » au symbole %

C'est au Moyen Âge, dans les cités marchandes italiennes, que la pratique se généralise. Les registres de commerce de Gênes, Venise et Florence abondent en calculs d'intérêts, et les marchands y écrivent l'abréviation *per cento*, « pour cent ». Cette expression se contracte progressivement à l'écrit : au XV^{e} siècle apparaît la forme abrégée « p. cto », puis le « cto » se déforme au fil des copies manuscrites pour donner, vers 1650, le symbole % que nous utilisons encore. On y devine toujours la trace des deux zéros de cent, séparés par la barre de la fraction.

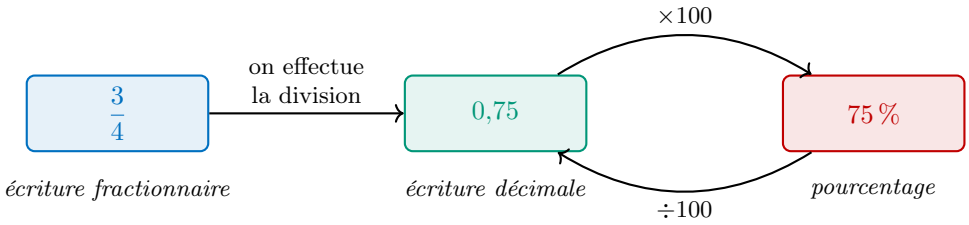


6.2 Proportions

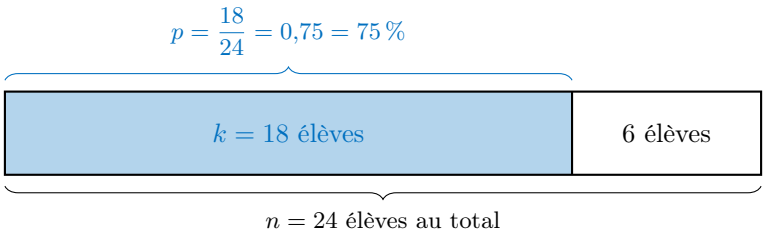
6.2.1 Proportion et pourcentage

> **Définition :** Soit une population de n individus, dont k possèdent un certain caractère. On appelle **proportion** de ces individus le quotient :
>
> $$p = \frac{k}{n}$$
>
> Ce nombre est toujours compris entre 0 et 1. On l'exprime souvent en **pourcentage** : la proportion p correspond à $t = p \times 100$ pour cent, ce que l'on note $t\,\%$.

Une même proportion s'écrit donc de trois façons différentes, entre lesquelles il faut savoir circuler sans hésiter :



La proportion se visualise également comme une part d'un tout, ce qui en donne l'interprétation la plus concrète :



Exemple : Dans une classe de 24 élèves, 18 sont demi-pensionnaires. La proportion de demi-pensionnaires vaut :

$$p = \frac{18}{24} = 0{,}75 = 75\,\%$$

Inversement, si l'on sait que 35 % des 340 élèves d'un lycée pratiquent un sport en club, leur nombre est :

$$0{,}35 \times 340 = 119 \text{ élèves}$$

Propriété 1 : Appliquer un pourcentage $t\,\%$ à une quantité revient à la **multiplier** par $\frac{t}{100}$:

$$t\,\% \text{ de } N = \frac{t}{100} \times N$$

Remarque : Un pourcentage n'a donc de sens que rapporté à un **total de référence**. Dire « 30 % » sans préciser de quoi ne signifie rien : 30 % d'une classe de 24 élèves, ce sont 7,2 élèves, tandis que 30 % d'un lycée de 340 élèves en représentent 102. C'est en jouant sur cette référence implicite que l'on trompe le plus facilement un lecteur pressé.

6.2.2 Proportion d'une proportion

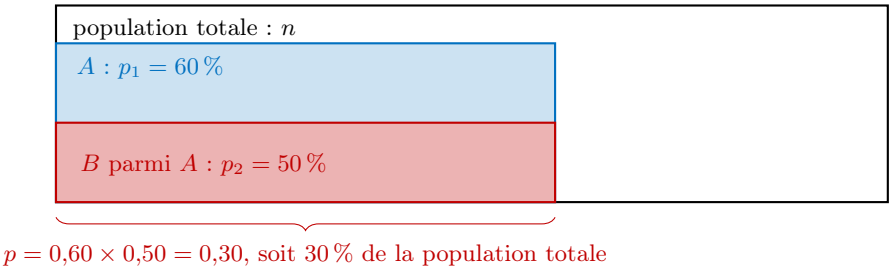
Propriété 2 : Soit une population dans laquelle une proportion p_1 possède un caractère A, et parmi ceux-ci, une proportion p_2 possède un caractère B. Alors la proportion d'individus possédant à la fois A et B dans la population totale vaut :

$$p = p_1 \times p_2$$

∘ *Démonstration :* Notons n l'effectif total. Le nombre d'individus possédant le caractère A vaut $p_1 \times n$. Parmi ceux-ci, la proportion p_2 possède B, ce qui fait :

$$p_2 \times (p_1 \times n) = (p_1 \times p_2) \times n \text{ individus}$$

En divisant par l'effectif total n, on obtient bien la proportion annoncée. □



Exemple : Dans un lycée, 60 % des élèves sont des filles, et parmi ces filles, 50 % font de l'allemand. La proportion de filles germanistes dans le lycée entier vaut donc :

$$0{,}60 \times 0{,}50 = 0{,}30 = 30\,\%$$

Remarque : Attention à ne jamais confondre les deux références. Dans l'exemple ci-dessus, 50 % se rapporte aux *filles*, alors que 30 % se rapporte à *tous les élèves*. C'est pourquoi les proportions successives se **multiplient** et ne s'additionnent jamais.

En revanche, deux proportions calculées sur la *même* référence peuvent s'ajouter, à condition que les groupes ne se recouvrent pas : si 40 % des élèves étudient l'espagnol et 30 % l'allemand, et qu'aucun n'étudie les deux, alors 70 % étudient l'une de ces deux langues.

6.3 Évolutions

6.3.1 Taux d'évolution et coefficient multiplicateur

Définition : Une quantité passe d'une **valeur de départ** V_D non nulle à une **valeur d'arrivée** V_A. On appelle **taux d'évolution** le nombre :

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D}$$

exprimé le plus souvent en pourcentage. Il est **positif** en cas de hausse, **négatif** en cas de baisse.

Propriété 3 : Avec les notations précédentes, on appelle **coefficient multiplicateur** le nombre :

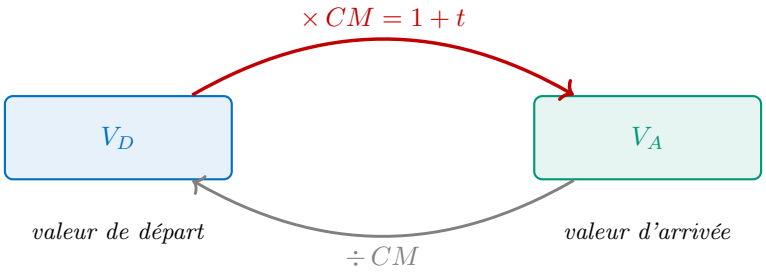
$$CM = 1 + t \qquad \text{et l'on a} \qquad V_A = CM \times V_D$$

Réciproquement, on retrouve la valeur de départ en divisant : $V_D = \dfrac{V_A}{CM}$.

∘ *Démonstration :* Il suffit de partir de la définition du taux et d'isoler V_A :

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D} \iff t \times V_D = V_A - V_D \iff V_A = V_D + t\,V_D = (1+t)V_D$$

□



Méthode : Le passage d'un taux au coefficient multiplicateur se fait dans les deux sens :

Taux t	$+20\,\%$	$+5\,\%$	$-20\,\%$	$-100\,\%$
Coefficient CM	1,20	1,05	0,80	0

Un coefficient supérieur à 1 traduit une hausse, un coefficient compris entre 0 et 1 une baisse.

Exemple : Un article coûtant 80 euros augmente de 15 %. Son coefficient multiplicateur vaut 1,15, donc son nouveau prix est :

$$1{,}15 \times 80 = 92 \text{ euros}$$

Inversement, un article soldé à 68 euros après une remise de 15 % coûtait auparavant :

$$\frac{68}{0{,}85} = 80 \text{ euros}$$

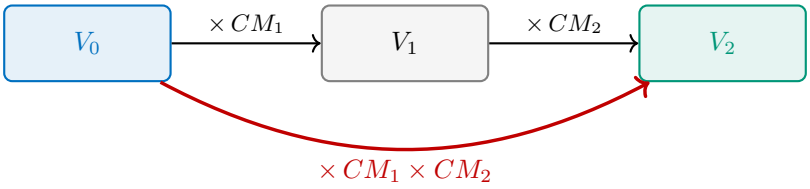
Notez bien que l'on *divise* par 0,85, et que l'on n'augmente surtout pas le prix soldé de 15 %, ce qui donnerait 78,20 euros, un résultat faux.

6.3.2 Évolutions successives

Propriété 4 : Lorsqu'une quantité subit plusieurs évolutions successives de coefficients CM_1, CM_2, …, CM_n, le coefficient multiplicateur **global** est leur **produit** :

$$CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2 \times \cdots \times CM_n$$

Le taux d'évolution global s'en déduit par $t_{\text{global}} = CM_{\text{global}} - 1$.

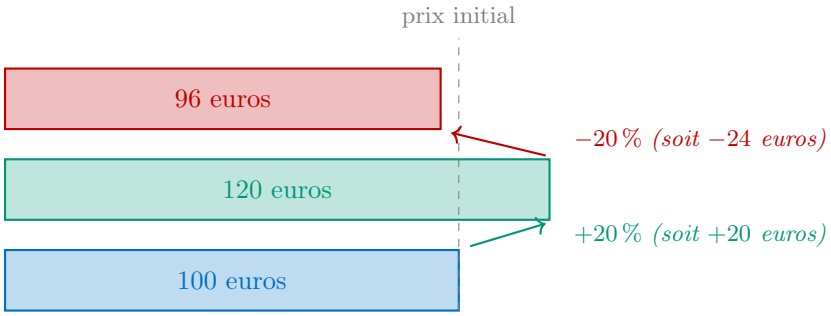


Remarque : Les **coefficients** se multiplient, mais les **taux ne s'additionnent pas**. C'est l'erreur la plus répandue de tout le chapitre, et celle sur laquelle repose l'illusion évoquée en introduction.

Exemple : Un prix augmente de 20 %, puis diminue de 20 %. Le coefficient global vaut :

$$1{,}20 \times 0{,}80 = 0{,}96$$

Le prix final ne revient donc *pas* à sa valeur initiale : il lui est inférieur de 4 %. Un article à 100 euros passe à 120 euros, puis redescend à 96 euros.



La baisse de 20 % s'applique à 120 euros et non à 100 : elle retire donc 24 euros, alors que la hausse n'en avait ajouté que 20. C'est ce décalage de référence qui explique la perte finale de 4 %.

6.3.3 Évolution réciproque

Propriété 5 : On appelle **évolution réciproque** celle qui ramène la valeur d'arrivée à la valeur de départ. Son coefficient multiplicateur est l'**inverse** du coefficient initial :

$$CM' = \frac{1}{CM}$$

Exemple : Un prix augmente de 25 %, donc $CM = 1{,}25$. Pour revenir au prix initial, il faut appliquer :

$$CM' = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8 \qquad \text{soit une baisse de } 20\,\%$$

Une hausse de 25 % s'annule donc par une baisse de 20 %, et non de 25 %. On vérifie : $1{,}25 \times 0{,}80 = 1$.

Remarque : Une dernière précaution de vocabulaire, souvent source de confusion dans les médias. Lorsqu'un taux passe de 10 % à 12 %, on dit qu'il a augmenté de **deux points**, et non de deux pour cent : en pourcentage, la hausse est en réalité de

$$\frac{12-10}{10} = 0{,}2 = 20\,\%$$

Le *point* mesure un écart entre deux pourcentages, le *pourcentage* mesure une évolution relative. Confondre les deux revient à annoncer une hausse dix fois moindre qu'elle ne l'est.