# Chapitre 7

# Fonctions numériques

## 7.1 Introduction historique

*Bien que la fabrique de l'univers soit la plus parfaite, et l'ouvrage du plus sage Créateur, rien n'y prend place sans qu'une relation de minimum à maximum n'y apparaisse.*

Leonhard Euler - 1744

Au 17ème siècle, alors que le grand ouvrage d'unification des mathématiques est dominé par un Suisse, **Leonhard Euler** (1707 à 1783), ce dernier formalise en premier l'étude d'un domaine qui deviendra central en recherche ou aux yeux de l'enseignement : l'étude des fonctions. En effet, sous l'amorce de la révolution industrielle qui émerge en Angleterre et a rapidement des conséquences sur le continent Européen, les ingénieurs se servent de plus en plus des mathématiques qui mûrissent dans les premières écoles d'ingénieurs, comme à Paris en 1794 dans l'Ecole Polytechnique qui jouera par la suite un rôle tout à fait considérable dans la pensée mathématique. Cette notion de **fonction** amènera des conclusions remarquables dans l'étude des choses physiques et pratiques, et sera l'objet de ce cours.

### 7.1.1 Entre Anciens et Contemporains

Pour un homme du 21ème siècle, qui a appris et intégré toutes les découvertes du passé comme l'enseignement qu'il a reçu au collège puis au lycée, il est très difficile de comprendre comme il fut difficile pour les Anciens de faire certaines de ces découvertes, qui nous paraissent toutes « naturelles ». En effet, il fallut des dizaines et des dizaines d'années de travail et de réflexion pour aboutir à la notion de **fonction**, alors qu'il nous semble aujourd'hui évident que nos revenus sont « fonctions » de notre travail, que la température de notre salon est « fonction » de l'état de notre chauffage, jusqu'à être présent dans notre langage habituel : « Pour l'heure où on ira au cinéma, on fera en fonction de toi... ».

Ainsi, c'est le mathématicien suisse **Jean Bernouilli**, qui en 1718, fera le lien entre la droite des anciens, *le plus court chemin entre deux points*, et la droite des analystes, représentation graphique d'une fonction affine. Parmi ses considérations, il s'attardera également sur une forme mathématique qui passionnait les Anciens, la parabole, dont un point de vue fonctionnel nous fait l'appeler la représentation graphique d'une fonction bien particulière, un polynôme du second degré...



## 7.2 Notion de fonction

**Définition :**
Soit $D$ un ensemble de nombres réels, par exemple un intervalle.

- On appelle **fonction** $f$ sur $D$ l'objet mathématique qui à chaque élément $x$ de l'ensemble $D$, appelé **antécédent**, associe un unique réel noté $f(x)$, appelé **image** de $x$.

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x)$$

- L'ensemble $D$, souvent noté $D_f$, est appelé l'**ensemble de définition** de la fonction : c'est l'ensemble des nombes pour lesquels il *existe* une image par la fonction.

*Remarque :* On notera que :

- Si il n'est pas donné, l'ensemble de définition d'une fonction peut être obtenu par analyse de son expression, en cherchant les valeurs que $x$ ne peut pas prendre ;
- Un nombre peut avoir 0, un seul ou plusieurs antécédents. La définition n'impose l'unicité que dans un sens : chaque antécédent a une image et une seule, mais une image peut être partagée.

**Définition :**
Soit $f$ une fonction définie sur un ensemble $D$, et $x \in D$. On appelle **expression algébrique** de $f$ l'égalité donnant $f(x)$ en fonction de la variable $x$.

*Exemple :* Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-6)^2$.
L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$ : on peut calculer les images de n'importe quel réel par la fonction $g$, par exemple on a $g(2) = (2-6)^2 = (-4)^2 = 16$ ;

*Remarque :* On notera que :

- On peut aussi noter l'expression algébrique de cette manière : $g : x \mapsto (x-6)^2$, qui se lit « la fonction $g$ qui à $x$ associe $(x-6)^2$ » ;
- Il n'existe pas toujours d'expression algébrique à une fonction : une courbe relevée par un capteur, ou un tableau de mesures, définissent une fonction sans qu'aucune formule ne les décrive.

**Méthode :**
Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction donnée par son expression, on cherche les valeurs de $x$ qui rendraient un calcul **impossible** :

- un **dénominateur** ne doit pas s'annuler ;
- une **racine carrée** ne peut porter que sur un nombre positif.

En l'absence de tels obstacles, la fonction est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

*Exemple :* Déterminons les ensembles de définition des trois fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto 3x^2 - 5$ : aucun obstacle, donc $D_f = \mathbb{R}$ ;
- $g : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-4}$ : le dénominateur s'annule pour $x = 4$, donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, c'est-à-dire $]-\infty; 4[ \cup ]4; +\infty[$ ;
- $h : x \mapsto \sqrt{x-3}$ : il faut $x - 3 \geqslant 0$, soit $x \geqslant 3$, donc $D_h = [3; +\infty[$.

**Définition :**
Soit $f$ une fonction définie sur un ensemble $D$, et $x \in D$. Un **tableau de valeurs** d'une fonction $f$ donne, sur la première ligne (ou colonne), différentes valeurs de la variable $x$ et, en vis-à-vis sur la deuxième ligne (ou colonne), les images $f(x)$ qui leur sont associées.

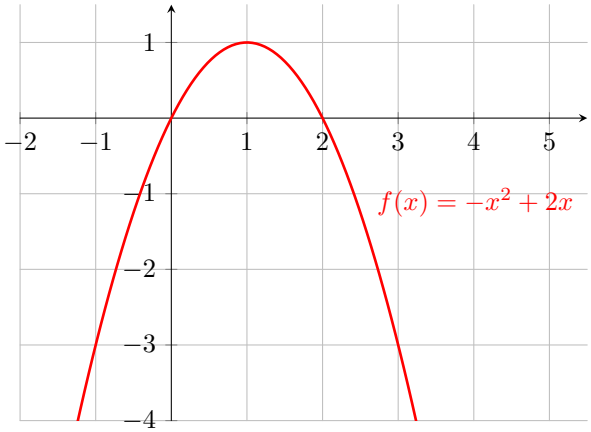
*Exemple :* La fonction $f : x \mapsto 3x + 5$ admet le tableau de valeurs ci-dessous.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-4$ | $-1$ | $2$ | $5$ | $8$ | $11$ | $14$ |

## 7.3 Courbe représentative d'une fonction

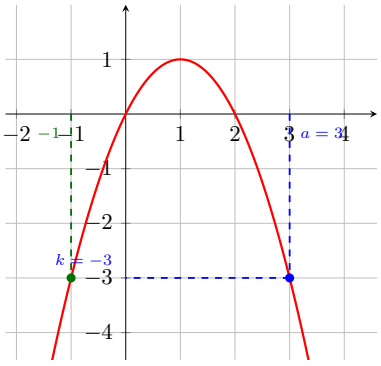
**Définition :**
On considère une fonction $f$ définie sur un ensemble de définition $D$.
On appelle alors **courbe représentative** de la fonction $f$ l'ensemble des points dans un repère de coordonnées $(x; f(x))$ où $x \in D$. On l'appelle aussi le **graphe** de la fonction $f$.

*Exemple :* La fonction $f : x \mapsto -x^2 + 2x$ admet la courbe représentative suivante :



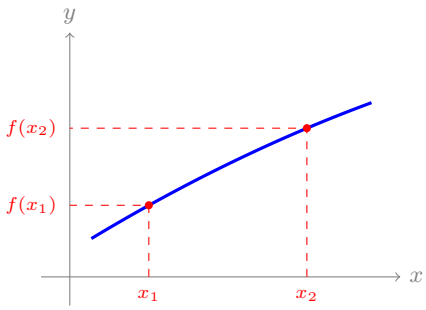

**Méthode :**
La courbe permet de lire les images et les antécédents, mais les deux lectures ne se font pas dans le même sens :
• pour lire l'**image** d'un réel $a$, on part de $a$ sur l'axe des abscisses, on monte **verticalement** jusqu'à la courbe, puis on lit l'ordonnée obtenue ;
• pour lire les **antécédents** d'un réel $k$, on part de $k$ sur l'axe des ordonnées, on se déplace **horizontalement**, et on lit les abscisses de *tous* les points d'intersection avec la courbe.

*Exemple :* Sur la courbe ci-dessous, l'image de 3 vaut $-3$, tandis que le réel $-3$ admet *deux* antécédents, $-1$ et 3. C'est bien la traduction de la définition : un antécédent n'a qu'une image, mais une image peut avoir plusieurs antécédents.

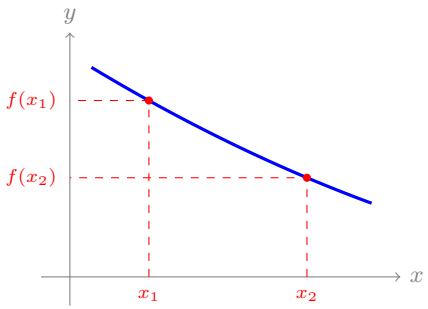



## 7.4 Variations d'une fonction

**Définition :**
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.
• On dit que $f$ est **croissante** sur $I$ lorsque que alors que $x$ augmente sur $I$, $f(x)$ augmente aussi. Autrement dit, pour tout réel $x_1$ et $x_2$ tels que $x_1 \leqslant x_2$, alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
• On dit que $f$ est **décroissante** sur $I$ lorsque que alors que $x$ diminue sur $I$, $f(x)$ diminue aussi. Autrement dit, pour tout réel $x_1$ et $x_2$ tels que $x_1 \geqslant x_2$, alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.




**$f$ croissante** :
l'ordre est *conservé*




**$f$ décroissante** :
l'ordre est *inversé*

*Remarque :* On notera que :

- Si $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction $f$ croissante sur $I$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ « monte ». Inversement, si $f$ est décroissante sur $I$, alors $\mathscr{C}_f$ « descend ».
- Si sur un intervalle $I$, la fonction $f$ renvoie toujours la même valeur, alors on dit que $f$ est **constante** sur cet intervalle. Et sa courbe est horizontale sur cet intervalle.
- Cette définition nous permet de savoir si le sens d'une inégalité change ou pas lorsqu'on applique une fonction aux deux termes. Par exemple, nous verrons plus tard que la fonction inverse définie par $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$, ce qui signifie que pour tout $a$ et $b$ réels strictement positifs :

$$a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

**Définition :**
On appelle **tableau de variations** un tableau regroupant les informations concernant sur les variations d'une fonction sur son ensemble de définition.

*Exemple :* Un tableau de variations se représente de la manière suivante :

| $x$ | $-5$ | | $2$ | | $4$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $8$ | ↘ | $1$ | ↗ | $9$ | ↘ | $3$ |

Ici, $f$ est croissante sur l'intervalle $[2;4]$, et décroissante sur $[-5;2]$ et $[4;10]$. Les flèches indiquent le sens de variation, et les nombres inscrits à leurs extrémités sont les valeurs prises par la fonction aux bornes de chaque intervalle.

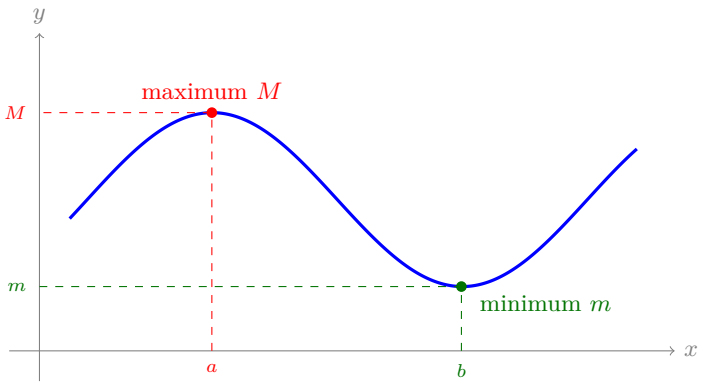
## 7.5 Extremum d'une fonction

**Définition :**
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.
• On dit que $f$ a pour **maximum** $M$ sur $I$ si il existe un $a \in I$ tel que $f(a) = M$ et que $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$. Autrement dit, $M$ (si il existe) est l'ordonnée du point le plus haut sur la courbe de $f$ sur $I$.
• On dit que $f$ a pour **minimum** $m$ sur $I$ si il existe un $b \in I$ tel que $f(b) = m$ et que $f(x) \geqslant m$ pour tout $x \in I$. Autrement dit, $m$ (si il existe) est l'ordonnée du point le plus bas sur la courbe de $f$ sur $I$.

*Remarque :* On notera que :

- Un **extremum** est un maximum ou un minimum.
- Une fonction peut ne pas avoir de maximum ou de minimum. La fonction cube, par exemple, n'en admet aucun sur $\mathbb{R}$.

- Un extremum est une **ordonnée**, donc une valeur prise par la fonction. Il ne faut pas le confondre avec l'abscisse $a$ en laquelle il est atteint.

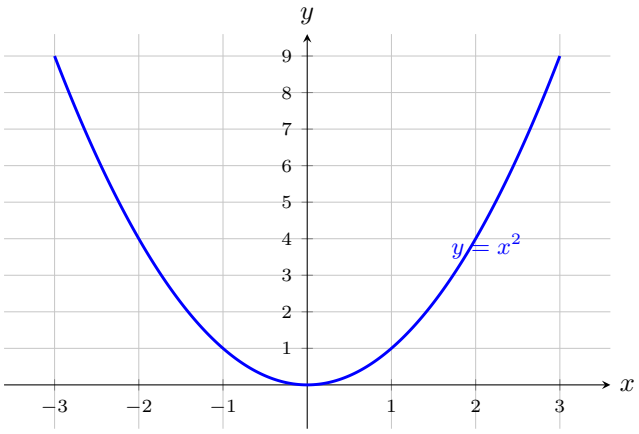



## 7.6 Fonctions de référence

Nous disposons désormais du vocabulaire nécessaire pour étudier quelques fonctions particulières, dont la connaissance est indispensable : ce sont les **fonctions de référence**. Pour chacune d'elles, nous donnerons son ensemble de définition, sa courbe représentative et son tableau de variations.

### 7.6.1 Fonction carrée

**Définition :**
On appelle **fonction carré** la fonction qui à tout réel $x$ associe le nombre réel $x^2$. Sa courbe représentative est une **parabole**.




**Proposition 1 :** On a :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$.
2. La fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$. On a alors :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x^2$ | ↘ | $0$ | ↗ |

∘ Démonstration : On procède point par point :

1. Pour tout réel $x$, le produit $x \times x$ est un produit entre deux réels du même signe, son signe sera donc positif.

2. Soient $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $a < b \leqslant 0$. On sait que $a + b \leqslant 0$, et $a - b < 0$, par définition. On a alors par produit de deux nombres du même signe :

$$(a - b)(a + b) \geqslant 0$$

Or, $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, ce qui nous donne donc :

$$a^2 - b^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 \geqslant b^2$$

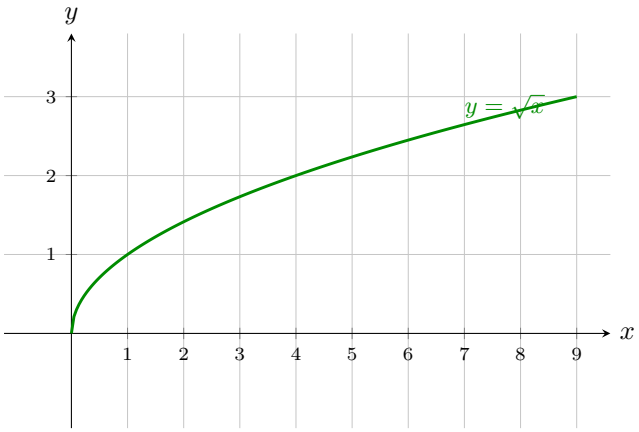
On a donc $a < b \leqslant 0 \Rightarrow a^2 \geqslant b^2$, ce qui nous permet de déduire que la fonction carré est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$.
On procède de même pour l'intervalle $[0; +\infty[$.

### 7.6.2 Fonction racine carrée

**Définition :**
Soit $x$ un nombre réel positif. On appelle **racine carrée de** $x$ le nombre réel positif noté $\sqrt{x}$ tel que :

$$(\sqrt{x})^2 = x$$

On appelle **fonction racine carrée** la fonction qui à tout réel positif $x$ associe le réel $\sqrt{x}$.




**Proposition 2 :** On a :

1. Pour tout $x \in ]0; +\infty[$, $\sqrt{x} > 0$, et $\sqrt{0} = 0$.
2. La fonction racine carré est croissante sur $[0; +\infty[$.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $\sqrt{x}$ | $0$ ↗ | |

∘ Démonstration : On procède point par point :

1. Par définition de la racine carrée d'un nombre on a pour tout $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \geqslant 0$. Et de plus, l'équation $x^2 = 0$ n'admet qu'une seule solution, $x = 0$. Ce qui implique le résultat.
2. Soient $a$ et $b$ deux nombres réels positifs tels que $a < b$. On sait grâce aux identités remarquables que :

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$$

Ce qui nous donne :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Or $a - b < 0$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$, donc par quotient d'un négatif par un positif, on a :

$$\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} < 0 \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0 \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

Ainsi $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$, la fonction racine carrée est bien croissante.

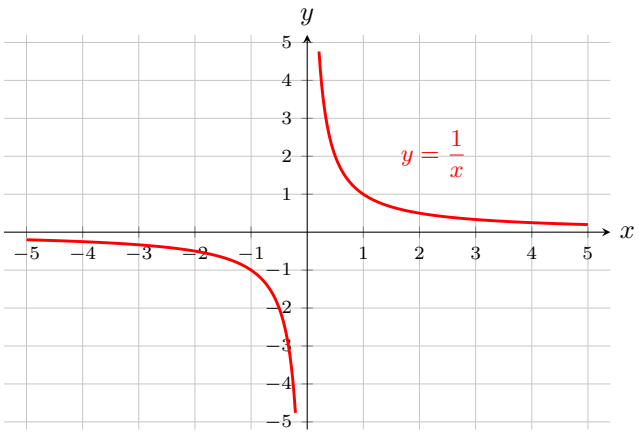
*Remarque :* Il est important de se souvenir que pour tout $x$ positif, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.
En effet, si la racine carrée est une puissance $a$ telle que $\sqrt{x} = x^a$, alors pour tout $x$ positif :

$$(\sqrt{x})^2 = x \Rightarrow (x^a)^2 = x \Rightarrow x^{2a} = x^1$$

Et on en déduit que $a = \dfrac{1}{2}$. (Ce point est admis.)

### 7.6.3 Fonction inverse

**Définition :**
On appelle **fonction inverse** la fonction qui à tout $x \in \mathbb{R}^* = ]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ associe le nombre réel $\dfrac{1}{x}$. Ainsi la fonction inverse est définie pour tout $x$ réel différent de 0. Sa courbe représentative est une **hyperbole**.




**Proposition 3 :** On a :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x} \neq 0$.
2. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

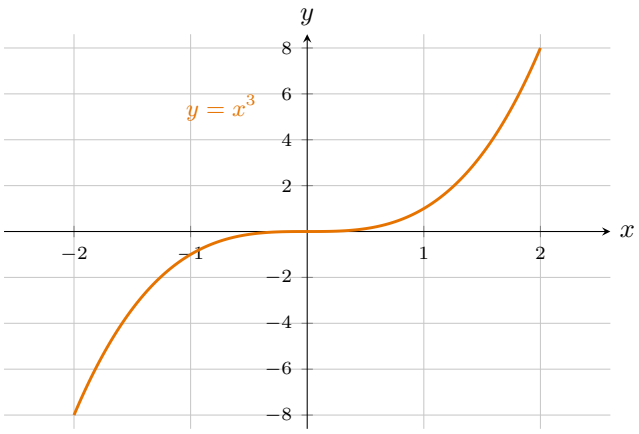
| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | ↘ | ‖ | ↘ |

∘ Démonstration : On procède point par point :

1. Supposons qu'il existe un réel $x$ tel que :
$$\frac{1}{x} = 0$$
Alors $1 = 0 \times x$, ce qui nous donne $0 = 1$. Chose absurde, ce réel $x$ n'existe donc pas.
2. Soient $a$, $b \in ]0;+\infty[$ tels que $a < b$. On a alors :
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$$
Or par définition $0 < b - a$ et $ab > 0$, ce qui par quotient de deux nombres positifs nous donne :
$$\frac{b-a}{ab} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$
Ainsi on a $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, la fonction inverse est donc décroissante sur $]0;+\infty[$. On procède de la même manière sur $]-\infty;0[$.

### 7.6.4 Fonction cube

**Définition :**
On appelle **fonction cube** la fonction qui à tout réel $x$ associe le nombre réel $x^3$.




**Proposition 4 :** On a :

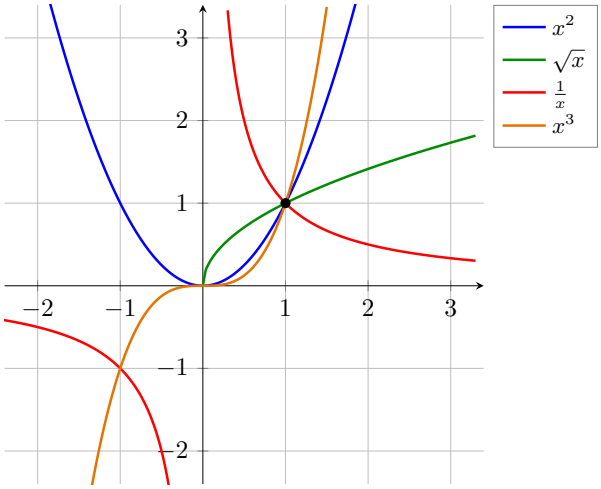
1. La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x^3$ | | $0$ ↗ | |

◦ Démonstration : Admise.

### 7.6.5 Bilan

Les quatre fonctions de référence se retiennent d'un seul coup d'œil, en les traçant dans un même repère. On observe en particulier leurs positions relatives sur $[0;1]$ et sur $[1;+\infty[$, qui s'échangent de part et d'autre du point de coordonnées $(1;1)$ par lequel elles passent toutes.



| Fonction | Définie sur | Variations | Courbe |
|---|---|---|---|
| $x \mapsto x^2$ | $\mathbb{R}$ | décroissante puis croissante | parabole |
| $x \mapsto \sqrt{x}$ | $[0;+\infty[$ | croissante | demi-parabole |
| $x \mapsto \frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | décroissante sur chaque intervalle | hyperbole |
| $x \mapsto x^3$ | $\mathbb{R}$ | croissante | cubique |

*Remarque :* Attention à la troisième ligne : la fonction inverse est décroissante *sur chacun* des deux intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, mais elle ne l'est pas sur leur réunion. En effet $-1 < 2$ alors que $\frac{1}{-1} = -1$ est plus petit que $\frac{1}{2}$ : l'ordre n'est pas inversé lorsque l'on franchit 0.

### 7.6.6 Applications : équations et inéquations

**Proposition 5 :** Soit $x \in \mathbb{R}$, on considère l'équation $x^2 = a$. On a alors trois cas de figure :

1. Si a<0 : l'équation n'a pas de solution.
2. Si a=0 : l'équation a une unique solution $x = 0$.
3. Si a>0 : l'équation a deux solutions, $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$.

∘ Démonstration : On s'intéresse aux trois cas de figure :

1. Si a<0 : Impossible, car on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$.
2. Si a=0 : Alors l'équation devient $x^2 = 0$, autrement dit $x \times x = 0$. Par produit nul on en déduit $x = 0$.
3. Si a>0 : Alors $\sqrt{a}$ est bien défini, et ainsi on remarque que :

$$x^2 - a = (x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})$$

Sachant ceci, l'équation $x^2 = a$ nous donne $x^2 - a = 0$, et donc $(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$.
Par résolution d'un produit nul, on a $x + \sqrt{a} = 0$ ou $x - \sqrt{a} = 0$, ce qui nous donne bien les solutions attendues.

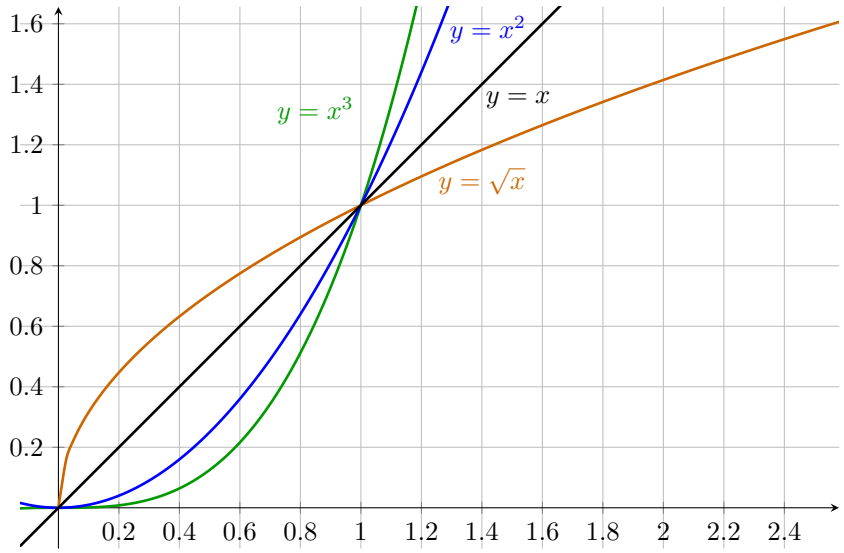
**Proposition 6 :** Soit $x \in \mathbb{R}$, on considère l'inéquation $x^2 \leqslant a$. On a alors trois cas de figure :

1. Si a<0 : l'inéquation n'a pas de solution.
2. Si a=0 : l'équation a une unique solution $x = 0$.
3. Si a>0 : l'ensemble des solutions est l'intervalle $[-\sqrt{a};\sqrt{a}]$.

∘ Démonstration : Admise.

**Théorème :** Soit $x \in \mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$. On a alors :

1. Si 0<x<1 : alors $\sqrt{x} > x > x^2 > x^3$.
2. Si x>1 : alors $\sqrt{x} < x < x^2 < x^3$.
3. Si x=0 ou x=1 : alors $\sqrt{x} = x = x^2 = x^3$.




◦ Démonstration : On procède point par point :

1. Supposons que $x \in ]0;1[$. On a alors :

$$x^2 - x = x(x-1)$$

Or $x$ est positif et $x < 1$ donc $x - 1 < 0$. Ce qui signifie par produit d'un positif avec un négatif que :

$$x^2 - x < 0 \Rightarrow x^2 < x$$

On procède de la même manière pour montrer l'ordre entre $x^2$ et $x^3$, en factorisant par $x^2$.
On a de plus :

$$x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$$

Ici, $\sqrt{x}$ est positif par positivité de la fonction racine carré, et $x < 1 \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{1}$ car la fonction racine carrée est croissante. Or $\sqrt{1} = 1$, ce qui nous donne enfin $\sqrt{x} < 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 < 0$. Ainsi par produit d'un négatif et d'un positif :

$$x - \sqrt{x} < 0 \Rightarrow x < \sqrt{x}$$

2. Exactement la même méthode.
3. Evident, par définition.