Chapitre 8

Equations cartésiennes

8.1 Introduction historique

La Théorie des Lignes courbes fait une partie considérable des Mathématiques : elle commence où finissent les Eléments [...d'Euclide], et au delà desquels on ne va point sans elle.

Gabriel Cramer - 1750

8.1.1 De l'idée à la théorie

Nous avons vu plus tôt dans l'année que par l'idée géniale de Descartes d'assigner à chaque point du plan deux coordonnées, un tout nouveau pan de la géométrie s'est vu ouvert, avec des conclusions très puissantes comme celles qui ont mené à la théorisation des vecteurs. Or lorsqu'il est devenu évident que pour décrire un point, deux nombres suffisaient, qu'en est-il de la figure géométrique la plus simple qui soit, la droite ? Par un ingénieux jeu de proportionnalité entre les coordonnées de deux points appartenant à la même droite, il fut prouvé au $17^{ème}$ siècle que toute droite du plan peut être décrite par une équation à deux variables, appelée aujourd'hui équation cartésienne, et se présentant sous la forme suivante :

$$ax + by + c = 0$$

L'idée est très simple : tout point de coordonnées $(x; y)$ appartenant à la droite verra ses coordonnées être solution de cette équation. Ainsi, le très ancien problème qui consistait à se demander en quel lieu deux droites se croiseraient vient trouver un sens entièrement algébrique, sens qui sera étudié dans ce chapitre.

8.1.2 Le père des systèmes

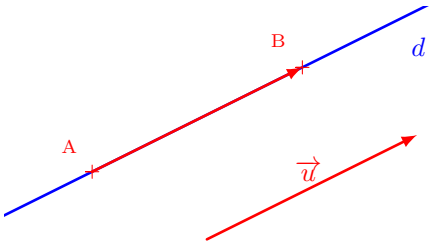
Si deux équations cartésiennes décrivent deux droites censées se croiser, leur point d'intersection sera donc le point dont les coordonnées sont simultanément solution des deux équations. Mais comment résoudre ? C'est en 1750 que le mathématicien suisse Gabriel Cramer (1704-1752) publie un ouvrage : *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, dans lequel il est amené à étudier ce qu'on appellera **systèmes d'équations** à plusieurs inconnues. Cramer a pu y démontrer que pour résoudre un système à n équations et n inconnues, une certaine relation de proportionnalité ne devait pas exister entre les coefficients. Si cette relation n'est pas, le système est résolvable, et trouvera toujours une unique solution obtenue par un ingénieux assemblage de substitution ou de composition d'inconnues.



8.2 Vecteur et droite

8.2.1 Vecteur directeur

Définition :
Soit une droite d du plan. On appelle **vecteur directeur** de cette droite d tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont des points de la droite d.



Remarque : Si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur, alors $\overrightarrow{BA}$ également, ainsi que tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, comme $3\overrightarrow{AB}$, $\sqrt{2}\overrightarrow{AB}$, etc.

8.2.2 Equation cartésienne de droite

Proposition 1 : Soit une droite d placée dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. Alors tout point de la droite $M(x; y)$ sera solution d'une équation définie par trois réels a, b et c, appelée **équation cartésienne de la droite** d, de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

Cette droite admet deux vecteurs directeurs usuels : $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$.

ex : Il est primordial de comprendre que tout point de la droite verra ses coordonnées être solutions de cette équation. Ainsi, si l'on considère la droite d'équation :

$$2x + 3y - 8 = 0$$

Le point $A(1; 2)$ appartiendra à la droite, car :

$$\begin{aligned} 2 \times 1 + 3 \times 2 - 8 &= 2 + 6 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

En revanche, $B(2; 1)$ ne sera pas un point de la droite, $2 \times 2 + 3 \times 1 - 8 = -1 \neq 0$.

◦ Démonstration : Soit une droite d placée dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. Prenons deux points appartenant à cette droite, $P(x_P; y_P)$ et $Q(x_Q; y_Q)$.
Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{QP}$ est vecteur directeur de la droite d. Si l'on considère $M(x; y)$ un point quelconque de d, le vecteur $\overrightarrow{PM}$ sera également directeur.
Or,

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} x_P - x_Q \\ y_P - y_Q \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \end{pmatrix}$$

et ces deux vecteurs sont directeurs, leur déterminant est donc nécessairement nul. Ainsi :

$$\begin{aligned} 0 &= det(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{PM}) \\ &= (x_P - x_Q) \times (y - y_P) - (x - x_P) \times (y_P - y_Q) \\ &= -x(y_P - y_Q) + y(x_P - x_Q) + x_P(y_P - y_Q) - y_P(x_P - x_Q) \end{aligned}$$

Ce qui donne, si on pose :

$$\begin{cases} a = -(y_P - y_Q) \\ b = (x_P - x_Q) \\ c = x_P(y_P - y_Q) - y_P(x_P - x_Q) \end{cases}$$

Nous donnera l'équation suivante :

$$0 = ax + by + c$$

On obtient donc bien l'équation désirée, et on remarque par ailleurs qu'ainsi le vecteur $\overrightarrow{QP}$ qui était directeur a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$$

Le deuxième vecteur directeur de la propostion étant naturellement obtenu en considérant $-\overrightarrow{QP}$, nous avons bien démontré la proposition.

8.2.3 Equation réduite

Définition :
Soit d une droite du plan d'équation cartésienne $ax + by + x = 0$ telle que $b \neq 0$. On appelle alors **équation réduite de la droite** d l'équation :

$$y = mx + p$$

où

$$\begin{cases} m = -\dfrac{a}{b} \\ p = -\dfrac{c}{b} \end{cases}$$

Ainsi m est appelé **coefficient directeur de la droite d**, et le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de d.

∘ Démonstration : Considérons une droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, où a et b ne sont pas tous les deux nuls. Deux cas se présentent alors :

• Si $b \neq 0$, on peut isoler y dans l'équation :

$$ax + by + c = 0$$

$$\Leftrightarrow by = -ax - c$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

ce qui est bien de la forme $y = mx + p$, en posant :

$$m = -\frac{a}{b} \quad \text{et} \quad p = -\frac{c}{b}$$

De plus, nous savons par la proposition 3 que $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d. Or ce vecteur est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, puisque :

$$-b \times m - a \times 1 = -b \times \left(-\frac{a}{b}\right) - a = a - a = 0$$

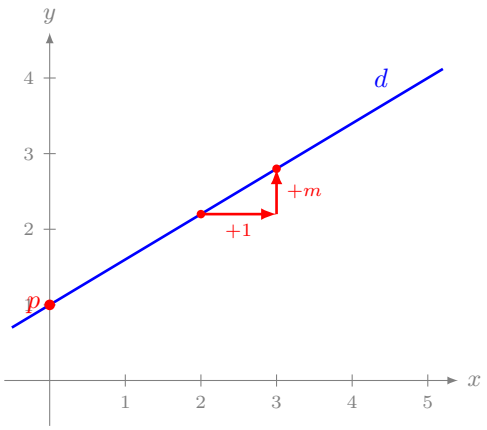
et le déterminant étant nul, $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est donc lui aussi un vecteur directeur de d.

• Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et l'équation devient $ax + c = 0$, c'est-à-dire $x = -\dfrac{c}{a}$: tous les points de la droite ont la même abscisse, la droite est donc parallèle à l'axe des ordonnées et ne peut pas s'écrire sous la forme $y = mx + p$.

□

Interprétation graphique :
L'ordonnée à l'origine p est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

Le coefficient directeur m indique quant à lui la variation d'ordonnée lorsque l'abscisse augmente de 1 : si l'on avance de 1 vers la droite, on monte de m (ou l'on descend si m est négatif).



ex : Reprenons la droite d'équation cartésienne $2x+3y-8=0$ étudiée plus haut, et déterminons son équation réduite. Comme le coefficient devant y n'est pas nul, il suffit d'isoler y :

$$2x+3y-8=0$$
$$\Leftrightarrow 3y=-2x+8$$
$$\Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$$

Cette droite a donc pour coefficient directeur $m=-\frac{2}{3}$ et pour ordonnée à l'origine $p=\frac{8}{3}$. Elle coupe ainsi l'axe des ordonnées au point de coordonnées $\left(0;\frac{8}{3}\right)$, et son coefficient directeur étant négatif, elle descend de gauche à droite.

8.3 Intersection et systèmes

8.3.1 Intersection de droites

Proposition 2 : Soient deux droites d et d' d'équations cartésiennes respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$, où a,b,c,a',b' et c' sont des réels. On saura alors que ces deux droites sont sécantes si et seulement si :

$$ab'-a'b\neq 0$$

Si elle ne sont pas sécantes, elles sont donc nécessairement parallèles.

◦ Démonstration : On considère les vecteurs directeurs $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -a' \\ b' \end{pmatrix}$ et la proposition découle directement du déterminant.

8.3.2 Résolution de système

Proposition 3 : Soient deux droites d et d' d'équations cartésiennes respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$, où a, b, c, a', b' et c' sont des réels. Si ces deux droites sont sécantes, alors il existe un point d'intersection dont les coordonnées sont solution des deux équations cartésiennes, autrement dit du **système d'équations** suivant :

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

On appelera alors **système d'équations** tout groupement d'équations à plusieurs inconnues devant être vérifiées par la ou les mêmes solutions.

◦ Démonstration : L'existence d'un point d'intersection pour deux droites sécantes est une évidence, et ce point appartenant aux deux droites, il est donc bien solution des deux équations cartésiennes à la fois.

Pour trouver la solution à un système de deux équations et deux inconnues, et donc trouver les coordonnées de ce fameux point d'intersection (**si il existe ! il faut impérativement le vérifier avec la proposition 2 avant de le chercher**) nous étudierons deux méthodes :

◦ **Méthode par substitution :**

Considérons ici le système suivant :

$$\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ -2x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

Pour cette méthode, nous allons chercher à isoler l'une des deux inconnues dans une des deux équations, afin de l'injecter dans l'autre. Pour ce faire, considérons la première :

$$x - 2y + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 2y - 5$$

Connaissant donc cette expression de x, on peut l'injecter dans la seconde équation, afin d'obtenir une équation qui n'a qu'une seule inconnue :

$$-2x + 3y - 7 = 0$$
$$\Leftrightarrow -2(2y - 5) + 3y - 7 = 0$$
$$\Leftrightarrow -4y + 10 + 3y - 7 = 0$$
$$\Leftrightarrow -y + 3 = 0$$

Ce qui nous donne enfin $y = 3$. Ayant ainsi y, nous pouvons reprendre notre expression isolée de x obtenue plus tôt pour en déduire sa valeur numérique :

$$x = 2y - 5$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \times 3 - 5$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

On en déduit alors que la solution de ce système est le couple $(1; 3)$.

◦ **Méthode par combinaison linéaire :**

Considérons ici le système suivant :

$$\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \ (e_1) \\ -2x + 3y - 7 = 0 \ (e_2) \end{cases}$$

Pour cette méthode, nous allons utiliser l'idée que chaque équation étant équilibrée, il nous est possible d'en ajouter chaque extrémité d'une équation à l'autre, car cela ne déséquilibrera pas l'égalité. Autrement dit, si on on ajoute la partie de gauche de l'équation 1 à la partie de gauche de l'équation 2, elle restera vraie car elles valent toutes les deux 0, et $0 + 0 = 0$. Mais pourquoi utiliser un tel procédé ? Parce qu'on remarque ici qu'en ajoutant deux fois l'équation 1 à l'équation 2, les x vont simplement disparaître par simplification, ne laissant que des y. Ainsi :

$$(e_2) + 2 \times (e_1)$$
$$\text{donne : } -2x + 3y - 7 + 2 \times (x - 2y + 5) = 0 + 0$$
$$\Leftrightarrow -2x + 3y - 7 + 2x - 4y + 10 = 0$$
$$\Leftrightarrow -y + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow y = 3$$

Et alors en reprenant l'équation 1 :

$$x - 2y + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 2 \times 3 + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

On retrouve donc comme solution le couple $(1; 3)$.

Quelle méthode utiliser ? Comme on le remarque dans nos énoncés, ces deux méthodes donnent la même solution et sont donc toutes les deux valables. Le choix d'utilisation restera donc à faire selon la maîtrise qu'on a de l'une ou de l'autre, ou bien de la facilité avec laquelle elle s'applique. En effet, la méthode par substitution occasionne souvent des calculs plutôt lourds, notamment si aucune inconnue n'a pas de facteur devant elle (comme dans l'exemple), mais elle demeurera la plus simple à mettre en oeuvre car ne nécessitant que peu de réflexion ou d'anticipation.