Chapitre 9

Inéquations

9.1 Introduction historique

Signum majoritatis ut $a > b$ significet a majorem quam b.
« Le signe de majorité, comme $a > b$, signifie que a est plus grand que b. »

Thomas Harriot - *Artis Analyticae Praxis* (1631)

Le chapitre 4 vous a appris à résoudre des équations, c'est-à-dire à trouver les valeurs qui rendent deux quantités *égales*. Mais dans la vie courante, l'égalité parfaite est rare : on cherche plutôt à savoir si un budget suffit, si une température dépasse un seuil, ou à partir de quelle quantité un abonnement devient plus avantageux qu'un achat à l'unité. Toutes ces questions se traduisent par des **inéquations**, et c'est leur résolution qui occupe ce chapitre.

9.1.1 Comparer avant de calculer

Comparer est même antérieur à calculer : bien avant de savoir additionner, les hommes savaient dire quel troupeau était le plus grand, en appariant les bêtes une à une. Les mathématiciens grecs raisonnaient eux aussi constamment sur des inégalités, notamment sur l'inégalité triangulaire, mais ils les énonçaient en toutes lettres, sous forme de phrases.

9.1.2 L'invention des symboles

C'est l'anglais **Thomas Harriot** (1560-1621) qui introduit les signes $<$ et $>$. Son ouvrage, l'*Artis Analyticae Praxis*, ne paraît qu'en 1631, soit dix ans après sa mort, et c'est là qu'apparaissent pour la première fois les deux phrases citées ci-dessus. Le choix du symbole n'a rien d'arbitraire : la pointe est du côté du plus petit, l'ouverture du côté du plus grand, si bien que le signe lui-même indique le sens de la comparaison.

Il manquait encore de quoi exprimer qu'une quantité est inférieure *ou égale* à une autre. C'est le français **Pierre Bouguer** qui, en 1734, ajoute une barre sous les symboles de Harriot pour former $\leqslant$ et $\geqslant$. Ces quatre signes, si familiers aujourd'hui, ont donc mis plus d'un siècle à se fixer.



9.2 Règles de base

9.2.1 Vocabulaire

Définition : Une **inéquation** est une inégalité contenant un nombre inconnu, désigné par une lettre.

Une **solution** est une valeur de l'inconnue qui rend l'inégalité vraie. **Résoudre** l'inéquation, c'est déterminer *toutes* ses solutions : l'ensemble obtenu s'appelle l'**ensemble des solutions**, et s'écrit le plus souvent sous forme d'un intervalle.

Remarque : C'est là toute la différence avec une équation : celle-ci n'admet en général qu'un petit nombre de solutions, alors qu'une inéquation en admet presque toujours une *infinité*. On ne peut donc pas les énumérer, et il faut les décrire : d'où le recours aux intervalles du premier chapitre.

9.2.2 Les deux règles

Propriété 1 :

Soient a, b et c trois nombres réels.

• On ne change pas le sens d'une inégalité en **ajoutant** ou en **retranchant** un même nombre aux deux membres :

$$a < b \iff a + c < b + c$$

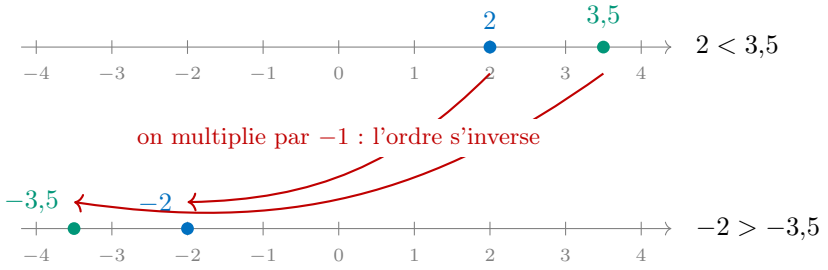
• On ne change pas le sens d'une inégalité en la **multipliant** ou en la **divisant** par un nombre **strictement positif** :

$$\text{si } c > 0, \qquad a < b \iff ac < bc$$

• On **change** le sens d'une inégalité en la multipliant ou en la divisant par un nombre **strictement négatif** :

$$\text{si } c < 0, \qquad a < b \iff ac > bc$$

Les deux premières règles ne surprennent pas : ce sont celles des équations. La troisième est propre aux inéquations, et c'est la seule difficulté réelle du chapitre. On la comprend en observant ce que la multiplication par -1 fait sur une droite graduée : elle retourne l'axe comme un miroir, et l'ordre s'inverse.



Méthode : Pour résoudre une inéquation du premier degré, on procède comme pour une équation :

1. On regroupe les termes contenant l'inconnue d'un côté, les nombres seuls de l'autre.

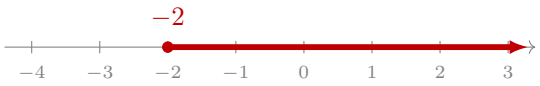
2. On divise par le coefficient de l'inconnue, en changeant le sens de l'inégalité si ce coefficient est négatif.

3. On conclut en donnant l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

Exemple : Résolvons $3x - 5 \leqslant 7x + 3$.

$$\begin{aligned} 3x - 5 &\leqslant 7x + 3 && \text{on retranche } 7x \text{ et on ajoute } 5 \\ -4x &\leqslant 8 && \text{on divise par } -4 \text{ : le sens change} \\ x &\geqslant -2 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $S = [-2\,;+\infty[$, que l'on représente ainsi :



Remarque : Attention à ne pas confondre les deux situations : on divise ici par -4, qui est négatif, donc le sens change. En revanche, la présence d'un nombre négatif *ailleurs* dans l'inéquation ne change rien : seul compte le signe du nombre par lequel on multiplie ou on divise.

9.3 Signe des fonctions affines

9.3.1 Rappels sur les fonctions affines

Définition : On appelle **fonction affine** toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = mx + p$$

où m et p sont deux nombres réels fixés. Le réel m est le **coefficient directeur**, le réel p l'**ordonnée à l'origine**.

Sa courbe représentative est une **droite**, non parallèle à l'axe des ordonnées.

Remarque : La lettre m se retient facilement : c'est par elle que l'on *multiplie* l'antécédent. Quant à p, c'est l'image de 0, puisque $f(0) = m \times 0 + p = p$: c'est donc bien l'ordonnée du point où la droite coupe l'axe des ordonnées.

Propriété 2 : Soit f la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.

- Si $m > 0$, alors f est **croissante** sur $\mathbb{R}$;
- si $m < 0$, alors f est **décroissante** sur $\mathbb{R}$;
- si $m = 0$, alors f est **constante**.

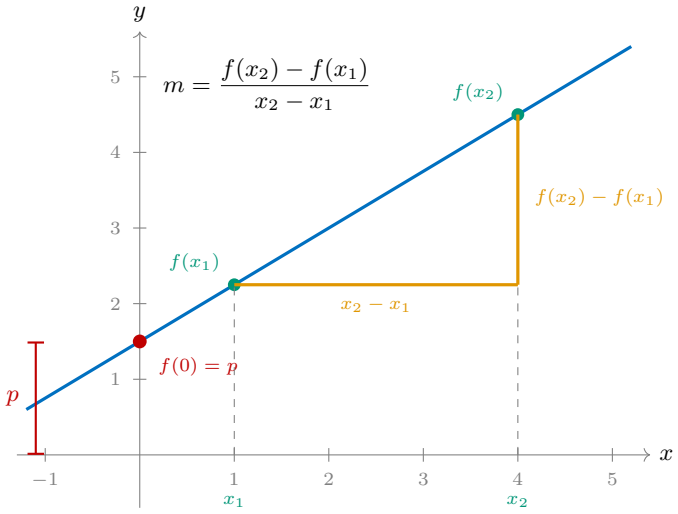
Méthode : Pour déterminer une fonction affine dont on connaît deux images $f(x_1)$ et $f(x_2)$, avec $x_1 \neq x_2$:

1. On calcule d'abord le coefficient directeur, qui est le quotient de l'écart des images par l'écart des antécédents :

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

2. On reporte cette valeur dans $f(x) = mx + p$, puis on utilise l'une des deux images connues pour obtenir une équation d'inconnue p.

3. On vérifie enfin avec la seconde image, qui n'a pas servi au calcul.



Le coefficient directeur m se lit donc comme le quotient de deux écarts : celui des ordonnées par celui des abscisses. L'ordonnée à l'origine p, elle, se lit directement sur l'axe vertical.

Exemple : Déterminons la fonction affine f telle que $f(2) = 7$ et $f(5) = 1$.

Coefficient directeur :

$$m = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{1 - 7}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

Ordonnée à l'origine : on sait donc que $f(x) = -2x + p$. En utilisant $f(2) = 7$:

$$-2 \times 2 + p = 7 \quad \iff \quad -4 + p = 7 \quad \iff \quad p = 11$$

La fonction cherchée est donc $f(x) = -2x + 11$.

Vérification : $f(5) = -2 \times 5 + 11 = -10 + 11 = 1$, ce qui correspond bien à la seconde donnée.

Remarque : Le calcul de m se lit sur la courbe : c'est la variation d'ordonnée lorsque l'abscisse augmente de 1. Ici $m = -2$ signifie qu'en avançant d'une unité vers la droite, on descend de deux unités — ce qui est cohérent avec une fonction décroissante.

9.3.2 Signe d'une fonction affine

Propriété 3 :

Soit $f(x) = mx + p$ avec $m \neq 0$. La fonction f s'annule pour la valeur $x_0 = -\dfrac{p}{m}$, appelée sa **racine**, et son signe est le suivant :

- si $m > 0$, f est **négative** avant la racine et **positive** après ;
- si $m < 0$, f est **positive** avant la racine et **négative** après.

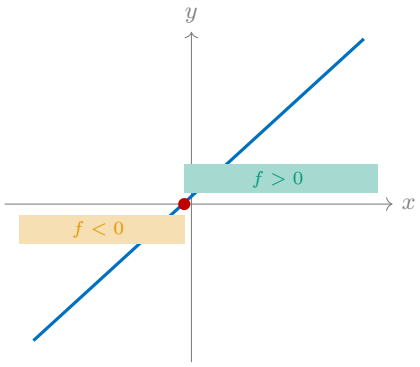
On retient : **f est du signe de m après la racine.**

∘ *Démonstration :* La fonction s'annule lorsque $mx + p = 0$, c'est-à-dire $x = -\dfrac{p}{m}$, ce qui est licite puisque $m \neq 0$.

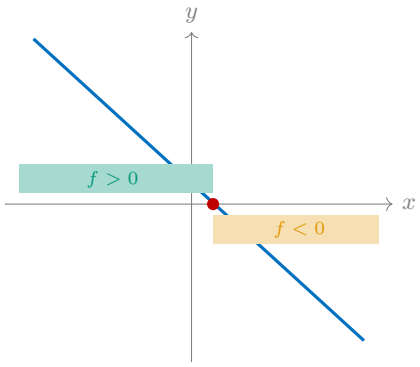
Supposons $m > 0$ et cherchons quand f est positive :

$$mx + p > 0 \quad \iff \quad mx > -p \quad \iff \quad x > -\frac{p}{m}$$

la division par m ne changeant pas le sens puisque m est positif. La fonction est donc positive après la racine. Si $m < 0$, la division change le sens de l'inégalité et l'on obtient $x < -\frac{p}{m}$: la fonction est alors positive *avant* la racine. □



$m > 0$



$m < 0$

La lecture graphique est immédiate : la fonction est positive là où sa droite est *au-dessus* de l'axe des abscisses, négative là où elle est en dessous.

Exemple : Étudions le signe de $f(x) = -2x + 6$.

La racine s'obtient en résolvant $-2x + 6 = 0$, soit $x = 3$. Comme $m = -2 < 0$, la fonction est positive avant 3 et négative après. On résume dans un **tableau de signes** :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-2x+6$		$+$	0	$-$	

L'inéquation $-2x+6 \geqslant 0$ a donc pour ensemble de solutions $S =]-\infty\,;3]$.

9.4 Inéquations produit

Définition : Une **inéquation produit** est une inéquation dans laquelle un **produit de facteurs** est comparé à **zéro**.

Remarque : Comme pour les équations produit du chapitre 4, la comparaison doit impérativement se faire avec 0 : c'est le seul nombre pour lequel le signe d'un produit se déduit du signe de ses facteurs, par la règle des signes.

Méthode : Pour résoudre une inéquation produit :

1. On ramène tous les termes du même côté, de façon à comparer à 0, puis on factorise si nécessaire.

2. On étudie le signe de chaque facteur séparément, en cherchant sa racine.

3. On rassemble ces signes dans un **tableau de signes**, et l'on complète la dernière ligne par la règle des signes.

4. On lit l'ensemble des solutions sur cette dernière ligne.

Exemple : Résolvons $(2x-6)(x+1) \geqslant 0$.

Le produit est déjà comparé à 0. Étudions séparément les deux facteurs :

- $2x-6$ s'annule en 3, et son coefficient 2 est positif : ce facteur est négatif avant 3, positif après ;
- $x+1$ s'annule en -1, et son coefficient 1 est positif : ce facteur est négatif avant -1, positif après.

On range ces informations dans un tableau, en plaçant les racines dans l'ordre croissant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$2x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-6)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le produit est positif ou nul sur $]-\infty\,;-1]$ et sur $[3\,;+\infty[$, d'où :

$$S =]-\infty\,;-1] \cup [3\,;+\infty[$$

Remarque : Deux points de vigilance dans la construction du tableau :

- les racines doivent être rangées dans l'ordre *croissant* sur la première ligne ;
- la dernière ligne ne se calcule pas facteur par facteur, mais colonne par colonne, en appliquant la règle des signes.

9.5 Inéquations quotient

Définition : Une **inéquation quotient** est une inéquation dans laquelle un **quotient** est comparé à **zéro**.

Les valeurs de l'inconnue qui annulent le dénominateur sont les **valeurs interdites** : elles ne peuvent jamais être solutions.

Propriété 4 : Un quotient a le même signe que le produit de son numérateur par son dénominateur. On construit donc son tableau de signes exactement comme celui d'un produit, à ceci près que l'on place une **double barre** sous chaque valeur interdite, pour signaler que le quotient n'y existe pas.

Exemple : Résolvons $\dfrac{x-3}{x+2} \leqslant 0$.

Valeur interdite : le dénominateur s'annule pour $x = -2$, valeur à exclure.

Tableau de signes : le numérateur s'annule en 3, le dénominateur en -2, tous deux avec un coefficient positif.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-3}{x+2}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Le quotient est négatif ou nul entre -2 et 3. La borne 3 est incluse, car le quotient y vaut 0, mais la borne -2 est exclue puisqu'il s'agit de la valeur interdite :

$$S =]-2\,;3]$$

Remarque : Observez le traitement asymétrique des deux bornes : une racine du *numérateur* est incluse dans les solutions lorsque l'inégalité est large, tandis qu'une racine du *dénominateur* est toujours exclue. C'est l'erreur la plus fréquente sur ce type d'inéquation.

9.6 Position relative de deux courbes représentatives

Propriété 5 :

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, de courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Alors, pour tout x de I :

- $\mathscr{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathscr{C}_g$ si et seulement si $f(x) - g(x) > 0$;
- $\mathscr{C}_f$ est **en dessous** de $\mathscr{C}_g$ si et seulement si $f(x) - g(x) < 0$;
- les deux courbes se **coupent** aux abscisses où $f(x) - g(x) = 0$.

Remarque : Comparer deux courbes revient donc à étudier le *signe de leur différence*, c'est-à-dire à résoudre une inéquation. Toutes les techniques des sections précédentes s'y appliquent, et c'est la raison pour laquelle cette question clôt le chapitre.

Exemple : Soient $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x+3$. Déterminons la position relative de leurs courbes.

Étudions le signe de la différence :

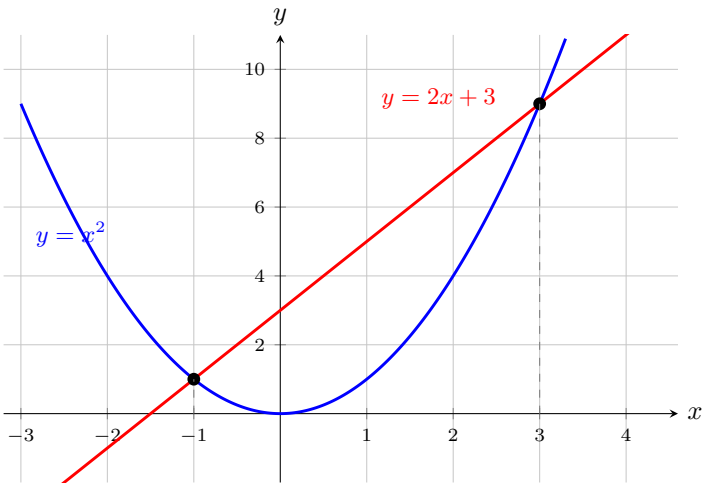
$$f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 3$$

Cette expression se factorise, car $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$, ce que l'on vérifie en développant. Le tableau de signes est alors celui de la section 9.4 :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On conclut :

- la parabole est **au-dessus** de la droite sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]3\,;+\infty[$;
- elle est **en dessous** sur $]-1\,;3[$;
- les deux courbes se coupent aux points d'abscisses -1 et 3.



Le graphique confirme le calcul : entre les deux points d'intersection, d'abscisses -1 et 3, la parabole passe sous la droite ; à l'extérieur de cet intervalle, elle repasse au-dessus.