Chapitre 10

Vecteurs

10.1 Introduction historique

> *Sous l'action de forces conjointes, un corps décrit la diagonale du parallélogramme, dans le même temps qu'il mettrait à décrire ses côtés, si elles agissaient séparément.*
>
> Isaac Newton - *Principia* (1687), corollaire I des lois du mouvement

Jusqu'ici, les objets que vous manipuliez — nombres, longueurs, aires — se ramenaient toujours à une seule information : une valeur. Mais beaucoup de grandeurs physiques n'en ont pas assez d'une. Dire qu'un vent souffle à 30 km/h ne suffit pas au marin : encore faut-il savoir d'où il vient. Il en va de même d'une force, d'une vitesse, d'un déplacement. Ces grandeurs réclament une **direction**, un **sens** et une **longueur** : ce sont des **vecteurs**.

10.1.1 La règle du parallélogramme

L'idée apparaît d'abord en mécanique. Comment décrire l'effet combiné de deux forces tirant un même objet dans deux directions différentes ? Le flamand **Simon Stevin** formule dès 1586 la règle du parallélogramme, et **Newton** l'énonce à son tour en tête des *Principia*, dans le corollaire cité ci-dessus. Il y a là, en germe, toute l'addition vectorielle : deux déplacements successifs équivalent à un seul, porté par la diagonale.

10.1.2 Du transport au calcul

Le mot lui-même vient du latin *vehere*, « transporter » — la même racine que « véhicule » —, ce qui dit bien ce dont il s'agit : un vecteur *transporte* un point vers un autre.

Il faudra pourtant attendre le XIX^{e} siècle pour que ces objets deviennent de véritables êtres mathématiques, avec lesquels on calcule. **William Rowan Hamilton** et **Hermann Grassmann**, indépendamment et vers 1844, construisent les premières théories cohérentes, et le physicien américain **Josiah Willard Gibbs** en dégage à la fin du siècle la présentation simple que nous utilisons encore. Ce chapitre en pose les premières briques.



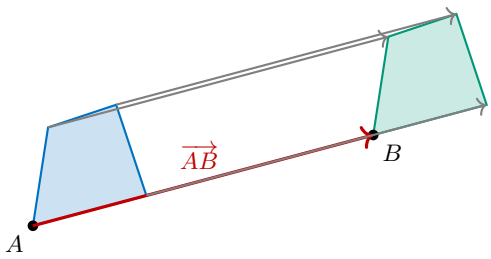
10.2 Vecteurs du plan

10.2.1 Translation et vecteur

Définition : Soient A et B deux points du plan. On appelle **translation qui transforme A en B** le déplacement qui fait glisser toute figure du plan, sans la tourner ni la déformer, de la même façon que A vers B.

Ce déplacement est entièrement décrit par un objet appelé **vecteur**, noté $\overrightarrow{AB}$, et caractérisé par trois données :

- sa **direction** : celle de la droite (AB) ;
- son **sens** : de A vers B ;
- sa **longueur** (ou **norme**), notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, qui est la distance AB.



tous les points se déplacent de la même façon

Remarque : Les trois caractéristiques ne se confondent pas. La **direction** est celle d'une droite, sans orientation : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont la *même* direction, mais des sens opposés. Confondre « direction » et « sens » est l'erreur de vocabulaire la plus fréquente de ce chapitre.

10.2.2 Égalité de deux vecteurs

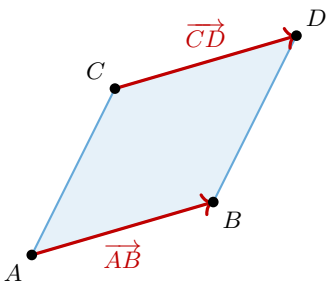
Définition : Deux vecteurs sont **égaux** lorsqu'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur.

Un même vecteur peut donc être représenté par une infinité de flèches, appelées ses **représentants**, situées un peu partout dans le plan. On le note alors souvent par une seule lettre : $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...

Propriété 1 : Soient A, B, C et D quatre points du plan, trois à trois non alignés. Alors :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \text{si et seulement si} \quad ABDC \text{ est un parallélogramme}$$

Remarque : Attention à l'ordre des lettres : c'est bien $ABDC$ et non $ABCD$. Pour ne pas se tromper, il suffit de parcourir le parallélogramme dans l'ordre : on part de A, on va en B, puis on doit rejoindre l'extrémité du second vecteur, c'est-à-dire D, avant de revenir par C.



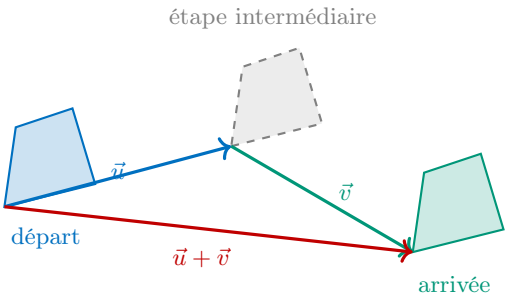
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
donc $ABDC$ est un parallélogramme

10.2.3 Enchaîner deux translations

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Appliquer la translation de vecteur $\vec{u}$, puis celle de vecteur $\vec{v}$, revient à appliquer une *unique* translation : le vecteur qui lui correspond est appelé la **somme** de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, et se note :

$$\vec{u} + \vec{v}$$

Remarque : Additionner deux vecteurs, c'est donc **enchaîner deux déplacements**. L'ordre dans lequel on les effectue est d'ailleurs indifférent : partir vers l'est puis vers le nord, ou vers le nord puis vers l'est, mène au même endroit. On a donc toujours $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.



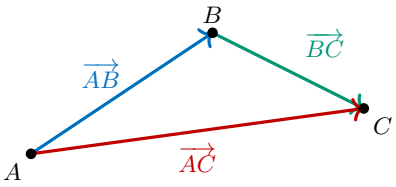
le résultat des deux translations est *une* translation

La flèche rouge résume à elle seule les deux déplacements : c'est le vecteur somme.

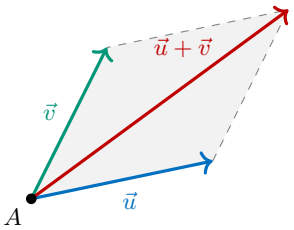
Théorème 1 : Relation de Chasles :
Pour tous points A, B et C du plan :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Remarque : Cette relation exprime une idée très simple : **deux déplacements successifs équivalent à un seul**. Aller de A à B, puis de B à C, c'est aller de A à C. Le point intermédiaire B « disparaît » du résultat, ce qui explique le mécanisme de simplification que l'on utilisera constamment.



relation de Chasles



règle du parallélogramme

Les deux constructions donnent le même résultat : à gauche, on met les vecteurs « bout à bout » ; à droite, on les place à partir d'un même point et l'on trace la diagonale du parallélogramme. C'est exactement la règle énoncée par Newton en tête de ce chapitre.

Définition : Le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, est le vecteur $\overrightarrow{AA}$: il correspond à la translation qui ne déplace rien. Sa longueur est nulle, et il n'a ni direction ni sens.

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul. On appelle **vecteur opposé** de $\vec{u}$, noté $-\vec{u}$, le vecteur de **même direction** et de **même longueur**, mais de **sens contraire**.

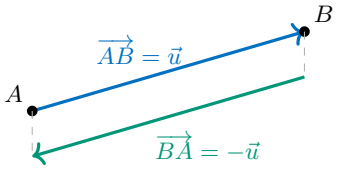
En particulier, l'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$, et l'on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

◦ *Démonstration :* Cette dernière égalité découle immédiatement de la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

Elle traduit une évidence : aller de A à B, puis revenir de B à A, c'est ne pas avoir bougé. □



même direction,
même longueur,
sens contraire

Remarque : On peut alors définir la **différence** de deux vecteurs comme l'addition de l'opposé :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Soustraire un vecteur, c'est donc effectuer le déplacement correspondant *en marche arrière*.

10.3 Vecteurs dans un repère

Définition : Le plan est muni d'un repère. Tout vecteur $\vec{u}$ possède un unique représentant d'origine O, c'est-à-dire un unique point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

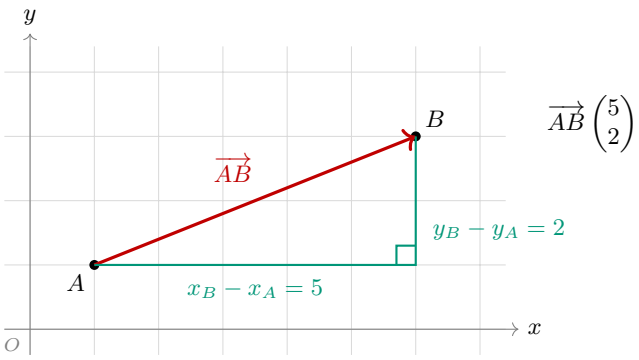
Les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ sont alors celles du point M. On les note en colonne :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Propriété 2 : Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points du plan. Alors :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Autrement dit, on soustrait les coordonnées de l'origine à celles de l'extrémité.



$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées d'un vecteur se lisent donc comme un « déplacement » : 5 vers la droite, puis 2 vers le haut.

Exemple : Soient $A(-2\,;3)$ et $B(4\,;1)$. Alors :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4-(-2) \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La seconde coordonnée est négative, ce qui traduit un déplacement vers le bas.

Propriété 3 : Deux vecteurs sont **égaux** si et seulement s'ils ont les **mêmes coordonnées**.

De plus, dans un repère **orthonormé**, la norme d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ vaut :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Remarque : Cette dernière formule n'est autre que celle de la distance, établie au chapitre 5 : appliquer le théorème de Pythagore au triangle rectangle de la figure ci-dessus donne bien $AB = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$.

10.4 Opérations sur les vecteurs

10.4.1 Somme de deux vecteurs

La somme a été définie et construite en section 10.2. Voyons maintenant comment elle se calcule dans un repère.

Propriété 4 : Dans un repère, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors :

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$$

Autrement dit, on additionne les coordonnées *une à une*.

Exemple : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$. Alors :

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}3+(-2)\\-1+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

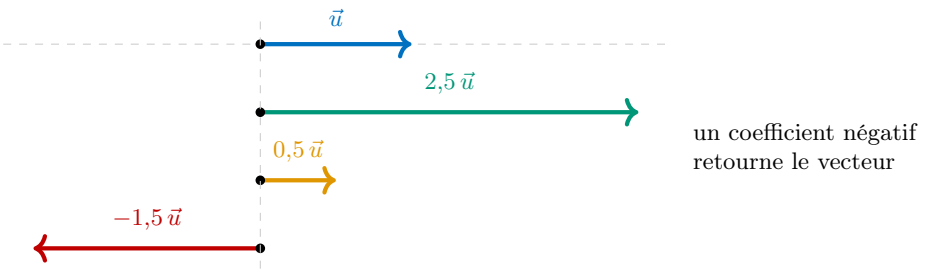
Remarque : Cette proposition est cohérente avec l'interprétation en déplacements : se déplacer de 3 vers la droite puis de 2 vers la gauche revient bien à un déplacement d'une unité vers la droite.

10.4.2 Produit par un nombre réel

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur :

- de même **direction** que $\vec{u}$;
- de **même sens** que $\vec{u}$ si $k > 0$, de **sens contraire** si $k < 0$;
- de **longueur** $|k| \times \|\vec{u}\|$.

Si $k = 0$ ou si $\vec{u} = \vec{0}$, on pose $k\vec{u} = \vec{0}$.



Propriété 5 : Dans un repère, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et si k est un réel, alors :

$$k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$$

Exemple : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$. En combinant les propositions 4 et 5 :

$$2\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}2\times 3-(-2)\\2\times(-1)-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$$

10.5 Colinéarité

Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsque l'un des deux est nul, ou lorsqu'il existe un réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

Deux vecteurs non nuls colinéaires ont donc la **même direction**.

Définition : Le plan est muni d'un repère. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs. On appelle **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\det(\vec{u},\vec{v})$, le nombre réel :

$$\det(\vec{u},\vec{v})=xy'-x'y$$

Remarque : Le déterminant se calcule en disposant les coordonnées des deux vecteurs en colonnes, puis en effectuant les deux produits en croix :

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x\times y' - x'\times y$$

produit de la diagonale descendante

moins celui de la diagonale montante

Exemple : Pour $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$:

$$\det(\vec{u},\vec{v})=3\times 4-(-6)\times(-2)=12-12=0$$

Théorème 2 : Critère de colinéarité :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul :

$$\vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ sont colinéaires}\iff\det(\vec{u},\vec{v})=0$$

Exemple : Reprenons les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ de l'exemple précédent. Leur déterminant étant nul, ils sont colinéaires. On le voit d'ailleurs directement, puisque $\vec{v}=-2\vec{u}$.

En revanche, pour $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$:

$$\det(\vec{u},\vec{w})=3\times 5-1\times(-2)=15+2=17\neq 0$$

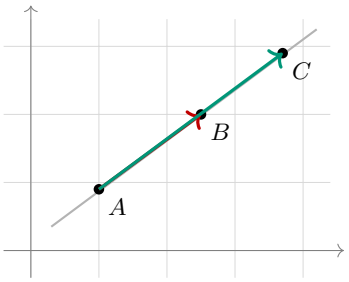
donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

Méthode : La colinéarité est l'outil qui traduit l'alignement et le parallélisme :

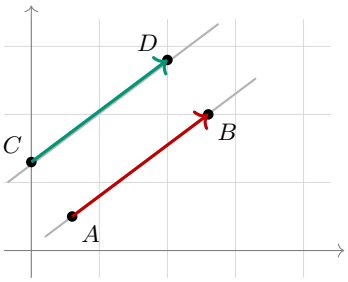
1. Pour montrer que trois points A, B et C sont <u>alignés</u>, on montre que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2. Pour montrer que deux droites (AB) et (CD) sont <u>parallèles</u>, on montre que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Dans les deux cas, on calcule les coordonnées des vecteurs, puis leur déterminant.



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires :
A, B, C **alignés**



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires :
(AB) et (CD) **parallèles**

Exemple : Les points $A(1\,;2)$, $B(4\,;3)$ et $C(10\,;5)$ sont-ils alignés ?

Calculons les coordonnées des deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$$

puis leur déterminant :

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = 3\times 3 - 9\times 1 = 9-9 = 0$$

Le déterminant est nul, donc les vecteurs sont colinéaires : les trois points sont alignés.

<u>Remarque :</u> Le déterminant fournit un critère *numérique*, qui tranche là où un dessin laisse un doute. Sur une figure, trois points presque alignés le paraissent souvent tout à fait, et seul le calcul permet de conclure avec certitude.