Chapitre 1

Suites numériques

1.1 Introduction historique

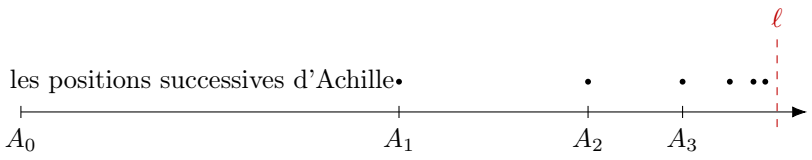
Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte.

Blaise Pascal - Mathématicien français (1623 à 1662)

À partir de la classe de première, une suite se présente comme une liste infinie de nombres, et toute démonstration consiste à déduire une conclusion d'un nombre fini d'hypothèses. Mais dès que l'on veut parler de *tous* les termes d'une suite, ou de ce qu'ils deviennent *à la fin*, on se heurte à un même obstacle : l'infini. Comment prouver une propriété portant sur une infinité d'entiers, sans les examiner un par un ?

1.1.1 De l'infini redouté...

Les Grecs se méfient de l'infini. Vers 450 av. J.-C., le philosophe **Zénon d'Élée** énonce un paradoxe resté célèbre : Achille, le plus rapide des coureurs, ne pourrait jamais rattraper une tortue partie devant lui, car il doit d'abord atteindre le point d'où elle est partie, pendant quoi elle a avancé, et ainsi de suite indéfiniment. Le paradoxe repose sur une conviction implicite : une somme d'une infinité de termes devrait être infinie. Il faudra plus de vingt siècles pour la réfuter proprement.



Pourtant, les mêmes Grecs savent déjà raisonner « de proche en proche ». Dans les *Éléments* (III^{e} siècle av. J.-C.), Euclide démontre qu'il existe une infinité de nombres premiers par un procédé qui, à partir d'une liste finie, en construit toujours un nouveau ; L'outil existe, mais il n'a pas encore de nom.

1.1.2 ... à l'infini maîtrisé

Il faut attendre **Blaise Pascal** et son *Traité du triangle arithmétique*, rédigé en 1654, pour que la méthode soit énoncée comme un principe général : Pascal y distingue nettement les deux lemmes nécessaires, à savoir que la propriété est vraie dans le premier cas, et que si elle est vraie dans un cas quelconque, elle l'est encore dans le suivant. Le nom d'*induction mathématique* est fixé en 1838 par le britannique **Augustus De Morgan**, avant que l'italien **Giuseppe Peano** ne place définitivement la récurrence, en 1889, parmi les cinq axiomes qui *définissent* l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels : ce que nous utiliserons comme une méthode de démonstration est en réalité une propriété fondatrice des entiers.

1.2 Raisonnement par récurrence

1.2.1 Le principe de récurrence

Définition : Soit n_0 un entier naturel. On appelle **propriété dépendant de n** tout énoncé mathématique $\mathcal{P}_n$, formulé pour chaque entier $n \geqslant n_0$, et dont on peut dire s'il est vrai ou faux.

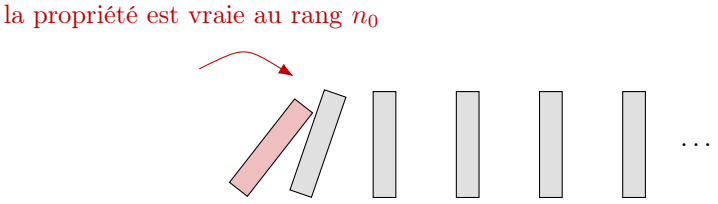
Exemple : Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut considérer les propriétés :

$$\mathcal{P}_n : \text{« } 2^n \geqslant n+1 \text{ »} \qquad \bullet \qquad \mathcal{Q}_n : \text{« la somme } 1+2+\cdots+n \text{ vaut } \tfrac{n(n+1)}{2} \text{ »}$$

Ainsi $\mathcal{P}_3$ est l'énoncé « $8 \geqslant 4$ », qui est vrai, tandis que $\mathcal{Q}_0$ affirme qu'une somme vide vaut 0.

Théorème 1 : Principe de récurrence :
Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété définie pour tout entier $n \geqslant n_0$. Si :
- **Initialisation :** $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie ;
- **Hérédité :** pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}_n$ vraie $\Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ vraie ;

alors la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.



si un domino tombe, il fait tomber le suivant : tous finissent par tomber.

∘ Démonstration :
Ce théorème est *admis* : il constitue, sous le nom d'axiome de récurrence, l'un des axiomes de Peano caractérisant $\mathbb{N}$. Le démontrer reviendrait à démontrer ce que l'on a choisi de poser au départ.

□

♡ **Méthode :** Pour rédiger une démonstration par récurrence, on suit toujours les mêmes étapes :
1. On énonce clairement la propriété $\mathcal{P}_n$ que l'on veut démontrer.
2. **Initialisation** : on vérifie que $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie (le plus souvent $n_0 = 0$ ou 1).
3. **Hérédité** : On introduit un entier fixé $k \geqslant n_0$, et on *suppose* $\mathcal{P}_k$ vraie (c'est l'**hypothèse de récurrence**), et on démontre alors $\mathcal{P}_{k+1}$.
4. **Conclusion** : par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Chaque étape doit être rédigée soigneusement, et apparaître distinctivement.

Exemple : Démontrons la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathcal{P}_n \ : \ \text{« } 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 1$, le membre de gauche vaut 1 et celui de droite $\frac{1\times 2}{2} = 1$. Donc la propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \geqslant 1$ un entier. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie. Alors :

$$1+2+\cdots+k+(k+1) \underset{\text{par } \mathcal{P}_k}{=} \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ce qui prouve $\mathcal{P}_{k+1}$. La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : Par principe de récurrence, pour tout entier $n \geqslant 1$, $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

◇

Remarque : Les **deux** étapes sont indispensables. Considérons en effet la propriété :

$$\mathcal{P}_n : \text{« 3 divise } 4^n+1 \text{ »}$$

Elle est héréditaire, car si $4^n+1 = 3k$ (où $k \in \mathbb{Z}$) alors :

$$4^{n+1}+1 = 4\times 4^n+1 = 4(4^n+1)-3 = 3(4k-1)$$

Pourtant elle est fausse pour *tout* entier n, puisque $4^0+1 = 2$ n'est pas divisible par 3 : aucun domino n'est jamais tombé. Une hérédité sans initialisation ne démontre rien.

1.2.2 Exemples usuels

Récurrence et inégalité

Proposition 1 (inégalité de Bernoulli) :
Soit a un réel positif. Alors pour tout entier naturel n :

$$(1+a)^n \geqslant 1+na$$

∘ Démonstration : Soit $a \in \mathbb{R}_+$, démontrons la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathcal{P}_n \ : \ \text{« } (1+a)^n \geqslant 1+na \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$: $(1+a)^0 = 1$ et $1+0\times a = 1$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie, autrement dit que $(1+a)^k \geqslant 1+ka$. Comme $1+a > 0$, on peut multiplier cette inégalité par $1+a$ sans en changer le sens :

$$(1+a)^{k+1} \geqslant (1+ka)(1+a) = 1+(k+1)a+ka^2$$

Or $ka^2 \geqslant 0$, donc $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a$, ce qui prouve $\mathcal{P}_{k+1}$.

Conclusion : Par principe de récurrence, l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Remarque : Cette inégalité, apparemment anodine, sera l'outil décisif de la section suivante pour établir le comportement des suites géométriques (proposition 4, page 8).

◇

Récurrence et suites définies par récurrence

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$.

(a) Montrons la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathcal{P}_n : \text{« } 0 \leqslant u_n \leqslant 6 \text{ »}$$

Initialisation : $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 6$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $0 \leqslant u_k \leqslant 6$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$ étant croissante sur $\mathbb{R}$, on peut l'appliquer à chaque terme de l'inégalité :

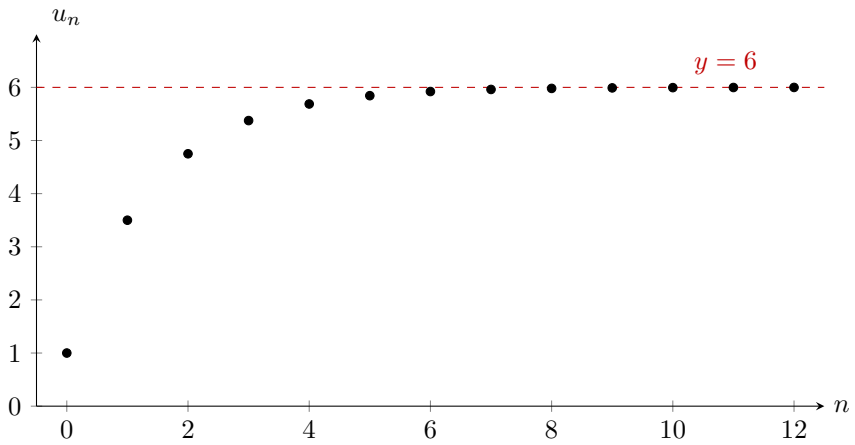
$$0 \leqslant u_k \leqslant 6 \implies 3 \leqslant \tfrac{1}{2}u_k + 3 \leqslant 6 \implies 0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 6$$

ce qui prouve $\mathcal{P}_{k+1}$.
Conclusion : Par récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant 6$ pour tout n : la suite est *majorée* par 6.

(b) Montrons que (u_n) est croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \tfrac{1}{2}u_n + 3 - u_n = 3 - \tfrac{1}{2}u_n = \tfrac{1}{2}(6 - u_n) \geqslant 0 \quad \text{d'après (a)}$$

La suite est donc croissante et majorée par 6 : nous verrons en section 1.3 que cela suffit à garantir qu'elle converge, et l'on devine graphiquement vers quelle valeur.



Récurrence et divisibilité

Exemple : Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est divisible par 6.
Initialisation : $7^0 - 1 = 0 = 6 \times 0$, divisible par 6.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $7^k - 1 = 6u$ avec u entier. Alors :

$$7^{k+1} - 1 = 7 \times 7^k - 1 = 7(6u + 1) - 1 = 42u + 6 = 6(7u + 1)$$

et $7u + 1$ est un entier : $7^{k+1} - 1$ est bien divisible par 6.
Conclusion : par récurrence, 6 divise $7^n - 1$ pour tout entier naturel n.

1.3 Limite d'une suite

1.3.1 Limite infinie, limite finie

Définition : Soit (u_n) une suite réelle.

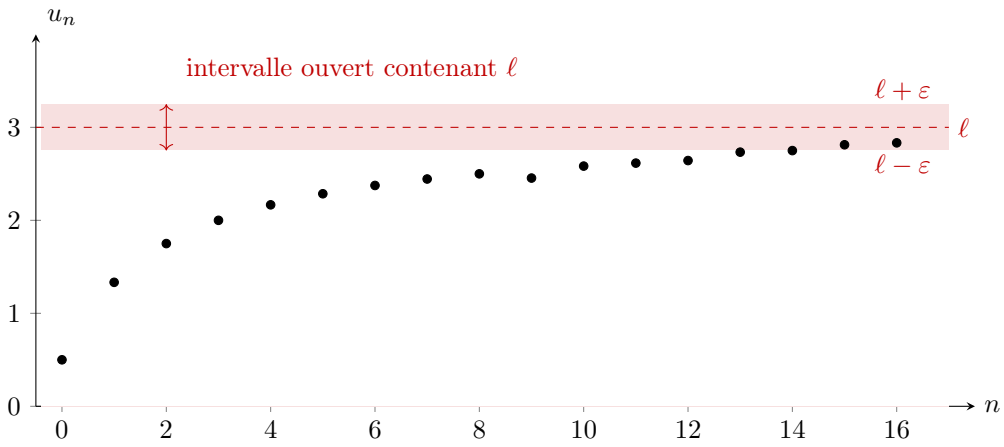
- On dit que (u_n) a pour **limite $+\infty$** lorsque tout intervalle de la forme $[A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- On dit que (u_n) a pour **limite $-\infty$** lorsque tout intervalle de la forme $]-\infty;A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- Soit ℓ un réel. On dit que (u_n) **converge vers ℓ** lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Une suite qui admet une limite finie est dite **convergente** ; sinon elle est dite **divergente**.

Remarque : « À partir d'un certain rang » signifie : il existe un entier N tel que la propriété soit vraie pour tous les indices $n \geqslant N$. Les premiers termes de la suite, si nombreux soient-ils, n'ont donc aucune influence sur la limite. Autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ correspond à :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in]\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon[$$

Attention également : une suite divergente ne tend pas nécessairement vers l'infini. La suite $u_n = (-1)^n$ prend indéfiniment les valeurs 1 et -1 : elle n'a aucune limite.



Sur ce graphique, aussi étroite que soit la bande rouge autour de ℓ, on finit toujours par y trouver *tous* les points de la suite : la suite converge vers ℓ.

Proposition 2 (limites de référence) : Soit $\alpha > 0$. On a les résultats suivants :

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad \lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$$

∘ Démonstration : Démontrons par exemple que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Soit A un réel ; quitte à l'augmenter, on peut le supposer positif. Pour tout entier $n > A^2$, la fonction racine carrée étant croissante sur $[0;+\infty[$, on a :

$$n > A^2 \implies \sqrt{n} > \sqrt{A^2} = A$$

Ainsi, en posant N comme étant le premier entier supérieur à A^2, tous les termes d'indice $n \geqslant N$ appartiennent à $[A;+\infty[$. Ceci valant pour tout réel A, la suite tend vers $+\infty$. □

1.3.2 Opérations sur les limites

Dans les tableaux suivants, ℓ et ℓ' désignent des nombres réels, et **F.I.** signifie **forme indéterminée** : dans ce cas, le tableau ne permet pas de conclure et une étude spécifique est nécessaire.

Limite d'une somme $u_n + v_n$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Limite d'un produit $u_n \times v_n$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	$\pm\infty$ (règle des signes)	**F.I.**

Limite d'un quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$ (règle des signes)	**F.I.**	**F.I.**

Exemple : Comment lever une forme indeterminée ? Soit $u_n = \dfrac{3n^2 - n + 1}{n^2 + 5}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Numérateur et dénominateur tendent tous deux vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée. On factorise alors par le terme dominant :

$$u_n = \frac{n^2\left(3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{5}{n^2}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, donc le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 1. Par quotient :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$$

1.3.3 Théorèmes de comparaison

Théorème 2 : Théorèmes de comparaison :
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

∘ Démonstration : Démontrons le premier point. Soit A un réel. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un rang N_1 tel que $u_n \geqslant A$ pour tout entier $n \geqslant N_1$. Par ailleurs, il existe un rang N_2 à partir duquel pour tout entier $n \geqslant N_2$, $u_n \leqslant v_n$. Alors pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$:

$$v_n \geqslant u_n \geqslant A$$

Tout intervalle $[A; +\infty[$ contient donc tous les termes de (v_n) à partir d'un certain rang, autrement dit cela prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. □

Théorème 3 : Théorème des gendarmes :
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

Si (u_n) et (w_n) convergent vers un même réel ℓ, alors (v_n) converge également vers ℓ.

∘ Démonstration : Soit $I =]a; b[$ un intervalle ouvert contenant ℓ. Comme $u_n \to \ell$, il existe un rang N_1 tel que $u_n > a$ pour $n \geqslant N_1$; comme $w_n \to \ell$, il existe un rang N_2 tel que $w_n < b$ pour $n \geqslant N_2$. En notant N_3 un rang à partir duquel l'encadrement est valable, on a pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2, N_3)$:

$$a < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < b$$

donc $v_n \in I$. Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient donc tous les v_n à partir d'un certain rang, ce qui prouve le résultat attendu. □

Exemple : Soit $v_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$, donc :

$$-\frac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$: d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

De même, la suite $u_n = n + (-1)^n$ oscille autour de n, mais vérifie $u_n \geqslant n - 1$ pour tout n, et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty$: par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

1.3.4 Suites monotones et convergence

Théorème 4 : Convergence monotone :
Toute suite croissante et majorée converge.
De même, toute suite décroissante et minorée converge.

Remarque : Ce théorème est admis. Attention : il affirme l'*existence* de la limite, mais ne la donne pas. Si (u_n) est croissante et majorée par M, sa limite ℓ vérifie seulement $\ell \leqslant M$.

Proposition 3 : Si une suite (u_n) est croissante et non majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

∘ Démonstration : Soit A un réel. Comme (u_n) n'est pas majorée, A n'est pas un majorant : il existe donc un rang N tel que $u_N > A$. La suite étant croissante, pour tout $n \geqslant N$:

$$u_n \geqslant u_N > A$$

Tout intervalle $[A;+\infty[$ contient donc tous les termes à partir du rang N, d'où le résultat. □

Exemple : Reprenons la suite de la section 1.2 : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$. Nous avions démontré par récurrence qu'elle est croissante et majorée par 6 : d'après le théorème 4, elle *converge* vers un réel ℓ.
Pour déterminer ℓ, on admet que u_{n+1} a la même limite que u_n. En passant à la limite dans la relation de récurrence :

$$\ell = \tfrac{1}{2}\ell + 3 \quad\Longleftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}\ell = 3 \quad\Longleftrightarrow\quad \ell = 6$$

ce qui confirme la lecture graphique faite précédemment : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.

1.3.5 Le cas des suites géométriques

Proposition 4 : Soit q un nombre réel. On a :

	$q \leqslant -1$	$-1 < q < 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	pas de limite	0	$+\infty$

(le cas $q = 1$ donnant la suite constante égale à 1).

∘ Démonstration :

- **Cas $q > 1$:** On pose $a = q - 1 > 0$, de sorte que $q = 1 + a$. L'inégalité de Bernoulli (proposition 1, page 3) donne alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $$q^n = (1+a)^n \geqslant 1 + na$$

  Or $a > 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+na) = +\infty$. Par comparaison (théorème 2), $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- **Cas $-1 < q < 1$, avec $q \neq 0$:** On pose $Q = \frac{1}{|q|} > 1$. D'après le cas précédent, $\lim\limits_{n\to+\infty} Q^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{Q^n} = 0$. On conclut par le théorème des gendarmes, puisque :

  $$-|q|^n \leqslant q^n \leqslant |q|^n$$

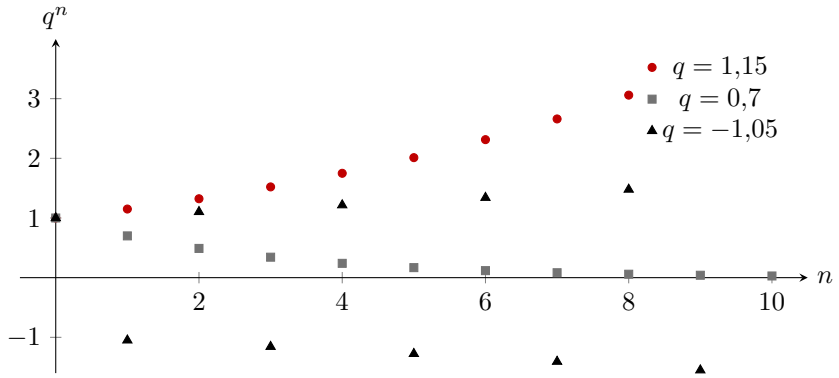
  Le cas $q = 0$ est immédiat.
- **Cas $q \leqslant -1$:** Les termes de la suite sont alternativement positifs et négatifs, de valeur absolue supérieure ou égale à 1 : la suite ne peut converger, ni tendre vers $\pm\infty$.

□

Exemple : La suite $u_n = 5 \times 0{,}8^n$ vérifie $\lim u_n = 0$ car $-1 < 0{,}8 < 1$.
La suite $v_n = 2 \times 3^n - n$ est de la forme $+\infty - \infty$; on factorise :

$$v_n = 3^n\left(2 - \frac{n}{3^n}\right)$$

et on admet que par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{3^n} = 0$. Ainsi $v_n \to +\infty$ par produit.



Les trois comportements possibles se lisent d'un coup d'œil : divergence vers $+\infty$, convergence vers 0, et oscillation d'amplitude croissante.