Chapitre 2

Probabilités

2.1 Introduction historique

Under Bayes' theorem, no theory is perfect. Rather, it is a work in progress, always subject to further refinement and testing.

Nate Silver - Mathématicien et statisticien américain (1978 à -)

En découvrant les probabilités conditionnelles en classe de première, tout élève comprend que la probabilité qu'un évènement se réalise dépend essentiellement des évènements qui se sont réalisés avant lui. Au coeur de cette vision probabiliste, la théorie du mathématicien anglais **Thomas Bayes** (1702 à 1761) a rayonné sur toute la science moderne, et il est peu de chercheurs qui aujourd'hui font fi de l'inférence bayésienne.

2.1.1 Fréquentiste ou Bayésien ?

Dans le monde des statistiques, deux approches majeures d'une théorie sont connues. L'approche fréquentiste établit rationnellement une théorie, puis détermine les probabilités des évènements conséquents à cette théorie. L'approche bayésienne, en revanche, s'intéresse d'abord aux évènements en relevant ceux qui se produisent et à quelle fréquence, puis en déduit la probabilité qu'une théorie soit vérifiée par ces évènements. Ainsi l'un priorise les causes, et l'autre les conséquences.

De nombreux corps de métiers utilisent l'approche bayésienne, et l'un des plus parlant doit sans doute être la médecine. En effet, un diagnostic médical indique qu'une maladie plus qu'une autre est probablement à l'origine des symptômes d'un patient, et des examens renforcent ou infirment cette hypothèse. Quoi qu'il en soit, la finesse d'un diagnostic se fait par la répétition des expériences, ce qui sera l'objet de ce cours.

2.1.2 Bernoulli et Binome

À la source de nombreuses trouvailles mathématiques remarquables (comme la valeur précise de la constante e, ou l'utilisation moderne du mot intégrale) le suisse **Jacques Bernoulli** (1654 à 1705) laisse cependant son nom à un loi fameuse pour les lycéens d'aujourd'hui, et qui s'intéresse à l'une des expériences les plus simples du monde probabiliste. Quand on lance une pièce, quelle est la probabilité qu'elle tombe sur Face ? Chaque lycéen répondra spontanément $0,5$, mais comment le prouver ? Peut-être en répétant l'expérience de nombreuses fois, nous souffle l'inférance bayésienne...

La loi de Bernoulli ne concerne que les expériences ayant deux issues possibles, Vrai ou faux (Pile ou face...). Quand on répète de nombreuses fois une telle expérience, la probabilité d'obtenir un nombre précis d'issues Vrai se calcule, selon une loi nommée elle Binomiale. Cette loi est sans doute la plus importante des probabilités modernes, car elle fut la porte vers les probabilités continues, qui s'intéressent à un nombre infini d'issues...



2.2 Probabilités et variables aléatoires

2.2.1 Rappels de probabilités

Définition : On considère une expérience aléatoire, c'est-à-dire une expérience dont on connaît toutes les issues possibles sans pouvoir prédire laquelle se réalisera.

- L'ensemble de toutes les issues est appelé l'**univers**, noté Ω.
- Un **événement** est une partie de Ω, c'est-à-dire un ensemble d'issues.
- Définir une **loi de probabilité** sur $\Omega = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$, c'est associer à chaque issue x_i un nombre $p_i \in [0 ; 1]$ tel que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

La probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, est alors la somme des probabilités des issues qui le composent.

Remarque : Dans le cas particulier où toutes les issues ont la même probabilité, on parle de situation d'**équiprobabilité**. On retrouve alors la formule intuitive de Cardan :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

Proposition 1 : Soient A et B deux événements d'un même univers Ω. On a :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad \text{et} \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

où $\overline{A}$ désigne l'**événement contraire** de A.

Définition : Deux événements A et B sont dits **indépendants** lorsque la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de l'autre, ce qui se traduit par :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Par extension, des expériences aléatoires successives sont dites **indépendantes** lorsque le résultat de l'une n'influence pas les résultats des autres.

Exemple : On lance deux fois une pièce équilibrée. Les deux lancers sont indépendants, et l'univers comporte quatre issues équiprobables :

$$\Omega = \{\text{PP} ; \text{PF} ; \text{FP} ; \text{FF}\}$$

La probabilité d'obtenir exactement une fois « pile » vaut donc $\frac{2}{4} = 0{,}5$, tandis que celle d'obtenir deux fois « pile » vaut $\frac{1}{4} = 0{,}5 \times 0{,}5$, conformément à la formule d'indépendance.

2.2.2 Variable aléatoire

Définition : Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. On appelle **variable aléatoire** toute fonction X qui, à chaque issue de Ω, associe un nombre réel :

$$X \ : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$.

Pour chaque valeur x_i, l'écriture $(X = x_i)$ désigne l'événement « X prend la valeur x_i ». Déterminer la **loi de probabilité de X**, c'est donner la probabilité $P(X = x_i)$ de chacun de ces événements.

Remarque : Une variable aléatoire n'est ni variable, ni aléatoire : c'est une *fonction*, parfaitement déterminée, qui traduit chaque issue en un nombre. C'est l'issue tirée au sort qui apporte le hasard. On la note traditionnellement par une lettre majuscule, et les valeurs qu'elle prend par la même lettre en minuscule.

Les événements $(X = x_1), (X = x_2), \dots, (X = x_n)$ forment par ailleurs une partition de Ω : chaque issue est associée à une valeur et une seule. On a donc toujours :

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_n) = 1$$

ce qui fournit une vérification systématique du tableau d'une loi de probabilité.

Exemple : Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur mise 2 euros et lance un dé équilibré à six faces. S'il obtient un 6, il remporte 8 euros ; s'il obtient un 4 ou un 5, il remporte 2 euros ; sinon il ne remporte rien.

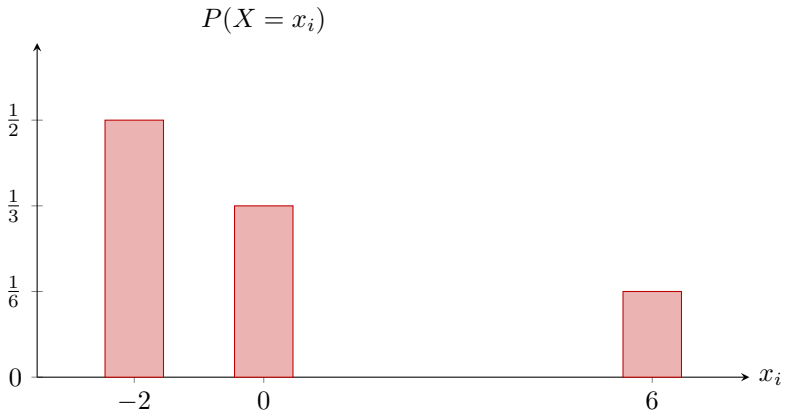
On note X le *gain algébrique* du joueur, c'est-à-dire la somme remportée diminuée de la mise. L'univers est $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$, muni de l'équiprobabilité, et :

$$X(1) = X(2) = X(3) = -2 \qquad X(4) = X(5) = 0 \qquad X(6) = 6$$

d'où $X(\Omega) = \{-2\,;0\,;6\}$. La loi de probabilité de X se présente alors dans un tableau :

x_i	-2	0	6
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

On vérifie bien que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.



Ce *diagramme en bâtons* constitue la représentation graphique usuelle de la loi d'une variable aléatoire : la somme des hauteurs y vaut toujours 1.

2.2.3 Espérance, variance et écart-type

Définition : Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$. On définit :

- son **espérance** : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$;
- sa **variance** : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \big(x_i - E(X)\big)^2$;
- son **écart-type** : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque : Ces trois nombres se lisent comme les indicateurs statistiques rencontrés au collège, mais où les effectifs sont remplacés par des probabilités :

- l'espérance est une *moyenne* des valeurs, pondérée par leurs probabilités. Elle indique le résultat moyen que l'on obtiendrait en répétant l'expérience un très grand nombre de fois ;
- la variance et l'écart-type mesurent la *dispersion* des valeurs autour de l'espérance. Un écart-type petit signifie que les résultats se concentrent autour de la moyenne, un écart-type grand qu'ils s'en éloignent souvent.

L'écart-type a l'avantage sur la variance de s'exprimer dans la même unité que X : si X est un gain en euros, $\sigma(X)$ s'exprime en euros, alors que $V(X)$ s'exprimerait en « euros au carré ».

Proposition 2 (formule de König-Huygens) :
Pour toute variable aléatoire X, on a :

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 \qquad \text{où} \qquad E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2$$

∘ Démonstration : Notons $\mu = E(X)$ pour alléger l'écriture. En développant le carré dans la définition de la variance :

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 \;-\; 2\mu \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \;+\; \mu^2 \sum_{i=1}^{n} p_i \end{aligned}$$

Or la deuxième somme vaut $E(X) = \mu$, et la troisième vaut 1 puisque les p_i sont les probabilités d'une loi. On obtient donc :

$$V(X) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

□

Remarque : Cette formule est presque toujours plus rapide que la définition, car elle évite de soustraire l'espérance à chaque valeur. C'est celle que l'on utilisera en pratique.

Proposition 3 (linéarité) : Soient X une variable aléatoire et a, b deux réels. Alors :

$$E(aX+b) = a\,E(X) + b \qquad \text{et} \qquad V(aX+b) = a^2\,V(X) \qquad \text{et} \qquad \sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X)$$

Remarque : Le nombre b disparaît des deux dernières formules : ajouter une constante à tous les gains déplace la moyenne, mais ne change en rien la dispersion. À l'inverse, multiplier tous les gains par a multiplie l'écart-type par $|a|$, et donc la variance par a^2.

♡ **Méthode :** Pour étudier une variable aléatoire, on procède dans l'ordre suivant :

1. On identifie l'univers Ω et on précise ce que la variable X associe à chaque issue.

2. On détermine $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par X.

3. On dresse le tableau de la loi de probabilité, et on vérifie que la somme des probabilités vaut 1.

4. On calcule $E(X)$, puis $E(X^2)$, ce qui donne $V(X)$ par la formule de König-Huygens.

Exemple : Reprenons le jeu de la fête foraine étudié précédemment. Calculons d'abord l'espérance du gain :

$$E(X) = \frac{1}{2} \times (-2) + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{6} \times 6 = -1 + 0 + 1 = 0$$

Le jeu est donc **équitable** : sur un très grand nombre de parties, le joueur ne gagne ni ne perd d'argent en moyenne. Calculons ensuite $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \frac{1}{2} \times (-2)^2 + \frac{1}{3} \times 0^2 + \frac{1}{6} \times 6^2 = 2 + 0 + 6 = 8$$

d'où, par la formule de König-Huygens :

$$V(X) = 8 - 0^2 = 8 \qquad \text{et} \qquad \sigma(X) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83 \text{ euros}$$

Le jeu est équitable, mais loin d'être sans risque : les gains s'écartent en moyenne de près de 3 euros de leur valeur moyenne.

◇

Exemple : Le forain décide de doubler tous les gains et d'augmenter la mise de 1 euro. Le nouveau gain algébrique est alors $Y = 2X - 1$, et sans refaire aucun tableau :

$$E(Y) = 2 \times 0 - 1 = -1 \qquad \text{et} \qquad V(Y) = 2^2 \times 8 = 32 \qquad \text{et} \qquad \sigma(Y) = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Le jeu n'est plus équitable : le joueur perd en moyenne 1 euro par partie.

2.3 Loi binomiale

2.3.1 Épreuve et loi de Bernoulli

Définition : On appelle **épreuve de Bernoulli** de paramètre p toute expérience aléatoire n'admettant que deux issues :

- l'une appelée **succès**, de probabilité p ;
- l'autre appelée **échec**, de probabilité $1-p$.

La variable aléatoire X valant 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec suit alors la **loi de Bernoulli** de paramètre p.

Remarque : Les mots « succès » et « échec » n'ont ici aucune valeur morale : ils désignent simplement l'issue que l'on décide d'observer et son contraire. Étudier la probabilité de tomber malade fait de la maladie un « succès ».

Proposition 4 : Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors :

$$E(X) = p \qquad \text{et} \qquad V(X) = p(1-p)$$

∘ Démonstration : La variable X ne prend que les valeurs 0 et 1, avec $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$. Donc :

$$E(X) = (1-p) \times 0 + p \times 1 = p$$

Par ailleurs $X^2 = X$, puisque $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$, donc $E(X^2) = p$. La formule de König-Huygens donne alors :

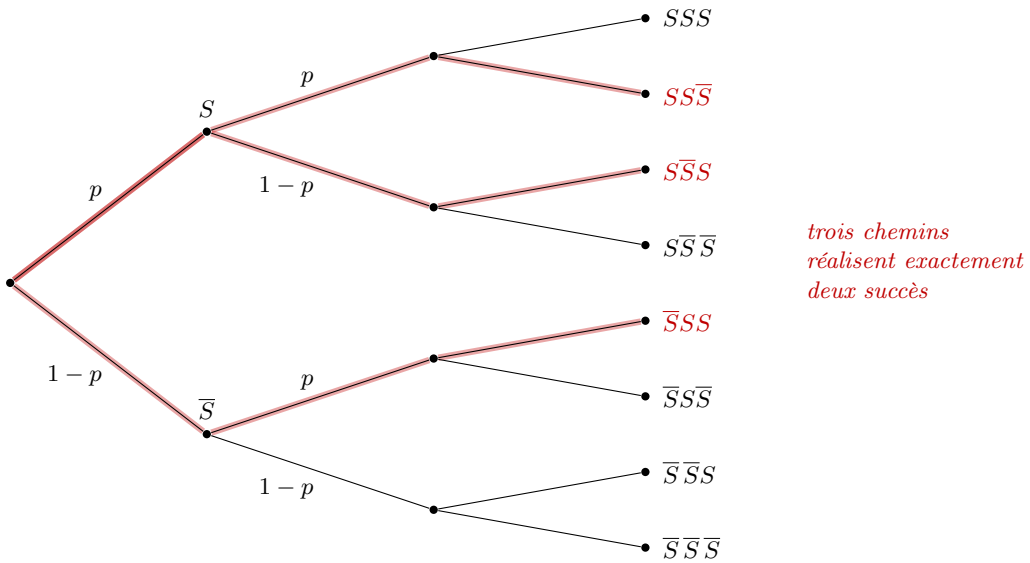
$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

□

2.3.2 Schéma de Bernoulli

Définition : On appelle **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p la répétition de n épreuves de Bernoulli *identiques* et *indépendantes*, de paramètre p chacune.

Un schéma de Bernoulli se représente par un **arbre pondéré**, dont chaque branche porte la probabilité de l'issue correspondante. Voici celui de trois lancers d'une pièce truquée donnant « pile » (le succès, noté S) avec la probabilité p :



Chaque chemin de l'arbre a une probabilité égale au *produit* des probabilités rencontrées, en vertu de l'indépendance des épreuves. Ainsi, chacun des trois chemins réalisant exactement deux succès a pour probabilité $p^2(1-p)$, et la probabilité d'obtenir exactement deux succès vaut la *somme* de ces trois nombres, soit $3p^2(1-p)$.

Toute la difficulté se réduit donc à une question de dénombrement : combien y a-t-il de chemins réalisant exactement k succès parmi n épreuves ? C'est l'objet du paragraphe suivant.

2.3.3 Combinaisons

Définition : Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$.
On appelle **combinaison de k éléments parmi n** toute partie de k éléments choisis dans un ensemble qui en contient n, sans tenir compte de l'ordre.

Le nombre de ces combinaisons est noté $\binom{n}{k}$, et se lit **« k parmi n »**. On l'appelle également **coefficient binomial**.

Dans un schéma de Bernoulli à n épreuves, $\binom{n}{k}$ est donc le nombre de chemins de l'arbre réalisant exactement k succès : choisir un tel chemin revient exactement à choisir *quelles* épreuves, parmi les n, seront des succès.

Exemple : Dans l'arbre précédent, à $n = 3$ épreuves, on lit directement :

$$\binom{3}{0} = 1 \qquad \binom{3}{1} = 3 \qquad \binom{3}{2} = 3 \qquad \binom{3}{3} = 1$$

Il y a en effet un seul chemin sans aucun succès, trois chemins avec exactement un succès, trois avec exactement deux succès, et un seul avec trois succès. On vérifie que $1+3+3+1 = 8 = 2^3$, soit le nombre total de chemins.

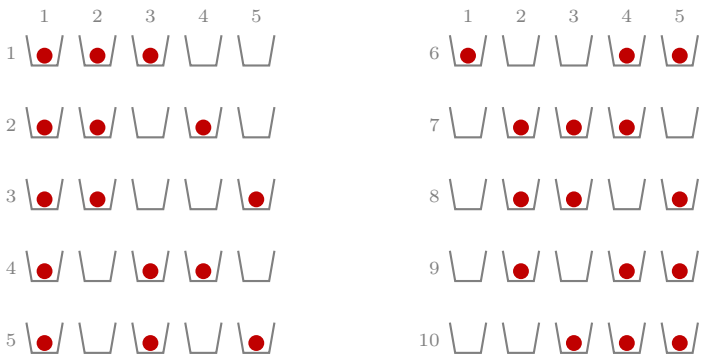
Remarque : Une image commode permet de se représenter concrètement une combinaison. Calculer $\binom{5}{3}$, c'est déterminer de combien de façons on peut répartir **3 billes identiques** dans **5 tasses distinctes**, à raison d'une bille au plus par tasse.

Trois points méritent d'être soulignés dans cette image, car ce sont exactement les trois conditions de la définition :

- les tasses sont *numérotées*, donc discernables : elles jouent le rôle des n éléments de l'ensemble de départ ;
- les billes sont *identiques* : échanger deux billes ne produit pas une nouvelle répartition, ce qui traduit le fait qu'une combinaison ne tient pas compte de l'ordre ;
- une tasse contient au plus une bille : chaque élément est choisi une fois au maximum.

Choisir une répartition revient donc exactement à choisir *quelles* tasses seront occupées. En les énumérant toutes, on en dénombre bien dix :

$$\binom{5}{3} = 10$$



Dans le contexte du chapitre, les tasses sont les n épreuves successives, et les billes les k succès que l'on souhaite y placer : on retrouve les $\binom{n}{k}$ chemins de l'arbre.

Proposition 5 : Pour tous entiers n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{(symétrie)}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \text{(relation de Pascal)}$$

∘ Démonstration : Démontrons la relation de symétrie. Se donner une partie de k éléments parmi n revient exactement à se donner son complémentaire, qui compte $n-k$ éléments : à chaque combinaison de k éléments correspond ainsi une et une seule combinaison de $n-k$ éléments. Les deux ensembles de parties ont donc le même nombre d'éléments.

Pour la relation de Pascal, considérons un ensemble à $n+1$ éléments, et distinguons un élément particulier que l'on notera a. Toute partie de $k+1$ éléments est alors dans l'un des deux cas suivants, qui s'excluent mutuellement :

- soit elle contient a, et il reste à choisir ses k autres éléments parmi les n restants : il y a $\binom{n}{k}$ telles parties ;
- soit elle ne contient pas a, et ses $k+1$ éléments sont choisis parmi les n restants : il y a $\binom{n}{k+1}$ telles parties.

En additionnant ces deux nombres, on obtient bien le nombre total de parties à $k+1$ éléments. □

La relation de Pascal permet de calculer les coefficients binomiaux de proche en proche, en disposant chaque ligne sous la précédente : c'est le **triangle de Pascal**, où chaque coefficient s'obtient en additionnant celui qui le surplombe et son voisin de gauche.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Les trois cases colorées illustrent la relation de Pascal : $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10 = \binom{5}{2}$.

Remarque : Pour des valeurs plus grandes, on utilise la formule explicite, admise ici :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \text{où} \qquad n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

Ainsi $\binom{10}{3} = \dfrac{10!}{3! \times 7!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$. En pratique, la calculatrice fournit directement ces valeurs, à l'aide de la touche notée `nCr` ou `combinaison`.

2.3.4 La loi binomiale

Définition : On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, et on note X la variable aléatoire comptant le **nombre de succès** obtenus au cours des n épreuves.

On dit alors que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p, ce que l'on note $X \sim \mathcal{B}(n\,;p)$.

Théorème 1 : Loi binomiale :
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$. Alors $X(\Omega) = \{0\,;1\,;\ldots\,;n\}$ et, pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}$$

∘ Démonstration : Plaçons-nous dans l'arbre du schéma de Bernoulli, et fixons un entier k entre 0 et n.

Probabilité d'un chemin : considérons un chemin réalisant exactement k succès. Il porte k branches de probabilité p et $n-k$ branches de probabilité $1-p$. Les épreuves étant indépendantes, la probabilité de ce chemin est le produit des probabilités portées par ses branches, soit :

$$\underbrace{p\times\cdots\times p}_{k \text{ facteurs}}\times\underbrace{(1-p)\times\cdots\times(1-p)}_{n-k \text{ facteurs}} = p^k(1-p)^{n-k}$$

Remarquons que ce nombre ne dépend pas du chemin choisi, mais seulement de k : l'*ordre* dans lequel surviennent les succès n'a aucune influence.

Nombre de chemins : par définition du coefficient binomial, il y a exactement $\binom{n}{k}$ chemins réalisant k succès.

Conclusion : l'événement $(X=k)$ est la réunion de ces chemins, deux à deux incompatibles. Sa probabilité est donc la somme de leurs probabilités, toutes égales, d'où :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}$$

□

Remarque : La formule se retient en trois morceaux, qui répondent chacun à une question :

- $\binom{n}{k}$: *où* placer les k succès parmi les n épreuves ?
- p^k : quelle probabilité pour ces k succès ?
- $(1-p)^{n-k}$: quelle probabilité pour les $n-k$ échecs restants ?

Proposition 6 : Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$, alors :

$$E(X) = np \qquad \text{et} \qquad V(X) = np(1-p) \qquad \text{et} \qquad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Remarque : Ce résultat est admis, mais il est parfaitement intuitif pour l'espérance : si l'on répète n fois une épreuve dont la probabilité de succès est p, on s'attend naturellement à obtenir np succès en moyenne. Sur 100 lancers d'une pièce équilibrée, on attend $100\times 0{,}5 = 50$ « pile ».

On peut d'ailleurs le retrouver formellement : X est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p, chacune d'espérance p d'après la proposition 4.

Exemple : Une usine produit des pièces dont 3 % sont défectueuses. On prélève au hasard un lot de 50 pièces dans un stock suffisamment grand pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X le nombre de pièces défectueuses du lot. Les 50 prélèvements constituent des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « la pièce est défectueuse » et de paramètre $p = 0{,}03$. Ainsi $X \sim \mathcal{B}(50\,;0{,}03)$.

(a) Probabilité qu'exactement deux pièces soient défectueuses :

$$P(X=2) = \binom{50}{2} \times 0{,}03^2 \times 0{,}97^{48} = 1225 \times 0{,}0009 \times 0{,}97^{48} \approx 0{,}256$$

(b) Probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse :

$$P(X=0) = \binom{50}{0} \times 0{,}03^0 \times 0{,}97^{50} = 0{,}97^{50} \approx 0{,}218$$

(c) Probabilité qu'au moins une pièce soit défectueuse : on passe par l'événement contraire, réflexe systématique dès que l'énoncé contient « au moins » :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) \approx 1 - 0{,}218 = 0{,}782$$

(d) Probabilité qu'au plus deux pièces soient défectueuses : l'expression « au plus deux » signifie 0, 1 ou 2 pièces défectueuses. L'événement $(X \leqslant 2)$ est donc la réunion des trois événements $(X=0)$, $(X=1)$ et $(X=2)$, qui sont deux à deux incompatibles puisque X ne peut pas prendre deux valeurs à la fois. Sa probabilité est par conséquent la *somme* de leurs probabilités :

$$P(X \leqslant 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

Il reste à calculer chacun de ces trois termes à l'aide de la formule du théorème 1 :

$$P(X=0) = \binom{50}{0} \times 0{,}03^0 \times 0{,}97^{50} = 1 \times 1 \times 0{,}97^{50} \qquad \approx 0{,}218$$

$$P(X=1) = \binom{50}{1} \times 0{,}03^1 \times 0{,}97^{49} = 50 \times 0{,}03 \times 0{,}97^{49} \qquad \approx 0{,}337$$

$$P(X=2) = \binom{50}{2} \times 0{,}03^2 \times 0{,}97^{48} = 1225 \times 0{,}0009 \times 0{,}97^{48} \qquad \approx 0{,}256$$

d'où, en additionnant :

$$P(X \leqslant 2) \approx 0{,}218 + 0{,}337 + 0{,}256 = 0{,}811$$

Autrement dit, un lot sur cinq environ contient au moins trois pièces défectueuses.

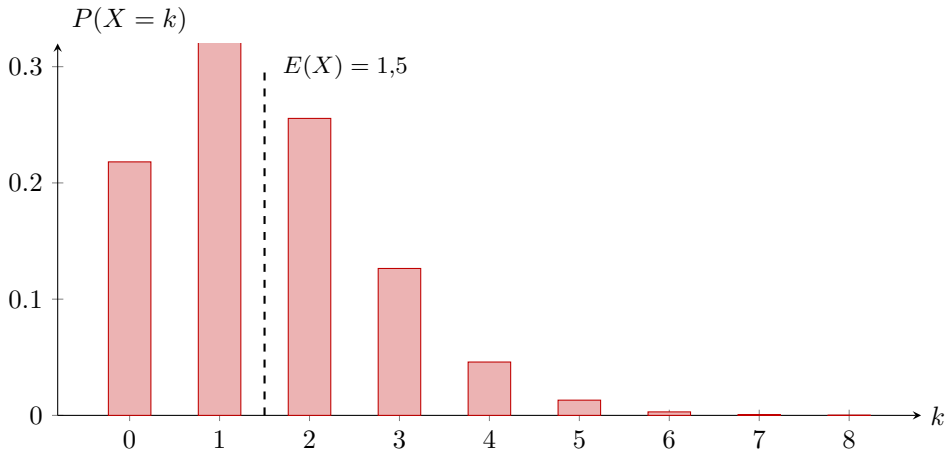
Cette somme porte un nom : c'est la **probabilité cumulée** $P(X \leqslant 2)$, que la calculatrice fournit directement par `binomFRep`$(50\,;0{,}03\,;2)$. Il est toutefois indispensable de savoir la décomposer à la main, car c'est cette décomposition qui justifie le résultat.

(e) Nombre moyen de pièces défectueuses :

$$E(X) = 50 \times 0{,}03 = 1{,}5 \qquad \text{et} \qquad \sigma(X) = \sqrt{50 \times 0{,}03 \times 0{,}97} \approx 1{,}21$$

◇

Le diagramme en bâtons ci-dessous représente cette loi $\mathcal{B}(50\,;0{,}03)$. On y retrouve visuellement l'espérance 1,5 : les bâtons les plus hauts entourent cette valeur, et la loi devient rapidement négligeable au-delà de 5 pièces défectueuses.



Remarque : La calculatrice fournit directement ces probabilités, à l'aide des fonctions `binomFdp`(n,p,k) pour $P(X=k)$ et `binomFRep`(n,p,k) pour la probabilité cumulée $P(X \leqslant k)$. Cette seconde fonction est indispensable dès que l'énoncé demande une probabilité du type $P(X \leqslant k)$, $P(X \geqslant k)$ ou $P(a \leqslant X \leqslant b)$, que l'on ramène toujours à des probabilités cumulées :

$$P(X \geqslant k) = 1 - P(X \leqslant k-1) \qquad \text{et} \qquad P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a-1)$$

Attention au décalage d'une unité, source d'erreur classique : l'événement $(X \geqslant 3)$ est le contraire de $(X \leqslant 2)$, et non de $(X \leqslant 3)$.