Chapitre 3

Fonctions numériques

3.1 Introduction historique

> *Et que sont ces fluxions ? Les vitesses d'accroissements évanouissants ? Et que sont ces mêmes accroissements évanouissants ? Ce ne sont ni des quantités finies, ni des quantités infiniment petites, ni rien du tout. Ne pourrions-nous pas les appeler les fantômes des quantités défuntes ?*
>
> George Berkeley - *The Analyst* (1734), §35

Vous manipulez des fonctions depuis la classe de Seconde, et vous dérivez depuis la Première. Ces gestes vous sont devenus si familiers qu'il est facile d'oublier ce qu'ils cachent : à chaque fois que l'on calcule une dérivée, on effectue en réalité un passage à la limite, c'est-à-dire une opération sur l'infiniment petit. Or cette opération, que les plus grands mathématiciens ont pratiquée avec un succès éclatant pendant près de deux siècles, personne n'était capable de la définir. La citation de Berkeley, qui raille l'imprécision des savants de son temps, résume un scandale intellectuel qui aura mis cent cinquante ans à se résoudre.

3.1.1 Le siècle des courbes

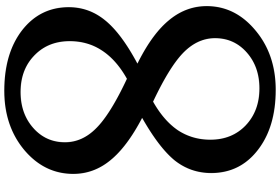
Au début du XVII^{e} siècle, deux problèmes obsèdent les géomètres : tracer la tangente à une courbe en un point donné, et calculer l'aire délimitée par cette courbe. **Pierre de Fermat**, vers 1636, imagine pour le premier une méthode qui préfigure exactement la dérivation : il considère deux points voisins de la courbe, forme le rapport de leurs écarts, puis « fait disparaître » la petite quantité qui les sépare. Le procédé fonctionne remarquablement, mais Fermat ne sait pas justifier cette disparition.

C'est **Isaac Newton** en Angleterre, et **Gottfried Wilhelm Leibniz** en Allemagne, qui transforment indépendamment ces recettes en une véritable machine de calcul, entre 1665 et 1684. Newton parle de *fluxions*, Leibniz de *différentielles* et introduit la notation $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ que les physiciens utilisent encore. Leur calcul infinitésimal permet de résoudre en quelques lignes des problèmes qui résistaient depuis l'Antiquité, et fournit à la physique naissante son langage. Il repose pourtant sur des quantités contradictoires, tantôt nulles tantôt non nulles selon les besoins de la démonstration, ce que Berkeley dénonce en 1734 avec l'ironie que l'on sait.

3.1.2 La rigueur retrouvée

La réponse viendra d'un déplacement du regard : plutôt que de chercher à définir l'infiniment petit, on va définir ce que signifie *s'approcher* d'une valeur. En 1817, le prêtre et mathématicien tchèque **Bernard Bolzano** publie un mémoire au titre révélateur, où il entreprend de démontrer qu'une fonction continue qui change de signe s'annule forcément.

Augustin-Louis Cauchy fait de la limite le fondement de tout le calcul dans son *Cours d'analyse* de 1821, puis **Karl Weierstrass** en livre vers 1860 la formulation définitive. Les fantômes de Berkeley sont enfin exorcisés : il n'y a plus d'infiniment petits, seulement des inégalités et des voisinages.



3.2 Limites d'une fonction

3.2.1 Limites en l'infini

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A\,;+\infty[$. Soit ℓ un réel.

- On dit que f admet pour **limite le réel ℓ en $+\infty$** lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.
- On dit que f admet pour **limite $+\infty$ en $+\infty$** lorsque tout intervalle de la forme $[M\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
- On dit que f admet pour **limite $-\infty$ en $+\infty$** lorsque tout intervalle de la forme $]-\infty\,;M]$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Soit maintenant f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty\,;A]$.

- On dit que f admet pour **limite le réel ℓ en $-\infty$** lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand en valeur absolue et négatif. On note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$.
- On dit que f admet pour **limite $+\infty$ en $-\infty$** lorsque tout intervalle de la forme $[M\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand en valeur absolue et négatif. On note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.
- On dit que f admet pour **limite $-\infty$ en $-\infty$** lorsque tout intervalle de la forme $]-\infty\,;M]$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand en valeur absolue et négatif. On note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Remarque : La formule « dès que x est assez grand en valeur absolue et négatif » signifie : il existe un réel A tel que la propriété soit vraie pour tout $x\leqslant A$. On dit aussi, plus brièvement, « dès que x est assez petit ».

Remarque : Ces définitions sont exactement celles rencontrées au chapitre 1 pour les suites, à ceci près que l'entier n y est remplacé par une variable réelle x : « à partir d'un certain rang » devient « dès que x est assez grand ».

Attention toutefois à une différence essentielle : une suite ne peut être étudiée qu'en $+\infty$, alors qu'une fonction peut l'être en $-\infty$, en $+\infty$, mais aussi en n'importe quel réel a, comme nous le verrons plus loin.

Proposition 1 (limites de référence) : Soit n un entier naturel non nul. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}+\infty & \text{si } n \text{ est pair}\\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

3.2.2 Limites en un réel

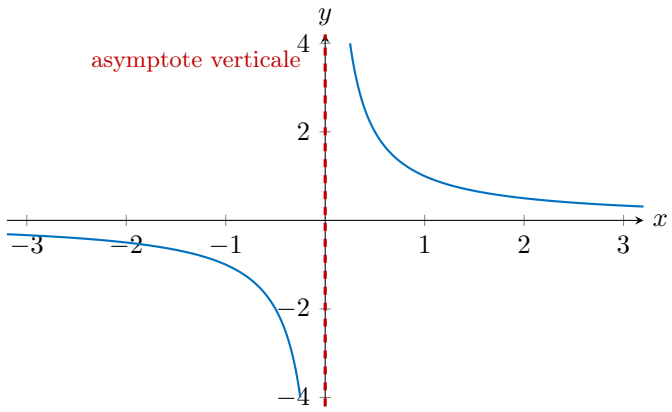
Définition : Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a, sauf peut-être en a.

- On dit que f admet pour **limite $+\infty$ en a** lorsque tout intervalle de la forme $[M\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez proche de a. On note $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.
- Lorsque l'on restreint l'étude aux valeurs $x>a$, on parle de **limite à droite**, notée $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$; pour $x<a$, de **limite à gauche**, notée $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Exemple : Considérons la fonction inverse $f : x\mapsto\dfrac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. Lorsque x se rapproche de 0 par valeurs positives, $\frac{1}{x}$ devient arbitrairement grand ; par valeurs négatives, arbitrairement grand en valeur absolue mais négatif. On a donc :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

Ces deux limites étant différentes, la fonction inverse n'admet *pas* de limite en 0.



3.2.3 Opérations sur les limites

Les règles opératoires sont identiques à celles établies au chapitre 1 pour les suites. Dans les tableaux qui suivent, ℓ et ℓ' désignent des réels, α désigne $-\infty$, un réel a ou $+\infty$, et **F.I.** signifie **forme indéterminée**.

Limite d'une somme $f+g$ en α :

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f+g)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Limite d'un produit $f\times g$ et d'un quotient $\dfrac{f}{g}$ en α :

$\lim f$	ℓ	$\ell\neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim(fg)$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	**F.I.**

$\lim f$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	0
$\lim g$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim \dfrac{f}{g}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	**F.I.**	**F.I.**

Remarque : Les signes des infinis obéissent à la règle des signes habituelle. Il existe donc quatre formes indéterminées, qu'il faut connaître par cœur :

$$(+\infty)+(-\infty) \qquad 0\times\infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$$

Un cas mérite une attention particulière : lorsque f tend vers $\ell\neq 0$ et g vers 0, le quotient $\frac{f}{g}$ tend vers $\pm\infty$, le signe étant déterminé par celui de g au voisinage du point considéré. C'est ici qu'interviennent les limites à droite et à gauche.

Exemple : Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+5}$. Numérateur et dénominateur tendent vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée. On factorise par le terme de plus haut degré :

$$\frac{2x^2-3x+1}{x^2+5}=\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}=\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{5}{x^2}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{2}{1}=2$$

Exemple : Calculons $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+1}{x-2}$. Le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 0 : il ne s'agit pas d'une forme indéterminée, mais il faut déterminer un signe. Pour $x>2$, on a $x-2>0$, donc :

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x+1}{x-2}=+\infty \qquad \text{et de même} \qquad \lim_{x\to 2^-}\frac{x+1}{x-2}=-\infty$$

3.2.4 Théorèmes de comparaison

Théorème 1 : Théorèmes de comparaison :
Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout x assez grand.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème 2 : Théorème des gendarmes :
Soient f, g et h trois fonctions telles que, pour tout x assez grand :

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

Si f et h admettent la même limite finie ℓ en $+\infty$, alors g admet également ℓ pour limite en $+\infty$.

◦ Démonstration : Démontrons le premier point du théorème 1. Soit M un réel. Comme f tend vers $+\infty$, il existe un réel A_1 tel que $f(x) \geqslant M$ pour tout $x \geqslant A_1$. Par ailleurs, il existe un réel A_2 à partir duquel $f(x) \leqslant g(x)$. Alors, pour tout x supérieur au plus grand des deux nombres A_1 et A_2 :

$$g(x) \geqslant f(x) \geqslant M$$

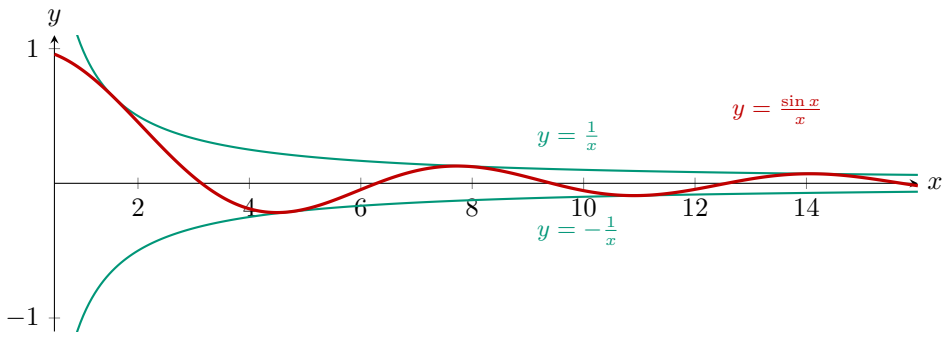
Tout intervalle $[M\,;+\infty[$ contient donc les valeurs de g dès que x est assez grand, autrement dit g tend vers $+\infty$. □

Exemple : Étudions $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$. La fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$, mais elle est bornée : pour tout $x > 0$,

$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \quad\Longrightarrow\quad -\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}$$

Les deux fonctions encadrantes tendant vers 0, le théorème des gendarmes donne :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$



La courbe rouge, prise en tenaille entre les deux « gendarmes », n'a d'autre choix que de rejoindre l'axe des abscisses.

3.2.5 Asymptotes

Définition : Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f.

- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$, la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.

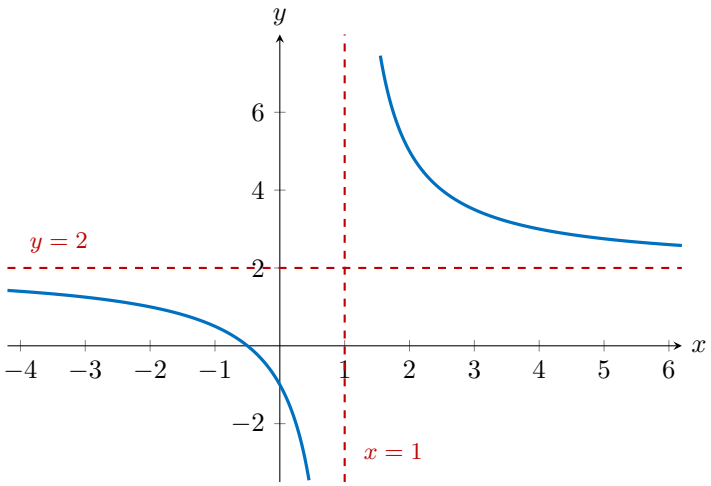
Remarque : Une asymptote est une droite dont la courbe se rapproche indéfiniment. Cela n'interdit nullement à la courbe de couper cette droite, y compris plusieurs fois : c'est le cas de la courbe de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ ci-dessus, qui traverse une infinité de fois son asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$. En simplifiant, on obtient l'écriture :

$$f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$$

On en déduit trois renseignements :

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$: la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale ;
- $f(x) - 2 = \dfrac{3}{x-1}$ tend vers 0 en $\pm\infty$, donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$: la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale ;
- le signe de $f(x) - 2$ indique de plus la position relative : la courbe est au-dessus de son asymptote horizontale pour $x > 1$, en dessous pour $x < 1$.



Remarque : Les deux types d'asymptotes se lisent donc directement sur les limites : une limite *finie* en $\pm\infty$ donne une asymptote horizontale, une limite *infinie* en un réel a donne une asymptote verticale. Rechercher les asymptotes d'une courbe revient ainsi à calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

3.3 Dérivation et convexité

3.3.1 Rappels de Première

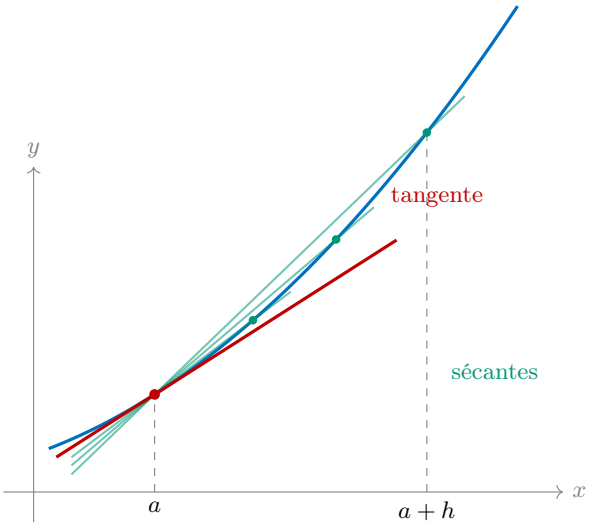
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est **dérivable en a** lorsque le taux de variation admet une limite finie en 0 :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Ce nombre $f'(a)$ s'appelle le **nombre dérivé** de f en a. C'est le coefficient directeur de la **tangente** à la courbe au point d'abscisse a, dont une équation est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Géométriquement, le taux de variation est le coefficient directeur de la droite passant par les points d'abscisses a et $a+h$, appelée **sécante**. Lorsque h tend vers 0, le second point glisse vers le premier et la sécante pivote jusqu'à devenir la tangente : la dérivation est donc bien un passage à la limite, comme l'avait pressenti Fermat.



Proposition 2 (dérivées usuelles et opérations) : Les fonctions suivantes sont dérivables sur tout intervalle où les expressions ont un sens :

$f(x)$	$f'(x)$	Sur	Opération	Dérivée
k	0	$\mathbb{R}$	$u+v$	$u'+v'$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	ku	ku'
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	uv	$u'v+uv'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Remarque : Rappelons enfin le lien fondamental entre dérivée et variations : si $f' \geqslant 0$ sur un intervalle I, alors f est croissante sur I ; si $f' \leqslant 0$, alors f est décroissante. C'est ce résultat qui fait de la dérivation l'outil central de l'étude des fonctions.

3.3.2 Dérivée d'une fonction composée

Définition : Soient u et f deux fonctions. La fonction **composée** de u suivie de f, notée $f \circ u$ et lue « f rond u », est définie par :

$$(f \circ u)(x) = f\big(u(x)\big)$$

sur l'ensemble des réels x pour lesquels $u(x)$ appartient à l'ensemble de définition de f.

Théorème 3 : Dérivée d'une composée :
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, et f une fonction dérivable sur un intervalle contenant toutes les valeurs prises par u. Alors $f \circ u$ est dérivable sur I et :

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'\big(u(x)\big)$$

Remarque : La formule se retient par l'image d'un emboîtement : on dérive la fonction *extérieure* en laissant l'intérieur intact, puis on multiplie par la dérivée de l'*intérieur*. L'oubli de ce second facteur $u'(x)$ est de très loin l'erreur la plus fréquente.

En appliquant ce théorème aux fonctions de référence, on obtient les cas particuliers suivants, à connaître par cœur :

Proposition 3 (cas particuliers) : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I :

Fonction	Dérivée	Condition sur I
$u^n \quad (n \in \mathbb{Z})$	$n\,u'\,u^{n-1}$	$u \neq 0$ si $n < 0$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$u \neq 0$
e^u	$u'\,\mathrm{e}^u$	aucune

∘ Démonstration : Chaque ligne s'obtient en appliquant le théorème 3 avec la fonction extérieure adéquate. Par exemple, pour $\sqrt{u}$, on prend $f : t \mapsto \sqrt{t}$, dont la dérivée est $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Le théorème donne alors :

$$\left(\sqrt{u}\right)'(x) = u'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Le raisonnement est identique pour les autres lignes. □

Exemple : Dérivons les fonctions suivantes, en identifiant à chaque fois la fonction intérieure u :

$f(x) = (3x^2-5)^4$ avec $u(x) = 3x^2-5$ $\quad f'(x) = 4 \times 6x \times (3x^2-5)^3 = 24x(3x^2-5)^3$

$g(x) = \sqrt{x^2+1}$ avec $u(x) = x^2+1$ $\quad g'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$h(x) = \mathrm{e}^{-2x+3}$ avec $u(x) = -2x+3$ $\quad h'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2x+3}$

$k(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$ avec $u(x) = x^2+4$ $\quad k'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+4)^2}$

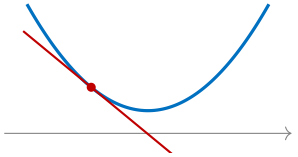
◇

3.3.3 Convexité

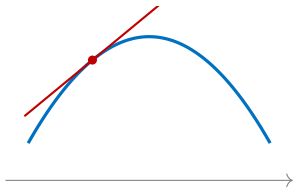
Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, de courbe $\mathcal{C}_f$.

- f est **convexe** sur I lorsque $\mathcal{C}_f$ est entièrement située *au-dessus* de chacune de ses tangentes.
- f est **concave** sur I lorsque $\mathcal{C}_f$ est entièrement située *en dessous* de chacune de ses tangentes.

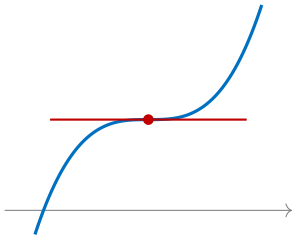
Un point de $\mathcal{C}_f$ en lequel la courbe traverse sa tangente, c'est-à-dire où f change de convexité, est appelé **point d'inflexion**.



convexe : courbe au-dessus de ses tangentes



concave : courbe en dessous de ses tangentes



point d'inflexion : la courbe traverse sa tangente

Théorème 4 : Caractérisation de la convexité :
Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors :

- f est convexe sur $I \iff f'$ est croissante sur $I \iff f'' \geqslant 0$ sur I ;
- f est concave sur $I \iff f'$ est décroissante sur $I \iff f'' \leqslant 0$ sur I.

De plus, $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en a si et seulement si f'' *s'annule en changeant de signe* en a.

Remarque : La condition « en changeant de signe » est essentielle. La fonction $x \mapsto x^4$ vérifie $f''(0) = 0$, pourtant sa courbe n'admet aucun point d'inflexion en 0 : la dérivée seconde $f''(x) = 12x^2$ s'annule sans changer de signe, et la fonction reste convexe de part et d'autre.

Exemple : Étudions la convexité de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$. On calcule successivement :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \qquad \text{puis} \qquad f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$$

La dérivée seconde est négative sur $]-\infty\,;1]$ et positive sur $[1\,;+\infty[$. La fonction est donc concave sur $]-\infty\,;1]$, convexe sur $[1\,;+\infty[$, et sa courbe admet un point d'inflexion au point d'abscisse 1, puisque f'' s'y annule en changeant de signe.

3.4 Continuité

3.4.1 Définition

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est **continue en** a lorsque :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

La fonction f est dite **continue sur** I lorsqu'elle est continue en chaque point de I.

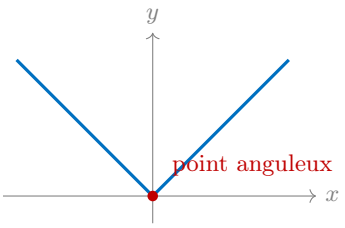
Remarque : Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle lorsque l'on peut tracer sa courbe *sans lever le crayon*. Cette image est commode, mais elle ne saurait tenir lieu de définition.

Proposition 4 : Toutes les fonctions usuelles — polynômes, fonctions rationnelles, racine carrée, valeur absolue et exponentielle — sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.

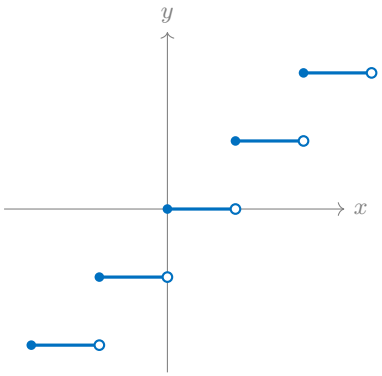
De plus, toute fonction **dérivable** sur un intervalle I y est **continue**.

Remarque : La réciproque de cette dernière implication est fausse. La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas dérivable en 0 : sa courbe y présente un point anguleux, et l'on ne peut pas y tracer de tangente unique.

Un exemple classique de fonction *non* continue est la fonction partie entière, qui à tout réel associe le plus grand entier qui lui est inférieur ou égal. Sa courbe est un escalier, dont chaque marche impose de lever le crayon.



$x \mapsto |x|$: continue, non dérivable en 0



$x \mapsto \lfloor x \rfloor$: non continue en chaque entier

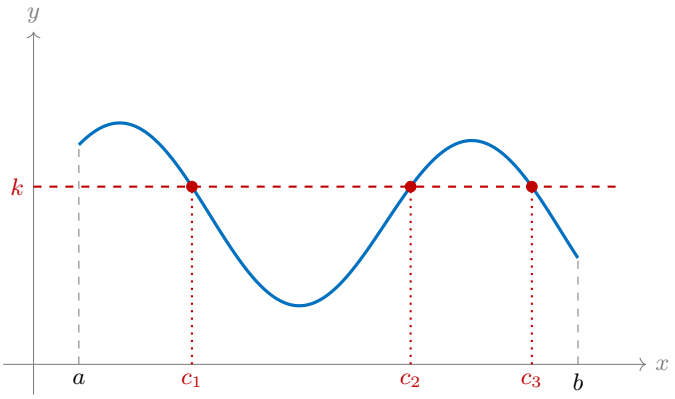
3.4.2 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 5 : Théorème des valeurs intermédiaires :
Soit f une fonction *continue* sur un intervalle $[a\,;b]$. Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe *au moins* un réel $c \in [a\,;b]$ tel que :

$$f(c) = k$$

Remarque : Ce théorème est admis. Il affirme l'*existence* d'une solution, mais ne dit rien de leur nombre ni de leur valeur : sur la figure ci-dessous, l'équation $f(x) = k$ admet trois solutions.

L'hypothèse de continuité est indispensable. La fonction partie entière, sur l'intervalle $[0\,;2]$, passe de la valeur 0 à la valeur 2 sans jamais prendre la valeur intermédiaire 1,5.



Théorème 6 : Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :
Soit f une fonction continue et *strictement monotone* sur $[a\,;b]$. Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une *unique* solution dans $[a\,;b]$.

Ce corollaire est également connu sous le nom de **théorème de la bijection**.

Remarque : Cette seconde appellation s'explique ainsi : dire que tout réel k de l'intervalle d'arrivée admet un unique antécédent, c'est exactement dire que f réalise une *bijection* de $[a\,;b]$ sur l'intervalle $[f(a)\,;f(b)]$ — ou $[f(b)\,;f(a)]$ si f est décroissante.

Ce corollaire s'étend par ailleurs aux intervalles ouverts ou infinis, en remplaçant $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de f aux bornes. Ainsi, si f est continue et strictement croissante sur $[a\,;+\infty[$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors tout réel $k \geqslant f(a)$ admet un unique antécédent.

♡ **Méthode :** Pour montrer qu'une équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur un intervalle, on rédige toujours les trois mêmes vérifications :

1. f est continue sur l'intervalle considéré (le plus souvent parce qu'elle y est dérivable).

2. f est strictement monotone sur cet intervalle, ce que l'on établit par l'étude du signe de f'.

3. La valeur k est comprise entre les valeurs (ou les limites) de f aux bornes.

On conclut alors par le théorème 6, puis on encadre la solution à l'aide de la calculatrice.

Exemple : Montrons que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une unique solution réelle, et déterminons-en une valeur approchée.

Posons $f(x) = x^3 + x - 1$, fonction polynôme donc *continue* et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée vaut :

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \quad \text{pour tout réel } x$$

donc f est *strictement croissante* sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Le réel 0 est donc compris entre ces deux limites : d'après le théorème 6, l'équation $f(x) = 0$ admet une *unique* solution α dans $\mathbb{R}$.

Pour l'encadrer, on calcule quelques valeurs : $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$, donc $\alpha \in]0\,;1[$. En affinant à la calculatrice :

$$f(0{,}6) \approx -0{,}18 < 0 \qquad \text{et} \qquad f(0{,}7) \approx 0{,}04 > 0 \qquad \text{donc} \qquad 0{,}6 < \alpha < 0{,}7$$

En poursuivant ce **balayage**, on obtient $\alpha \approx 0{,}682$ à 10^{-3} près.

Remarque : Cette méthode dite de balayage consiste à resserrer progressivement un intervalle contenant la solution, en exploitant le changement de signe de f. Elle illustre bien la portée du théorème : celui-ci ne fournit aucune formule donnant α — et il n'en existe d'ailleurs pas de simple ici — mais il garantit que ce nombre existe et qu'il est unique, ce qui autorise à le nommer et à en calculer une valeur approchée aussi précise que l'on veut.