Chapitre 4

Géométrie dans l'espace

4.1 Introduction historique

Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être plus commode.

Henri Poincaré - *La Science et l'Hypothèse* (1902), chapitre III

Une feuille de papier est plate, et c'est là tout le problème. Depuis la Seconde, vous travaillez dans un plan que la page reproduit fidèlement ; l'espace, lui, ne s'y laisse jamais enfermer. Il faut apprendre à lire une perspective, à admettre que deux droites qui se croisent sur le dessin peuvent ne pas se rencontrer, et surtout à remplacer l'intuition visuelle par le calcul. C'est précisément ce que ce chapitre propose : traduire la géométrie de l'espace en coordonnées, afin qu'un problème de position devienne une question d'équations.

4.1.1 Les solides des Anciens

Les Grecs ont étudié l'espace bien avant le plan repéré. Le livre XI des *Éléments* d'Euclide, vers 300 av. J.-C., est entièrement consacré à la géométrie dans l'espace, et l'ouvrage s'achève sur la construction des cinq polyèdres réguliers — tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre — que Platon associait aux éléments constitutifs du monde. Cette géométrie est purement synthétique : tout se démontre par des raisonnements sur des figures, sans le moindre calcul de coordonnées.

Elle atteint pourtant très vite ses limites. Déterminer si deux droites de l'espace se coupent, calculer la distance d'un point à un plan, ou décider si trois plans ont un point commun : autant de questions auxquelles la figure seule répond mal, car elle ment. Deux droites peuvent sembler sécantes sur un dessin alors qu'elles passent l'une au-dessus de l'autre sans se toucher.

4.1.2 L'espace mis en coordonnées

La solution vient de **René Descartes**, qui montre en 1637 comment traduire un problème de géométrie en équations. Mais sa *Géométrie* reste plane. C'est le français **Alexis Clairaut** qui franchit le pas décisif en 1731, à seize ans, dans un mémoire consacré aux « courbes à double courbure » : il y introduit systématiquement trois coordonnées, donne les premières équations de surfaces, et fait entrer l'espace dans le champ du calcul. **Euler** en fixera peu après le formalisme.

Restait un dernier outil à forger, celui qui permet de mesurer angles et distances sans jamais tracer : le **produit scalaire**. Issu des travaux de Grassmann et de Hamilton au XIX^{e} siècle, il reçoit sa notation moderne du physicien américain **Josiah Willard Gibbs** vers 1881. Il sera central dans nos raisonnements, car il fournit la clé de tout le reste : une fois qu'un calcul décide de l'orthogonalité, la perspective trompeuse du dessin n'a plus le dernier mot.



4.2 Vecteurs et produit scalaire dans l'espace

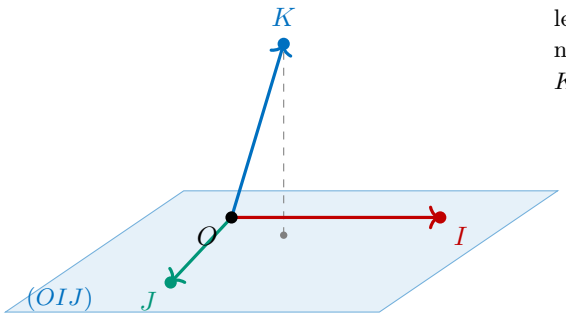
4.2.1 Bases et repères de l'espace

Dans le plan, un repère se donne par *trois* points non alignés : une origine et deux directions. Dans l'espace, une direction supplémentaire est nécessaire, et il faut donc un point de plus.

Définition : Quatre points de l'espace sont dits **coplanaires** lorsqu'il existe un plan les contenant tous les quatre.

On appelle **repère de l'espace** tout quadruplet $(O\,;I,J,K)$ de quatre points **non coplanaires**. Le point O en est l'**origine**.

Remarque : La condition est indispensable : si les quatre points appartenaient à un même plan, on ne pourrait repérer que les points de ce plan, et jamais ceux situés au-dessus ou en dessous.

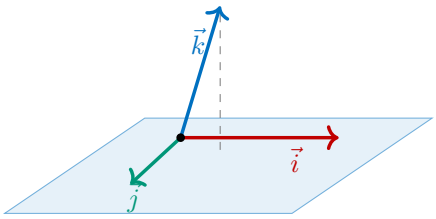


les quatre points O, I, J, K
ne sont pas coplanaires :
K n'appartient pas au plan (OIJ)

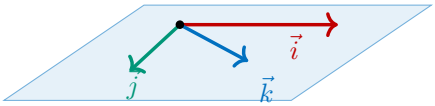
Un tel repère se lit aussitôt en termes de vecteurs : à partir de l'origine O, les trois points I, J et K définissent trois vecteurs $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OK}$, qui donnent les trois directions dans lesquelles on peut se déplacer.

Définition : Trois vecteurs de l'espace sont dits **coplanaires** lorsqu'il existe un plan contenant des représentants de ces trois vecteurs de même origine.

On appelle **base de l'espace** tout triplet $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de vecteurs **non coplanaires**.



$\vec{k}$ n'est pas dans le plan de $\vec{i}$ et $\vec{j}$:
$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **est une base**



les trois vecteurs sont coplanaires :
ce **n'est pas** une base

Remarque : Les deux points de vue coïncident : si $(O\,;I,J,K)$ est un repère de l'espace, alors le triplet $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK}\right)$ est une base, et l'on note plus commodément ce repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Réciproquement, une base et un point O déterminent quatre points non coplanaires. Les points servent donc à *poser* le repère, les vecteurs à *calculer* dedans.

Théorème 1 : Décomposition sur une base :
Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de l'espace. Tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace s'écrit *de manière unique* sous la forme :

$$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Le triplet $(x\,;y\,;z)$ est appelé le triplet des **coordonnées de** $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

De même, dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, tout point M est repéré par les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$, appelées **coordonnées du point** M.

∘ Démonstration : Nous admettons l'existence d'une telle écriture et démontrons son *unicité*, qui est le point essentiel : c'est elle qui autorise à parler *des* coordonnées d'un vecteur.

Supposons que $\vec{u}$ admette deux décompositions :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

En soustrayant membre à membre :

$$(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$$

Raisonnons par l'absurde en supposant $x \neq x'$. On peut alors diviser par $x - x'$ et isoler $\vec{i}$:

$$\vec{i} = \frac{y' - y}{x - x'}\,\vec{j} + \frac{z' - z}{x - x'}\,\vec{k}$$

Le vecteur $\vec{i}$ s'obtiendrait donc en combinant $\vec{j}$ et $\vec{k}$: il appartiendrait au plan dirigé par ces deux vecteurs, et les trois vecteurs seraient coplanaires, ce qui contredit la définition d'une base. On a donc $x = x'$, et le même raisonnement donne $y = y'$ puis $z = z'$. □

Remarque : Une base de l'espace comporte *trois* vecteurs, là où une base du plan n'en comportait que deux : c'est la traduction algébrique du fait que l'espace possède trois dimensions. La condition « non coplanaires » y joue exactement le rôle que jouait la condition « non colinéaires » dans le plan.

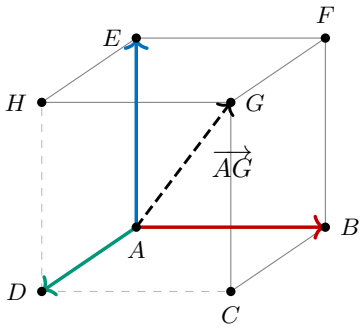
Exemple : Considérons le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires : ils forment donc une base de l'espace, et $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est un repère.

Décomposons la grande diagonale $\overrightarrow{AG}$ dans cette base. En passant par les sommets intermédiaires :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

puisque $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$. Le point G a donc pour coordonnées $(1\,;1\,;1)$ dans ce repère.

De la même façon, le centre I de la face $EFGH$ vérifie $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, et a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$.



$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est une base :
$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

Toutes les bases ne se valent pas en pratique : certaines rendent les calculs bien plus simples que d'autres, et ce sont celles que nous utiliserons presque toujours.

Définition : Une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace est dite **orthonormée** lorsque ses trois vecteurs sont de norme 1 et orthogonaux deux à deux. Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est alors appelé **repère orthonormé**.

Trois vecteurs orthogonaux deux à deux ne pouvant être coplanaires, il s'agit bien d'une base, et tout ce qui précède s'y applique : chaque vecteur et chaque point y admettent un unique triplet de coordonnées.

Remarque : Le cube ci-dessus en fournit un exemple, à condition que son arête mesure 1 : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont alors unitaires et orthogonaux deux à deux, et $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé.

Sauf mention contraire, l'espace sera désormais toujours supposé muni d'un repère orthonormé.

4.2.2 Relations spatiales

Deux relations lient fondamentalement deux vecteurs de l'espace : celle d'avoir la *même direction*, et celle de former un *angle droit*. Nous les définissons ici géométriquement ; la sous-section suivante les traduira en calculs sur les coordonnées.

Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** lorsque l'un des deux est nul, ou lorsqu'il existe un réel k tel que :

$$\vec{v} = k\,\vec{u}$$

Deux vecteurs non nuls colinéaires ont donc la même direction.

Remarque : La colinéarité est l'outil qui traduit l'alignement et le parallélisme :

- trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ;
- deux droites sont **parallèles** si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Notez enfin que deux vecteurs colinéaires sont toujours coplanaires avec n'importe quel troisième vecteur : la colinéarité est donc une condition *plus forte* que la coplanarité.

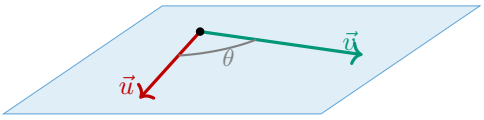
Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Il existe toujours un plan contenant deux représentants de ces vecteurs de même origine : on appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, le produit scalaire de ces deux vecteurs calculé dans ce plan.

En particulier, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et si θ désigne l'angle qu'ils forment :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$$

Remarque : La géométrie de l'espace se ramène ainsi, pour cette notion, à celle du plan : toutes les propriétés établies en Première restent valables. On dispose donc également des expressions :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \qquad \text{et} \qquad \vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$



un plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$

4.2.3 Expressions analytiques

Traduisons maintenant ces deux relations en termes de coordonnées. La première ne demande qu'une base quelconque, tandis que la seconde exigera que cette base soit *orthonormée*.

Proposition 1 : Dans une base de l'espace, soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs, $\vec{u}$ étant non nul. Alors :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \iff \text{leurs coordonnées sont proportionnelles}$$

c'est-à-dire s'il existe un réel k tel que $x' = kx$, $y' = ky$ et $z' = kz$.

∘ Démonstration : La décomposition sur une base étant unique d'après le théorème 1, l'égalité vectorielle $\vec{v} = k\vec{u}$ équivaut à l'égalité des trois coordonnées, soit exactement $x' = kx$, $y' = ky$ et $z' = kz$. □

Exemple : Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\3\\-9\end{pmatrix}$ sont colinéaires, car $\vec{v} = -3\,\vec{u}$: chaque coordonnée de $\vec{v}$ s'obtient en multipliant celle de $\vec{u}$ par -3.

En revanche, $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$: le coefficient serait 2 d'après les deux premières coordonnées, mais $2\times 3 = 6 \neq 5$.

Théorème 2 : Expression analytique du produit scalaire :

Dans un repère orthonormé, soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. Alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz' \qquad \text{et} \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

◦ Démonstration : Décomposons les deux vecteurs dans la base : $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$. En développant par bilinéarité :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'\,\vec{i}\cdot\vec{i} + yy'\,\vec{j}\cdot\vec{j} + zz'\,\vec{k}\cdot\vec{k} + \big(xy'+x'y\big)\vec{i}\cdot\vec{j} + \big(xz'+x'z\big)\vec{i}\cdot\vec{k} + \big(yz'+y'z\big)\vec{j}\cdot\vec{k}$$

Or la base est orthonormée : les trois premiers produits scalaires valent 1 puisque les vecteurs sont unitaires, et les trois derniers sont nuls puisque les vecteurs sont orthogonaux deux à deux. Il ne reste donc que $xx' + yy' + zz'$.

En appliquant ce résultat à $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, on obtient $\|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2+z^2$, d'où la seconde formule en prenant la racine carrée. □

Proposition 2 (orthogonalité) : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

Remarque : C'est le résultat le plus utile de tout le chapitre. Une question de perpendicularité, qu'un dessin ne peut trancher, devient une simple vérification numérique : trois produits, une somme, et l'on conclut.

Exemple : Dans un repère orthonormé, considérons $A(1\,;0\,;2)$, $B(3\,;1\,;-1)$ et $C(2\,;4\,;3)$.

Calculons d'abord les coordonnées des vecteurs, en soustrayant celles de l'origine à celles de l'extrémité :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$$

Leur produit scalaire vaut :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times1 + 1\times4 + (-3)\times1 = 2+4-3 = 3$$

Ce produit n'étant pas nul, le triangle ABC n'est pas rectangle en A. On peut de plus calculer l'angle en A, puisque :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14} \qquad \text{et} \qquad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18}$$

d'où $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{3}{\sqrt{14}\times\sqrt{18}} \approx 0{,}189$, soit $\widehat{BAC} \approx 79°$.

Proposition 3 (distance entre deux points) : Dans un repère orthonormé, soient $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$. Alors :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

Remarque : C'est la version spatiale du théorème de Pythagore, et la formule de Seconde à laquelle on ajoute simplement un troisième terme. C'est aussi la raison pour laquelle l'hypothèse d'orthonormalité est indispensable : sans angles droits entre les axes, la formule serait fausse.

Proposition 4 (identités liées à la norme) : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \quad ; \quad \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right) \quad \text{(identité du parallélogramme)}$$

∘ Démonstration : Toutes ces égalités s'obtiennent en développant, en se souvenant que $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ et que le produit scalaire est symétrique. Ainsi :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

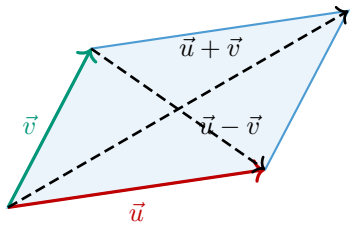
Le calcul est identique pour la deuxième, au signe près, et la troisième s'obtient de la même façon, les termes croisés se compensant cette fois. Enfin, en additionnant les deux premières, les doubles produits disparaissent :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$$

□

Remarque : Les deux premières identités sont exactement les identités remarquables du collège, où le carré d'un nombre est remplacé par le carré d'une norme et le double produit par un produit scalaire. On retrouve d'ailleurs le théorème de Pythagore : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ et il reste $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

La dernière identité s'interprète sur un parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dont les diagonales sont portées par $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$: la somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés des quatre côtés.



Exemple : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = -4$. Calculons $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ sans connaître les coordonnées :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 3^2 + 2\times(-4) + 5^2 = 9 - 8 + 25 = 26 \qquad \text{donc} \qquad \|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{26}$$

Inversement, ces identités permettent de retrouver un produit scalaire à partir de trois longueurs :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

formule déjà rencontrée en début de section, dont on voit maintenant qu'elle n'est qu'une réécriture de la première identité.

4.2.4 Reconnaître des vecteurs coplanaires

Nous avons défini plus haut trois vecteurs coplanaires, et vu que cette notion décide si un triplet forme ou non une base. Encore faut-il pouvoir en juger à partir des seules coordonnées : c'est l'objet de cette sous-section.

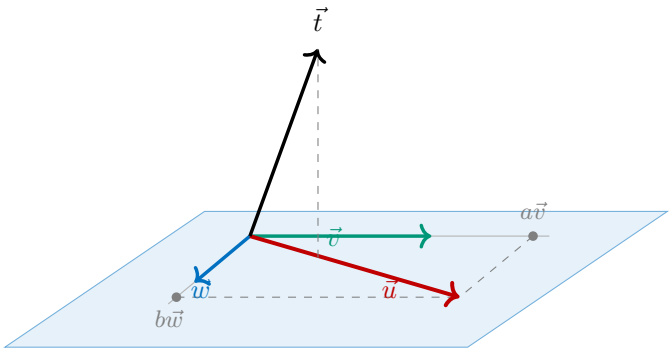
Proposition 5 : Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs *non colinéaires*. Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\vec{u} = a\,\vec{v} + b\,\vec{w}$$

On dit alors que $\vec{u}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires : $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$

$\vec{t}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne le sont pas : aucune combinaison de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sort du plan



♡ **Méthode :** Pour déterminer si trois vecteurs dont on connaît les coordonnées sont coplanaires :

1. On vérifie d'abord que deux d'entre eux, disons $\vec{v}$ et $\vec{w}$, ne sont pas colinéaires : leurs coordonnées ne doivent pas être proportionnelles.

2. On écrit l'égalité $\vec{u} = a\,\vec{v} + b\,\vec{w}$ coordonnée par coordonnée, ce qui donne un système de trois équations aux deux inconnues a et b.

3. On résout ce système à l'aide de deux des trois équations, puis on reporte les valeurs obtenues dans la troisième :

- si elle est vérifiée, les trois vecteurs sont **coplanaires** ;
- si elle ne l'est pas, le système n'a pas de solution et les vecteurs **ne sont pas coplanaires**.

Exemple : Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires, puisque leurs coordonnées ne sont visiblement pas proportionnelles. Cherchons alors deux réels a et b tels que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} 1 = a \\ 2 = b \\ 3 = a + b \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent immédiatement $a = 1$ et $b = 2$. En reportant dans la troisième : $1 + 2 = 3$, égalité *vérifiée*. Les trois vecteurs sont donc coplanaires, et l'on a $\vec{u} = \vec{v} + 2\vec{w}$.

Exemple : Reprenons la même question avec $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires : en passant de l'un à l'autre, la première coordonnée serait multipliée par $\frac{1}{2}$ et la deuxième par 3. Cherchons donc a et b tels que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$:

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + 3b = -2 \\ -a + 2b = 4 \end{cases}$$

Résolvons le système formé par les *deux premières* équations. La première donne $b = 1 - 2a$, que l'on reporte dans la deuxième :

$$a + 3(1 - 2a) = -2 \iff a + 3 - 6a = -2 \iff -5a = -5 \iff a = 1$$

d'où $b = 1 - 2 \times 1 = -1$. Le couple $(1\,;-1)$ est donc le seul candidat possible.

Il reste à le tester dans la troisième équation :

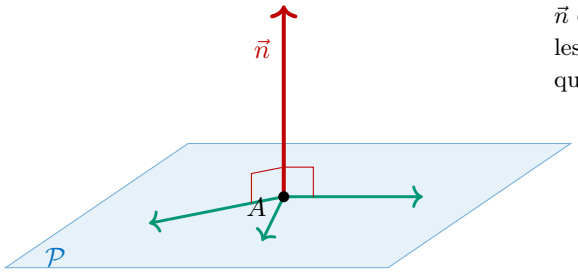
$$-a + 2b = -1 + 2 \times (-1) = -3 \qquad \text{alors qu'il faudrait obtenir} \qquad 4$$

L'égalité est *fausse* : le système n'admet aucune solution, et les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

4.3 Équations et représentations paramétriques

4.3.1 Vecteur normal et équation cartésienne d'un plan

Définition : Un vecteur non nul $\vec{n}$ est un **vecteur normal** à un plan $\mathcal{P}$ lorsqu'il est orthogonal à tous les vecteurs directeurs de ce plan.



$\vec{n}$ est orthogonal à **tous** les vecteurs du plan $\mathcal{P}$, quelle que soit leur direction

Théorème 3 : Équation cartésienne d'un plan :
L'espace est muni d'un repère orthonormé.

- Tout plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$, où d est un réel.
- Réciproquement, si a, b et c ne sont pas tous nuls, l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ vérifiant $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

◦ Démonstration : Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par un point $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}$. Un point $M(x\,;y\,;z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur du plan, c'est-à-dire si et seulement si :

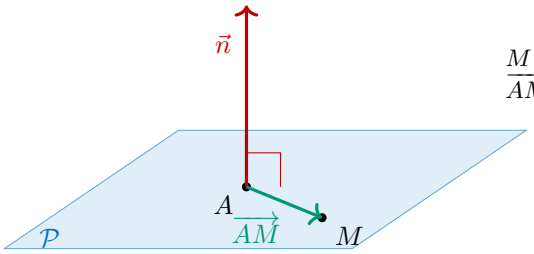
$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$$

En traduisant en coordonnées :

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$ax+by+cz\underbrace{-ax_A-by_A-cz_A}_{=d}=0$$

ce qui est bien de la forme annoncée. □



$M\in\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

Exemple : Déterminons une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(2\,;-1\,;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$.

D'après le théorème 3, cette équation est de la forme $x+4y-2z+d=0$. Comme A appartient au plan, ses coordonnées vérifient l'équation :

$$2+4\times(-1)-2\times3+d=0 \iff 2-4-6+d=0 \iff d=8$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donc $x+4y-2z+8=0$.

4.3.2 Représentation paramétrique d'une droite

Théorème 4 : Représentation paramétrique d'une droite :

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$. Un point $M(x\,;y\,;z)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$$

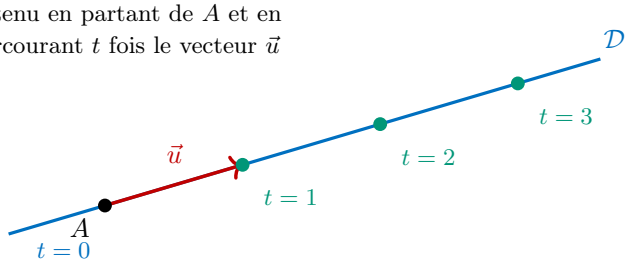
Ce système est appelé une **représentation paramétrique** de $\mathcal{D}$, et le réel t le **paramètre**.

∘ Démonstration : Un point M appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$. En écrivant cette égalité coordonnée par coordonnée :

$$x - x_A = \alpha t \quad ; \quad y - y_A = \beta t \quad ; \quad z - z_A = \gamma t$$

et il ne reste qu'à isoler x, y et z. □

à chaque valeur du paramètre t correspond un unique point de $\mathcal{D}$, obtenu en partant de A et en parcourant t fois le vecteur $\vec{u}$



Exemple : La droite passant par $A(1\,;0\,;-2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -t \\ z = -2 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

En donnant à t la valeur 2, on obtient le point de coordonnées $(7\,;-2\,;2)$, qui appartient donc à cette droite.

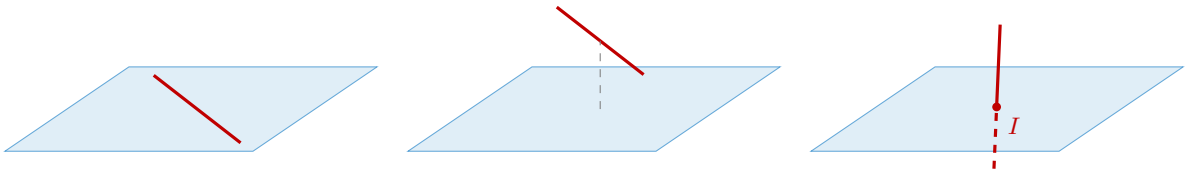
Remarque : Une droite admet une infinité de représentations paramétriques, selon le point et le vecteur directeur choisis. Pour vérifier qu'un point donné appartient à une droite, on résout l'équation obtenue avec la première coordonnée, puis on contrôle que la valeur de t trouvée convient *aussi* pour les deux autres.

4.4 Positions relatives

4.4.1 Droite et plan

Définition : Soient $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Trois positions relatives sont possibles :

- $\mathcal{D}$ est **contenue** dans $\mathcal{P}$;
- $\mathcal{D}$ est **strictement parallèle** à $\mathcal{P}$: leur intersection est vide ;
- $\mathcal{D}$ est **sécante** à $\mathcal{P}$: leur intersection est un point.



$\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \varnothing$ $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{I\}$

Proposition 7 : Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$. Alors :

$$\mathcal{D} \text{ est parallèle à } \mathcal{P} \text{ (ou contenue dans } \mathcal{P}) \iff \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

Dans le cas contraire, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécants en un unique point.

Remarque : Le critère fournit donc une méthode complète en deux temps. On calcule d'abord $\vec{u} \cdot \vec{n}$:

- si ce produit n'est pas nul, la droite perce le plan en un point que l'on détermine par le calcul ;
- s'il est nul, il reste à distinguer les deux cas parallèles, en testant si un point de $\mathcal{D}$ appartient à $\mathcal{P}$.

Exemple : Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - y + z - 4 = 0$ et $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}$$

Un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Leur produit scalaire vaut :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 + 1 + 3 = 6 \neq 0$$

La droite et le plan sont donc sécants. Pour trouver le point d'intersection, on remplace x, y et z par leurs expressions en fonction de t dans l'équation du plan :

$$2(1 + t) - (2 - t) + 3t - 4 = 0$$

$$2 + 2t - 2 + t + 3t - 4 = 0$$

$$6t = 4 \iff t = \frac{2}{3}$$

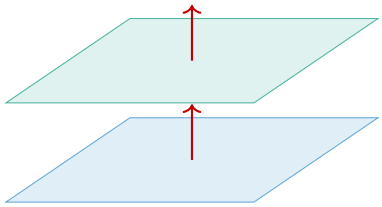
En reportant cette valeur dans la représentation paramétrique, on obtient le point d'intersection :

$$I\left(\frac{5}{3}\,;\frac{4}{3}\,;2\right)$$

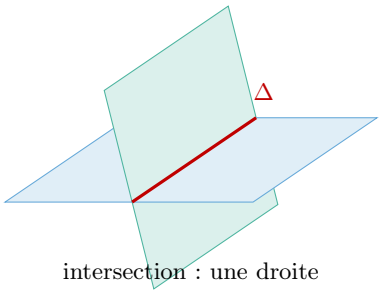
4.4.2 Deux plans

Définition : Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de l'espace sont soit **confondus**, soit **strictement parallèles**, soit **sécants**, et leur intersection est alors une **droite**.

Proposition 8 : Deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont parallèles (confondus ou strictement) si et seulement si $\vec{n}$ **et** $\vec{n'}$ **sont colinéaires**. Sinon, ils sont sécants.



$\vec{n}$ et $\vec{n'}$ colinéaires



intersection : une droite

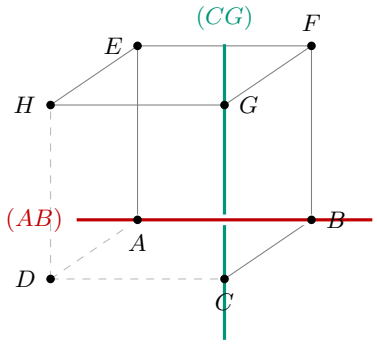
4.4.3 Deux droites

Définition : Deux droites de l'espace sont dites **coplanaires** lorsqu'il existe un plan les contenant toutes les deux. Dans ce cas, elles sont parallèles ou sécantes.

Dans le cas contraire, elles sont dites **non coplanaires** : elles ne se coupent pas et ne sont pas parallèles.

Remarque : C'est la nouveauté essentielle de la géométrie de l'espace, et le principal piège des figures. Pour trancher, on dispose du critère de coplanarité des vecteurs établi en section 4.2 : deux droites sont coplanaires si et seulement si leurs deux vecteurs directeurs et un vecteur joignant un point de chacune d'elles le sont. Dans le plan, deux droites non parallèles sont nécessairement sécantes ; dans l'espace, elles peuvent parfaitement se croiser *en apparence* tout en passant l'une au-dessus de l'autre.

Sur un cube $ABCDEFGH$, les droites (AB) et (CG) en fournissent l'exemple type : leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, et pourtant elles n'ont aucun point commun.



les droites (AB) et (CG)
semblent se croiser,
mais elles sont **non coplanaires**

4.5 Projeté orthogonal sur un plan

4.5.1 Définition

Définition : Soient $\mathcal{P}$ un plan et M un point de l'espace. On appelle **projeté orthogonal** de M sur $\mathcal{P}$ l'unique point H de $\mathcal{P}$ tel que le vecteur $\overrightarrow{MH}$ soit **normal** au plan $\mathcal{P}$.

Autrement dit, H est le point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite passant par M et de vecteur directeur $\vec{n}$, où $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Théorème 5 : Distance d'un point à un plan :
Soit H le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$. Alors, pour tout point N de $\mathcal{P}$ distinct de H :

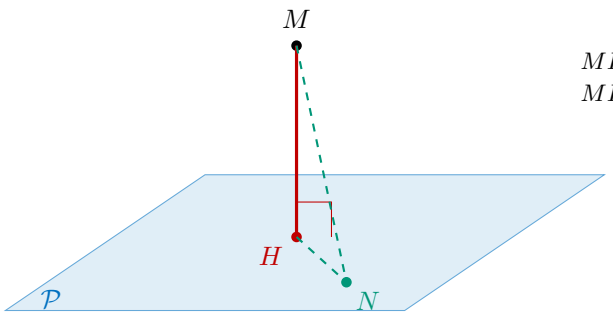
$$MH < MN$$

La longueur MH est donc la plus courte distance de M au plan : on l'appelle la **distance du point M au plan $\mathcal{P}$**.

∘ Démonstration : Soit N un point de $\mathcal{P}$ distinct de H. Le vecteur $\overrightarrow{HN}$ appartient au plan, tandis que $\overrightarrow{MH}$ lui est normal : ces deux vecteurs sont donc orthogonaux, et le triangle MHN est rectangle en H. Le théorème de Pythagore donne alors :

$$MN^2 = MH^2 + HN^2$$

Comme $N \neq H$, la longueur HN est strictement positive, donc $MN^2 > MH^2$, et par croissance de la fonction racine carrée sur les positifs, $MN > MH$. □



MHN est rectangle en H :
MH est donc le plus court chemin

4.5.2 Méthode de calcul

♡ **Méthode :** Pour déterminer le projeté orthogonal H d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$:

1. On lit un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ du plan.

2. On écrit une représentation paramétrique de la droite Δ passant par M et de vecteur directeur $\vec{n}$.

3. On reporte les expressions de x, y et z dans l'équation de $\mathcal{P}$, ce qui donne la valeur du paramètre.

4. On reporte cette valeur dans la représentation paramétrique pour obtenir les coordonnées de H, puis on calcule MH si la distance est demandée.

Exemple : Déterminons le projeté orthogonal du point $M(4\,;1\,;2)$ sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y - z + 3 = 0$, ainsi que la distance de M à $\mathcal{P}$.

(a) Vecteur normal : on lit directement $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Droite Δ passant par M dirigée par $\vec{n}$:

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

(c) Intersection avec $\mathcal{P}$: on reporte dans l'équation du plan :

$$(4+t) + 2(1+2t) - (2-t) + 3 = 0$$
$$4 + t + 2 + 4t - 2 + t + 3 = 0$$
$$6t + 7 = 0 \iff t = -\frac{7}{6}$$

(d) Coordonnées de H : en reportant cette valeur :

$$H\left(4 - \frac{7}{6} \,;\, 1 - \frac{7}{3} \,;\, 2 + \frac{7}{6}\right) = H\left(\frac{17}{6} \,;\, -\frac{4}{3} \,;\, \frac{19}{6}\right)$$

(e) Distance : le vecteur $\overrightarrow{MH}$ vaut $-\frac{7}{6}\,\vec{n}$, donc :

$$MH = \frac{7}{6} \times \|\vec{n}\| = \frac{7}{6}\sqrt{1+4+1} = \frac{7\sqrt{6}}{6} \approx 2{,}86$$

Remarque : La dernière étape mérite d'être retenue : puisque $\overrightarrow{MH} = t\,\vec{n}$ par construction, il est inutile de recalculer les coordonnées de $\overrightarrow{MH}$ pour obtenir la distance. Il suffit de multiplier $|t|$ par la norme du vecteur normal, ce qui épargne un calcul avec des fractions.

4.5.3 Une formule directe

Théorème 6 : Formule de la distance d'un point à un plan :
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $M(x_M\,;y_M\,;z_M)$ un point de l'espace. Alors :

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|\,ax_M + by_M + cz_M + d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

∘ Démonstration : Reprenons la méthode précédente dans le cas général. Un vecteur normal du plan est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et la droite passant par M dirigée par $\vec{n}$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_M + at \\ y = y_M + bt \\ z = z_M + ct \end{cases}$$

Le projeté orthogonal H correspond à la valeur de t pour laquelle ce point appartient à $\mathcal{P}$:

$$a(x_M + at) + b(y_M + bt) + c(z_M + ct) + d = 0$$
$$\underbrace{ax_M + by_M + cz_M + d}_{\text{on note ce nombre } K} + (a^2+b^2+c^2)t = 0$$

d'où, puisque a, b et c ne sont pas tous nuls :

$$t = \frac{-K}{a^2+b^2+c^2}$$

Or $\overrightarrow{MH} = t\,\vec{n}$, donc $MH = |t| \times \|\vec{n}\|$. Comme $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$:

$$MH = \frac{|K|}{a^2+b^2+c^2} \times \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \frac{|K|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ce qui est exactement la formule annoncée. □

Exemple : Vérifions cette formule sur l'exemple précédent, avec $M(4\,;1\,;2)$ et le plan d'équation $x+2y-z+3=0$:

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|4+2\times 1-2+3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{|7|}{\sqrt{6}} = \frac{7}{\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{6} \approx 2{,}86$$

On retrouve bien la valeur obtenue par la méthode complète.

Remarque : Cette formule est d'un usage très commode, mais elle ne donne que la *distance* : elle ne fournit pas les coordonnées du projeté orthogonal H. Lorsqu'un énoncé demande ce point, il faut donc revenir à la méthode en quatre étapes. En revanche, si seule la distance est demandée, la formule permet de conclure en une ligne.

Notez enfin la valeur absolue au numérateur : elle est indispensable, une distance étant toujours positive. Le signe de $ax_M + by_M + cz_M + d$ indique quant à lui de quel côté du plan se trouve le point.