Chapitre 5

Fonctions exponentielle et logarithme

5.1 Introduction historique

> *Admirable instrument, qui, en réduisant à quelques heures le travail de plusieurs mois, double si l'on peut dire la vie des astronomes, et leur épargne les erreurs et les dégoûts inséparables des longs calculs.*
>
> Pierre-Simon de Laplace - *Exposition du système du monde* (1795)

L'ordre dans lequel vous découvrez ces deux fonctions est l'inverse exact de celui de l'histoire. Vous avez rencontré l'exponentielle en Première, et vous en déduirez le logarithme dans quelques pages ; les mathématiciens, eux, ont inventé le logarithme d'abord, et il leur a fallu plus d'un siècle pour comprendre que sa réciproque méritait un nom. La raison de cette inversion est simple : le logarithme est né d'un besoin pratique très urgent, tandis que l'exponentielle est née d'une réflexion théorique.

5.1.1 Un outil pour calculer

À la fin du XVI^{e} siècle, les astronomes et les navigateurs passent l'essentiel de leur temps à multiplier des nombres à sept ou huit chiffres. C'est long, et surtout c'est une source d'erreurs considérable. L'écossais **John Napier**, en français *Neper*, cherche pendant vingt ans un moyen de *remplacer les multiplications par des additions*, et publie en 1614 ses tables de logarithmes. Le mot qu'il forge réunit deux racines grecques : *logos*, le rapport, et *arithmos*, le nombre.

Le principe est celui que vous démontrerez en section 5.3 : à chaque nombre on associe une étiquette telle que l'étiquette d'un produit soit la somme des étiquettes. Il suffit alors de lire deux valeurs dans une table, de les additionner, puis de lire le résultat à l'envers. L'anglais **Henry Briggs** adapte peu après l'idée en base 10, plus commode pour le calcul décimal : c'est le logarithme dit *décimal*, que nous retrouverons en section 5.4. Pendant trois siècles et demi, jusqu'à l'arrivée des calculatrices électroniques, les tables de logarithmes et la règle à calcul qui en dérive resteront l'outil de calcul de tous les ingénieurs.

5.1.2 Euler et le nombre e

Restait à comprendre ce que ces tables cachaient. Au XVII^{e} siècle, on remarque que l'aire sous l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ se comporte exactement comme un logarithme, et que certaines suites d'intérêts composés convergent vers une constante mystérieuse, voisine de 2,718.

C'est **Leonhard Euler** qui, dans son *Introductio in analysin infinitorum* de 1748, met de l'ordre dans tout cela. Il choisit la lettre e pour désigner cette constante, définit la fonction exponentielle comme somme d'une série, et surtout inverse le point de vue : ce n'est plus l'exponentielle qui découle du logarithme, mais le logarithme qui est la *réciproque* de l'exponentielle. C'est cette présentation, vieille de moins de trois siècles, que nous adopterons.



5.2 Fonction exponentielle

5.2.1 Rappels de Première

Définition : On appelle **fonction exponentielle** l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f' = f \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1$$

Elle est notée $x \mapsto \mathrm{e}^x$, et le nombre $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1 \approx 2{,}718$ est appelé **constante de Néper**.

Proposition 1 (propriétés algébriques) : Pour tous réels x et y et tout entier relatif n :

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y \quad ; \quad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \quad ; \quad \mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} \quad ; \quad (\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$$

De plus, pour tout réel x : $\mathrm{e}^x > 0$, et la fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2 (dérivées) : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$$

Exemple : Dérivons $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2+3x}$. On pose $u(x) = -x^2 + 3x$, d'où $u'(x) = -2x + 3$ et :

$$f'(x) = (-2x+3)\,\mathrm{e}^{-x^2+3x}$$

f' a le signe de $-2x + 3$: la fonction f est croissante sur $\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

5.2.2 Limites

Proposition 3 (limites de référence) : On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

La droite d'équation $y = 0$ est donc **asymptote horizontale** à la courbe en $-\infty$.

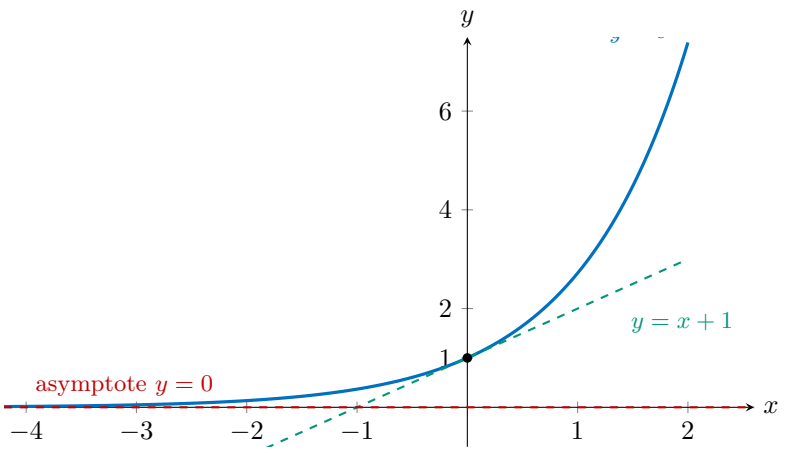
∘ Démonstration : Démontrons d'abord une inégalité utile : pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$. Posons en effet $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$. Alors $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$, qui est négatif pour $x \leqslant 0$ et positif pour $x \geqslant 0$: la fonction g admet donc un minimum en 0, valant $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$. Ainsi $g \geqslant 0$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.

Comme $x + 1$ tend vers $+\infty$, le théorème de comparaison du chapitre 3 donne $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Pour la seconde limite, on pose $X = -x$. Lorsque x tend vers $-\infty$, X tend vers $+\infty$, et :

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-X} = \frac{1}{\mathrm{e}^X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$$

□



La courbe reste toujours au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, d'équation $y = x + 1$: c'est l'inégalité démontrée ci-dessus, et c'est elle qui force l'exponentielle à croître vers $+\infty$.

5.2.3 Croissances comparées

Théorème 1 : Croissances comparées :
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n\,\mathrm{e}^x = 0$$

Remarque : Ces deux limites lèvent des formes indéterminées, respectivement $\frac{\infty}{\infty}$ et $0\times\infty$. Elles s'énoncent d'une phrase, qu'il faut retenir : **l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x**. Aussi grand que soit l'exposant n, la croissance de e^x finit toujours par dépasser celle de x^n.

∘ Démonstration : Traitons le cas $n = 1$. Posons $h(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$ pour $x \geqslant 0$. Alors :

$$h'(x) = \mathrm{e}^x - x \geqslant x + 1 - x = 1 > 0$$

d'après l'inégalité démontrée plus haut. La fonction h est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$, et comme $h(0) = 1 > 0$, elle reste positive. On en déduit que pour tout $x > 0$:

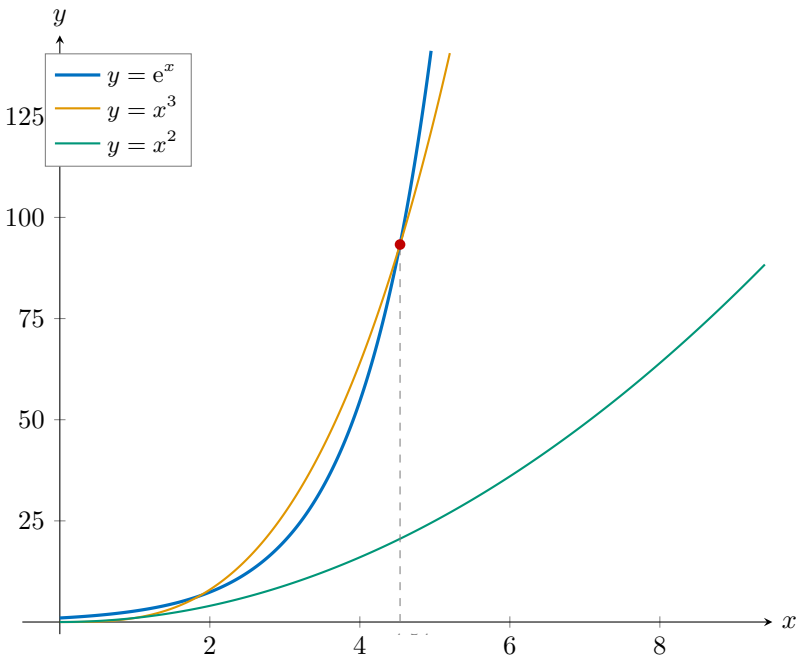
$$\mathrm{e}^x \geqslant \frac{x^2}{2} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{e}^x}{x} \geqslant \frac{x}{2}$$

Or $\frac{x}{2}$ tend vers $+\infty$: par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

Pour la seconde limite avec $n = 1$, on pose $X = -x$, qui tend vers $+\infty$:

$$x\,\mathrm{e}^x = -X\,\mathrm{e}^{-X} = -\frac{X}{\mathrm{e}^X} = \frac{-1}{\frac{\mathrm{e}^X}{X}} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$$

puisque le dénominateur tend vers $+\infty$. Le cas général se démontre de façon analogue. □



Sur cette figure, x^3 domine d'abord l'exponentielle, mais l'ordre finit par s'inverser : à partir de $x \approx 4{,}54$, la courbe de e^x passe définitivement au-dessus et ne sera plus jamais rattrapée.

Exemple : Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - x^3}{x^2+1}$. Numérateur et dénominateur tendent vers $+\infty$. Factorisons par e^x au numérateur :

$$\frac{e^x - x^3}{x^2+1} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1 - \frac{x^3}{e^x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Or $\frac{x^3}{e^x}$ tend vers 0 par croissance comparée, donc la seconde fraction tend vers 1, tandis que $\frac{e^x}{x^2}$ tend vers $+\infty$. Par produit, la limite cherchée vaut $+\infty$.

Proposition 4 : On a également :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

∘ Démonstration : Ce quotient n'est autre que le taux de variation de la fonction exponentielle entre 0 et x :

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0}$$

Sa limite en 0 est donc, par définition, le nombre dérivé de l'exponentielle en 0, qui vaut $e^0 = 1$. □

5.3 Fonction logarithme népérien

5.3.1 Définition

Définition : La fonction exponentielle étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0\,;+\infty[$, tout réel $a > 0$ admet un unique antécédent par elle, d'après le théorème de la bijection du chapitre 3.

On appelle **fonction logarithme népérien**, notée ln, la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ qui à tout réel $a > 0$ associe cet unique antécédent. Autrement dit, pour tout $x > 0$ et tout réel y :

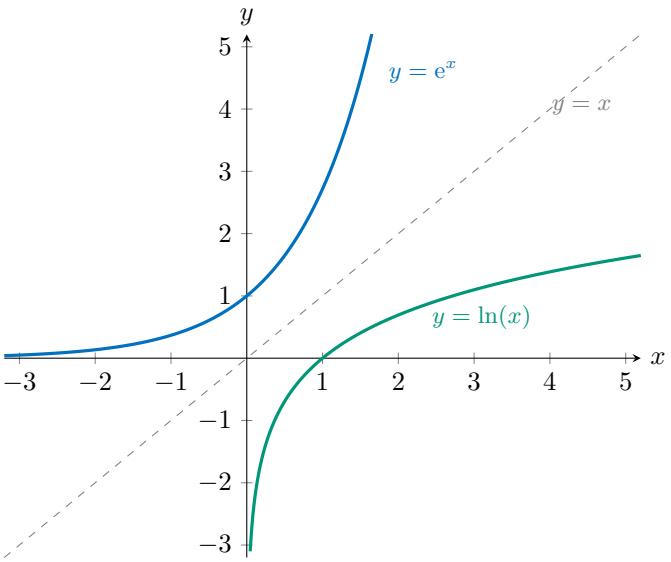
$$\ln(x) = y \iff e^y = x$$

Proposition 5 : Pour tout réel $x > 0$ et tout réel y :

$$e^{\ln(x)} = x \quad \text{et} \quad \ln\left(e^y\right) = y$$

En particulier $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$, et $\ln(x)$ n'existe pas pour $x \leqslant 0$.

Remarque : Ces deux fonctions se *défont* donc l'une l'autre. Graphiquement, cela se traduit par le fait que leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$, comme le montre la figure ci-dessous.



5.3.2 Propriétés algébriques

Théorème 2 : Propriétés algébriques du logarithme :
Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, et tout entier relatif n :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) \quad ; \quad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln\left(a^n\right) = n\ln(a) \quad ; \quad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

∘ Démonstration : Démontrons la première égalité, dont toutes les autres découlent. Posons $x = \ln(a)$ et $y = \ln(b)$, de sorte que $a = \mathrm{e}^x$ et $b = \mathrm{e}^y$. Alors :

$$a \times b = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$$

En appliquant le logarithme à cette égalité :

$$\ln(a \times b) = \ln\left(\mathrm{e}^{x+y}\right) = x + y = \ln(a) + \ln(b)$$

□

Remarque : C'est exactement la propriété recherchée par Neper : elle transforme un *produit* en une *somme*. Avant les calculatrices, multiplier deux grands nombres consistait donc à lire leurs logarithmes dans une table, à additionner ces deux valeurs, puis à effectuer la lecture inverse.

Exemple : Simplifions $A = \ln(8) - 3\ln(2)$. Comme $8 = 2^3$:

$$A = \ln\left(2^3\right) - 3\ln(2) = 3\ln(2) - 3\ln(2) = 0$$

Résolvons ensuite l'équation $\ln(x) + \ln(x-3) = \ln(4)$. La condition d'existence impose $x > 0$ *et* $x - 3 > 0$, soit $x > 3$. L'équation devient alors :

$$\ln\big(x(x-3)\big) = \ln(4) \iff x^2 - 3x = 4 \iff x^2 - 3x - 4 = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = 9 + 16 = 25$, d'où les solutions $x = -1$ et $x = 4$. Seule $x = 4$ convient, la valeur -1 ne respectant pas la condition d'existence.

5.3.3 Étude de la fonction

Proposition 6 : La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et pour tout $x > 0$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et, si } u > 0 \text{ est dérivable :} \qquad \big(\ln(u)\big)' = \frac{u'}{u}$$

Elle est donc **strictement croissante** sur $]0\,;+\infty[$. De plus :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

Remarque : La croissance stricte fournit un outil de résolution essentiel : pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$,

$$\ln(a) = \ln(b) \iff a = b \qquad \text{et} \qquad \ln(a) < \ln(b) \iff a < b$$

Le logarithme conserve donc l'ordre, ce qui permet de « l'appliquer » aux deux membres d'une inéquation sans en changer le sens. C'est faux pour beaucoup d'autres fonctions, et c'est ici que réside l'intérêt de la stricte monotonie.

Exemple : Résolvons l'inéquation $0{,}9^n \leqslant 0{,}01$, d'inconnue l'entier n. Les deux membres étant strictement positifs, on peut appliquer le logarithme sans changer le sens :

$$\ln\left(0{,}9^n\right) \leqslant \ln(0{,}01) \iff n\ln(0{,}9) \leqslant \ln(0{,}01)$$

Attention : $\ln(0{,}9)$ est *négatif*, puisque $0{,}9 < 1$. Diviser par ce nombre change donc le sens de l'inégalité :

$$n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}9)} \approx 43{,}7$$

Le plus petit entier convenant est donc $n = 44$.

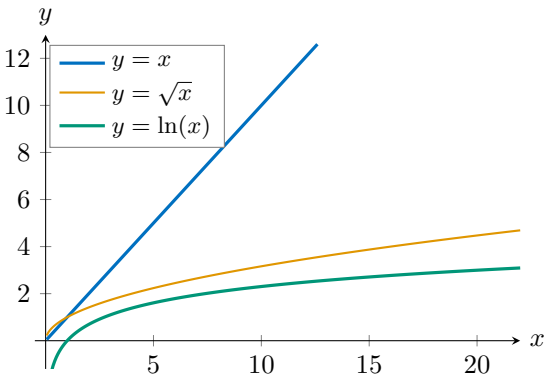
Proposition 7 (croissances comparées) : On a :

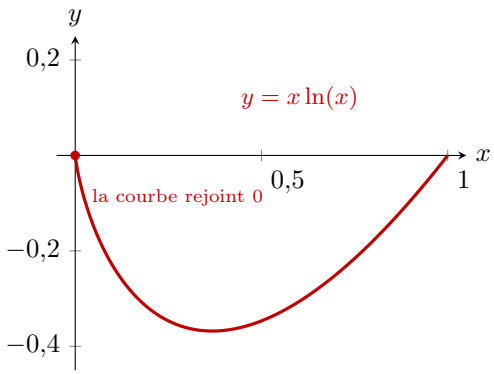
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

∘ Démonstration : Pour la première, posons $X = \ln(x)$, de sorte que $x = \mathrm{e}^X$. Lorsque x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$ également, et :

$$\frac{\ln(x)}{x} = \frac{X}{\mathrm{e}^X} = \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^X}{X}} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$$

d'après le théorème 1. La deuxième s'obtient de la même façon en posant $X = -\ln(x)$, et la troisième est le taux de variation de ln en 1. □





À gauche, la courbe du logarithme reste très en dessous de celle de $\sqrt{x}$, elle-même écrasée par la droite d'équation $y = x$: c'est la traduction graphique de $\frac{\ln(x)}{x} \to 0$, le numérateur devenant négligeable devant le dénominateur. À droite, on observe le second cas : au voisinage de 0, le facteur x tend vers 0 plus vite que $\ln(x)$ ne tend vers $-\infty$, si bien que le produit $x\ln(x)$ revient vers 0.

Remarque : On retient donc la hiérarchie suivante, valable en $+\infty$:

$$\ln(x) \quad \ll \quad x^n \quad \ll \quad \mathrm{e}^x$$

Le logarithme croît plus lentement que n'importe quelle puissance, et l'exponentielle plus vite que n'importe laquelle. C'est cette hiérarchie qui permet de lever la plupart des formes indéterminées de ce chapitre.

5.4 Autres exponentielles et logarithmes

5.4.1 Exponentielle de base a

Définition : Soit a un réel *strictement positif*. On appelle **exponentielle de base a** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$$

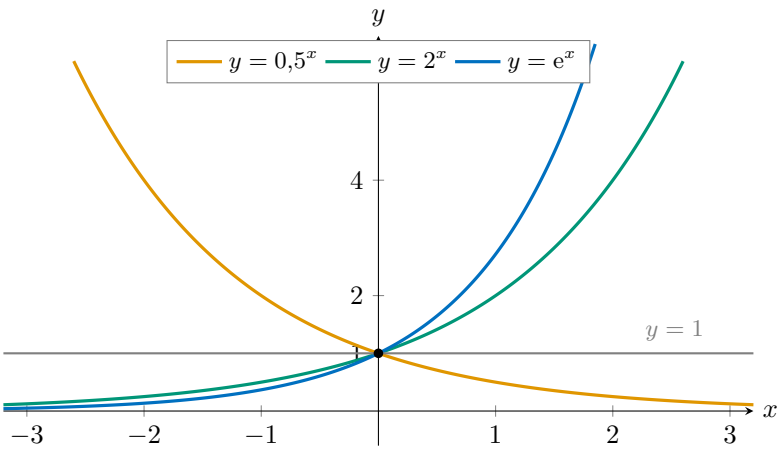
Remarque : Cette définition prolonge à tout exposant réel la notion de puissance connue depuis le collège. On vérifie sans peine qu'elle coïncide avec elle pour les exposants entiers : par exemple $2^3 = \mathrm{e}^{3\ln 2} = \left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^3 = 2^3$. Mais elle donne désormais un sens à des écritures comme $2^{\sqrt{2}}$ ou $10^{0{,}3}$.

Proposition 8 : Soit $a > 0$. La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$(a^x)' = \ln(a)\, a^x$$

Son sens de variation dépend donc de la position de a par rapport à 1 :

- si $a > 1$, alors $\ln(a) > 0$ et la fonction est **strictement croissante** ;
- si $0 < a < 1$, alors $\ln(a) < 0$ et la fonction est **strictement décroissante** ;
- si $a = 1$, la fonction est constante égale à 1.



Toutes ces courbes passent par le point de coordonnées $(0\,;1)$, puisque $a^0 = 1$ quelle que soit la base. Celles dont la base dépasse 1 montent, les autres descendent, et les courbes de 2^x et de $0{,}5^x$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, puisque $0{,}5^x = 2^{-x}$.

5.4.2 Le logarithme décimal

Définition : On appelle **logarithme décimal**, noté log, la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

C'est la réciproque de la fonction $x \mapsto 10^x$: pour tout $x > 0$ et tout réel y,

$$\log(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad 10^y = x$$

Proposition 9 : Le logarithme décimal possède les mêmes propriétés algébriques que le logarithme népérien :

$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b) \quad ; \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b) \quad ; \quad \log\left(a^n\right) = n\log(a)$$

De plus, pour tout entier relatif n : $\log\left(10^n\right) = n$.

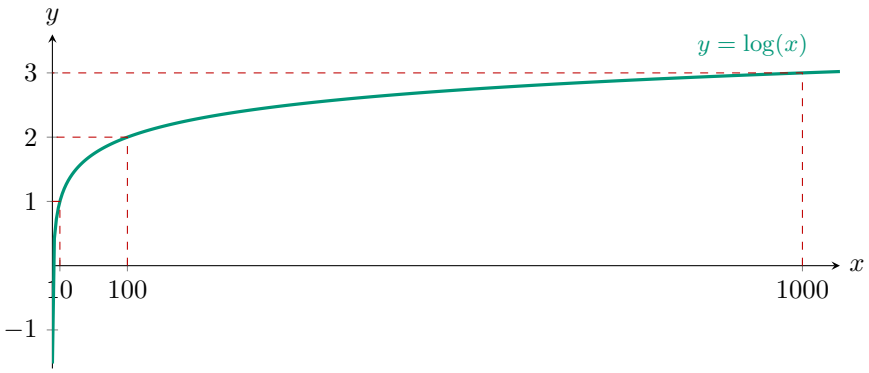
Remarque : C'est cette dernière égalité qui fait tout l'intérêt de la base 10 : le logarithme décimal d'une puissance de dix se lit immédiatement. Ainsi $\log(1000) = 3$ et $\log(0{,}01) = -2$. Plus généralement, $\log(x)$ indique l'*ordre de grandeur* de x, c'est-à-dire le nombre de chiffres qu'il comporte.

Exemple : Combien de chiffres compte le nombre 2^{100} ?

Un entier N possède p chiffres lorsque $10^{p-1} \leqslant N < 10^p$, c'est-à-dire lorsque $p-1 \leqslant \log(N) < p$. Or :

$$\log\left(2^{100}\right) = 100\log(2) \approx 100 \times 0{,}30103 \approx 30{,}1$$

On en déduit $p - 1 = 30$, donc $p = 31$: le nombre 2^{100} s'écrit avec 31 chiffres, ce qu'aucune calculatrice ordinaire ne saurait afficher directement.



La courbe illustre la lenteur du logarithme : il faut multiplier x par 10 pour que $\log(x)$ augmente d'une seule unité. C'est précisément ce qui rend cette fonction commode pour représenter des grandeurs qui varient sur d'énormes plages de valeurs.

Remarque : De nombreuses échelles scientifiques sont logarithmiques, pour cette raison exactement :

- le **pH** d'une solution vaut $-\log([H^+])$, où la concentration s'exprime en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$;
- le niveau sonore en **décibels** vaut $10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, où I_0 est un seuil de référence ;
- la **magnitude** d'un séisme sur l'échelle de Richter est également logarithmique.

Dans les trois cas, augmenter d'une unité revient à multiplier la grandeur physique par dix : un séisme de magnitude 7 libère dix fois plus d'énergie qu'un séisme de magnitude 6.

Exemple : Une solution a une concentration en ions H^+ de $2{,}5 \times 10^{-4}$ $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Son pH vaut :

$$\text{pH} = -\log\left(2{,}5 \times 10^{-4}\right) = -\left(\log(2{,}5) + \log\left(10^{-4}\right)\right) = -\log(2{,}5) + 4 \approx 3{,}6$$

La solution est donc acide. Remarquez comment la propriété du produit a permis de séparer le facteur de la puissance de dix, transformant le calcul en une simple soustraction.