Chapitre 6

Calcul intégral

6.1 Introduction historique

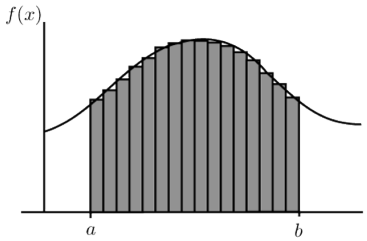
Il sera utile d'écrire $\int$ *pour* omnia*, c'est-à-dire pour la somme.*

Gottfried Wilhelm Leibniz - Manuscrit du 29 octobre 1675

Suite à la trouvaille merveilleuse du calcul infinitésimal, un mystère majeur obsédant les grecs a pu être levé : la quadrature du cercle. Ce problème antique est simple à poser : connaissant un disque, quel est la longueur du côté d'un carré de même aire ? Ainsi, quelle est simplement l'aire de ce disque... Calculer des aires courbes, voilà la puissance de l'Intégration, qui repose sur une idée simple : un cercle, c'est un polygone composé d'une infinité de sommets.

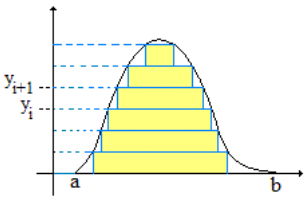
6.1.1 Intégration de Riemann

Mathématicien français le plus prolifique de l'histoire, **Augustin Louis Cauchy** (1789-1857) est le premier à poser une définition claire de l'intégration. Nommée d'après le mathématicien allemand **Bernhard Riemann** (1826-1866), qui en terminera l'élaboration telle qu'on l'apprend aujourd'hui, cette vision de l'aire sous les courbes l'approche comme étant la somme infinie de rectangles verticaux qui viendrait emplir cette surface, au point qu'on puisse confondre cette somme d'aires et l'aire véritable.



6.1.2 Intégration de Lebesgue

Ainsi, si il est possible de calculer l'aire sous une courbe en subdivisant cette surface en une infinité de rectangle, pourquoi ne pas étendre cette idée aux volumes, et mêmes au dimensions supérieures ? En généralisant cette intégration en 1902, (en particulier en ne considérant plus des rectangles verticaux mais une subdivision de l'espace en pavés) dans une dissertation appelée *Intégrale, longueur, aire*, le mathématicien français **Henri-Léon Lebesgue** (1875-1941) eu un impact considérable sur les mathématiques modernes, permettant des découvertes dans des domaines surprenants, comme en probabilités...



6.2 Primitives d'une fonction

6.2.1 Définition

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F *dérivable* sur I telle que :

$$F' = f \qquad \text{sur } I$$

Exemple : La fonction $F : x \mapsto x^3 + 5$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 3x^2$, puisque $F'(x) = 3x^2$.

Mais $G : x \mapsto x^3 - 7$ en est une autre, tout comme $x \mapsto x^3$: une fonction admet donc *plusieurs* primitives.

Théorème 1 : Existence et description des primitives :
Soit f une fonction *continue* sur un intervalle I.

- f admet des primitives sur I.
- Si F est l'une d'elles, alors les primitives de f sur I sont exactement les fonctions de la forme $F + k$, où k est une constante réelle.
- Pour tout $x_0 \in I$ et tout réel y_0, il existe une *unique* primitive F de f vérifiant $F(x_0) = y_0$.

∘ Démonstration : L'existence est pour l'instant admise : elle sera démontrée en section 6.3, comme conséquence du théorème fondamental de l'analyse. Démontrons le deuxième point.

Si F est une primitive de f et k une constante, alors $(F+k)' = F' = f$: la fonction $F+k$ est bien une primitive.

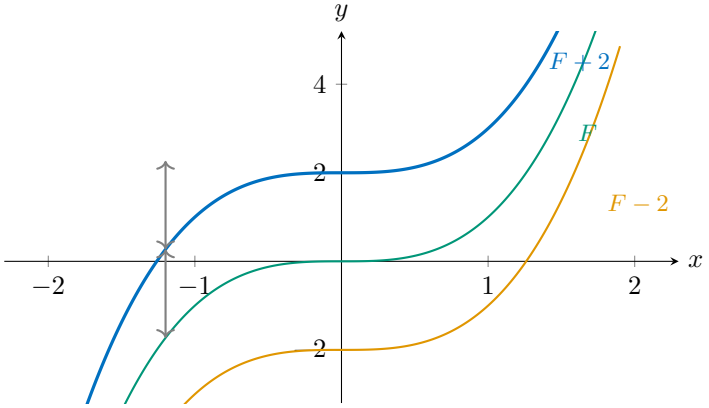
Réciproquement, soient F et G deux primitives de f sur I. Posons $H = G - F$. Alors :

$$H' = G' - F' = f - f = 0 \quad \text{sur } I$$

Une fonction de dérivée nulle sur un *intervalle* étant constante, il existe un réel k tel que $H = k$, c'est-à-dire $G = F + k$.

Pour le troisième point, la condition $F(x_0) + k = y_0$ détermine la constante de façon unique : $k = y_0 - F(x_0)$. □

Remarque : Graphiquement, toutes les primitives d'une même fonction se déduisent donc les unes des autres par **translation verticale**. Imposer une condition du type $F(x_0) = y_0$ revient à choisir laquelle de ces courbes passe par un point donné.



6.2.2 Primitives usuelles

Proposition 1 : Les fonctions suivantes admettent les primitives indiquées, sur tout intervalle où elles sont définies :

$f(x)$	$F(x)$	Forme	Primitive
k	kx	$u'\,u^n \quad (n \neq -1)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$u'\,\mathrm{e}^u$	e^u
e^x	e^x	$\dfrac{u'}{u} \quad (u > 0)$	$\ln(u)$
$\dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$	$\ln(x)$	$u'\,(v \circ u)'$	(composée)

Remarque : Ce tableau n'est autre que celui des dérivées, lu *de droite à gauche*. Rechercher une primitive, c'est donc se demander : « de quelle fonction ceci est-il la dérivée ? ». Contrairement à la dérivation, l'opération n'est pas automatique, et il faut souvent reconnaître une forme.

Exemple : Déterminons une primitive de $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$, qui est strictement positive. Une primitive est donc :

$$F(x) = \ln\left(x^2+1\right)$$

De même, $g(x) = 3x^2\,\mathrm{e}^{x^3}$ est de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^3$, d'où $G(x) = \mathrm{e}^{x^3}$.

♡ **Méthode :** Pour déterminer la primitive F de f vérifiant une condition $F(x_0) = y_0$:

1. On détermine une primitive F_0 de f, à l'aide du tableau.
2. On écrit la forme générale $F = F_0 + k$.
3. On traduit la condition $F(x_0) = y_0$, ce qui donne une équation d'inconnue k.

Exemple : Cherchons la primitive F de $f(x) = 3x^2 - 4x$ vérifiant $F(1) = 5$.

Une primitive est $F_0(x) = x^3 - 2x^2$, donc $F(x) = x^3 - 2x^2 + k$. La condition impose :

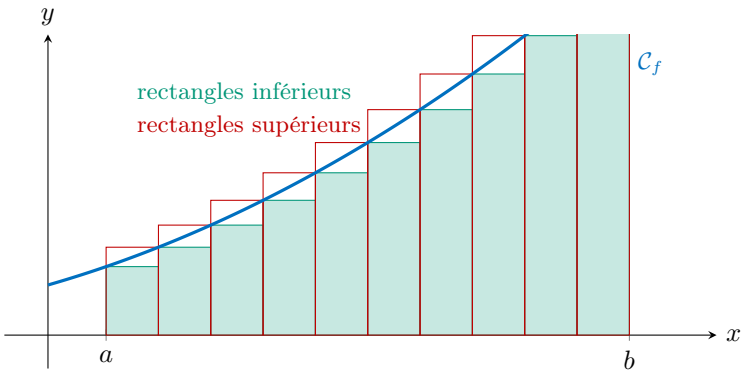
$$1 - 2 + k = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad k = 6$$

La primitive cherchée est donc $F(x) = x^3 - 2x^2 + 6$.

6.3 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

6.3.1 Approche : la méthode des rectangles

Considérons une fonction f continue et *positive* sur un intervalle $[a\,;b]$, et cherchons à mesurer l'aire de la surface située sous sa courbe. Découpons pour cela $[a\,;b]$ en n parties de même longueur $\dfrac{b-a}{n}$, et construisons sur chacune d'elles deux rectangles : l'un de hauteur minimale, contenu dans la surface, l'autre de hauteur maximale, la contenant.



En notant $\mathcal{A}$ l'aire cherchée, on obtient un encadrement, valable pour tout entier n :

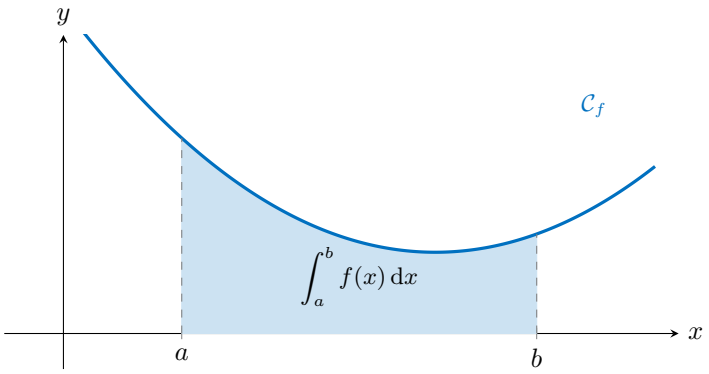
$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right) \leqslant \mathcal{A} \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+(k+1)\,\frac{b-a}{n}\right)$$

Apparaissent ainsi deux suites, l'une croissante et l'autre décroissante, qui encadrent l'aire et se resserrent lorsque n augmente. On démontre — et nous l'admettrons — qu'elles admettent une **limite commune** : c'est cette limite que Riemann prend pour définition de l'aire, et que nous appellerons intégrale. Cet encadrement fournit d'ailleurs, pour n fixé, une méthode d'approximation numérique très simple à programmer.

6.3.2 Définition

Définition : Soit f une fonction continue et **positive** sur un intervalle $[a\,;b]$. On appelle **intégrale de f sur $[a\,;b]$** l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$. On la note :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Remarque : L'**unité d'aire** est l'aire du rectangle construit sur les vecteurs unitaires du repère. Si le repère est gradué en centimètres, une unité d'aire vaut 1 cm^2 ; si l'axe des abscisses est gradué en secondes et celui des ordonnées en mètres par seconde, l'aire s'exprime en mètres, et l'intégrale mesure alors une distance parcourue.

Notons enfin que, par définition même, une fonction positive a une intégrale positive : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. La variable x est par ailleurs **muette**, puisqu'elle disparaît du résultat : on peut tout aussi bien écrire $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

6.3.3 Premières propriétés, lues sur l'aire

Proposition 2 : Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$.

- **Relation de Chasles :** pour tout $c \in [a\,;b]$,

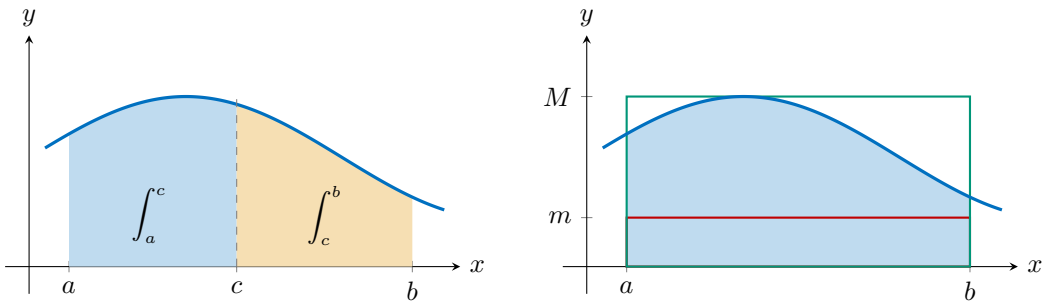
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- **Inégalité de la moyenne :** s'il existe deux réels m et M tels que $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a\,;b]$, alors

$$m\,(b-a) \;\leqslant\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\leqslant\; M\,(b-a)$$

∘ Démonstration : La relation de Chasles découle directement de la définition : la surface située sous la courbe entre a et b se découpe, par la droite d'équation $x = c$, en deux surfaces d'aires respectives $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$.

Pour l'inégalité de la moyenne, la surface sous la courbe contient le rectangle de base $[a\,;b]$ et de hauteur m, et elle est contenue dans celui de même base et de hauteur M. Or l'aire d'un rectangle de base $b-a$ et de hauteur h vaut $h(b-a)$, d'où l'encadrement. □



À gauche, la relation de Chasles n'est que le découpage d'une aire en deux morceaux. À droite, l'aire sous la courbe est prise en tenaille entre les aires de deux rectangles.

6.3.4 Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème 2 : Théorème fondamental de l'analyse :
Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$. Alors la fonction Φ définie sur $[a\,;b]$ par

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur $[a\,;b]$, et sa dérivée est f. Autrement dit, Φ est *la* primitive de f qui s'annule en a.

∘ Démonstration : Supposons f croissante sur $[a\,;b]$, le raisonnement étant analogue dans le cas décroissant, et l'étude pouvant toujours se réduire à un intervalle où f est monotone.

Soient x_0 et x deux réels de $[a\,;b]$ avec $x_0 < x$. Pour tout $t \in [x_0\,;x]$, la croissance de f donne :

$$f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(x)$$

L'inégalité de la moyenne, appliquée sur l'intervalle $[x_0\,;x]$, fournit alors :

$$f(x_0)\,(x-x_0) \;\leqslant\; \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \;\leqslant\; f(x)\,(x-x_0)$$

Or la relation de Chasles permet d'exprimer cette intégrale à l'aide de Φ :

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Phi(x) - \Phi(x_0)\end{aligned}$$

d'où l'encadrement :

$$f(x_0)\,(x-x_0) \;\leqslant\; \Phi(x)-\Phi(x_0) \;\leqslant\; f(x)\,(x-x_0)$$

et, en divisant par $x-x_0$ qui est strictement positif :

$$f(x_0) \;\leqslant\; \frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0} \;\leqslant\; f(x)$$

La fonction f étant continue, $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0. Le théorème des gendarmes donne alors :

$$\Phi'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$$

Enfin $\Phi(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, l'aire d'une surface réduite à un segment étant nulle. □

Remarque : Ce théorème réalise l'unification annoncée en introduction : **dériver l'aire redonne la fonction**. Il justifie au passage l'existence des primitives admise au théorème 1 : toute fonction continue et positive en admet, puisque Φ en est une.

6.3.5 Calcul par les primitives

Théorème 3 : Calcul d'une intégrale :
Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$, et soit F une primitive *quelconque* de f. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

quantité que l'on note également $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

∘ Démonstration : D'après le théorème 2, la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f. Le théorème 1 assure alors qu'il existe une constante k telle que $F = \Phi + k$. On calcule donc :

$$F(b)-F(a) = \big(\Phi(b)+k\big) - \big(\Phi(a)+k\big) = \Phi(b)-\Phi(a)$$

Or $\Phi(a) = 0$ et $\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, d'où le résultat.

La constante k disparaissant dans la soustraction, le résultat ne dépend effectivement pas de la primitive choisie. □

Remarque : Voilà ce qui fait toute la puissance du calcul intégral : une aire, objet géométrique dont la définition passait par une limite de sommes de rectangles, se calcule désormais par une simple soustraction, à condition de savoir remonter une dérivée.

Cette formule permet en outre d'**étendre** la définition de l'intégrale aux fonctions qui ne sont pas positives : pour toute fonction f continue sur un intervalle contenant a et b, on *pose* désormais $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$. L'interprétation en aire n'est alors plus valable telle quelle : lorsque f est négative, l'intégrale vaut l'*opposé* de l'aire du domaine. Cette convention donne également un sens à $\int_b^a f$, qui vaut $-\int_a^b f$.

Exemple : Calculons $\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+1\right)\mathrm{d}x$. Une primitive de $x \mapsto x^2+1$ est $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}+x$, donc :

$$\int_0^2 \left(x^2+1\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^2 = \left(\frac{8}{3}+2\right)-0 = \frac{14}{3}$$

La fonction étant positive sur $[0\,;2]$, ce nombre est bien l'aire, en unités d'aire, du domaine situé sous la parabole.

6.4 Propriétés de l'intégrale

6.4.1 Linéarité

Maintenant que l'intégrale se calcule à l'aide des primitives, ses propriétés se démontrent sans plus aucun recours à la géométrie. Elles restent d'ailleurs valables pour des fonctions de signe quelconque.

Proposition 3 : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b, c trois réels de I et λ un réel. Alors :

$$\int_a^b \big(f+g\big)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad ; \qquad \int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad ; \qquad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

De plus, la relation de Chasles établie en section 6.3 reste vraie sans hypothèse de signe, et quel que soit l'ordre des réels a, b et c.

∘ Démonstration : Toutes ces égalités se démontrent en revenant au théorème 3. Pour la linéarité, il suffit d'observer que si F et G sont des primitives de f et g, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$, donc :

$$\int_a^b \big(f+g\big)(x)\,\mathrm{d}x = \big(F+G\big)(b) - \big(F+G\big)(a) = \big(F(b)-F(a)\big) + \big(G(b)-G(a)\big)$$

Pour la relation de Chasles, en notant F une primitive de f :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big(F(c)-F(a)\big) + \big(F(b)-F(c)\big) = F(b)-F(a)$$

le terme $F(c)$ se simplifiant, ce qui prouve au passage que l'hypothèse $c \in [a\,;b]$ est superflue. □

6.4.2 Positivité et conservation de l'ordre

Proposition 4 : Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$, avec $a \leqslant b$.

- **Positivité :** si $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- **Conservation de l'ordre :** si $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\leqslant\; \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

∘ Démonstration : Pour la positivité, soit F une primitive de f. Comme $F' = f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, la fonction F y est croissante, donc $F(a) \leqslant F(b)$, c'est-à-dire :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \geqslant 0$$

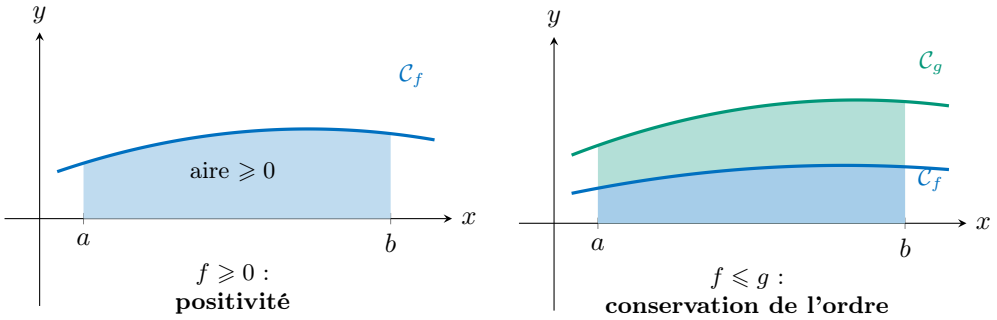
La conservation de l'ordre s'en déduit immédiatement. Si $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$, alors la fonction $g-f$ est continue et positive sur cet intervalle, donc son intégrale est positive d'après le point précédent :

$$\int_a^b \big(g-f\big)(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

La linéarité établie à la proposition 3 permet alors de séparer cette intégrale :

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

d'où l'inégalité annoncée en faisant passer le second terme dans l'autre membre. □



À gauche, l'aire d'une surface étant positive, l'intégrale l'est aussi. À droite, le domaine situé sous $\mathcal{C}_f$ est *contenu* dans celui situé sous $\mathcal{C}_g$: son aire est donc plus petite, ce qui est exactement l'inégalité démontrée.

Remarque : Autrement dit, **l'intégration conserve l'ordre** : si une courbe est au-dessus d'une autre, l'aire sous la première est plus grande. C'est un résultat que la lecture géométrique rend évident lorsque les deux fonctions sont positives, mais la démonstration ci-dessus vaut pour des fonctions de signe quelconque.

Attention en revanche au sens de ces implications, qui ne se réciproquent pas : une intégrale positive ne garantit nullement que la fonction le soit, car les parties situées au-dessus de l'axe peuvent simplement compenser celles situées en dessous.

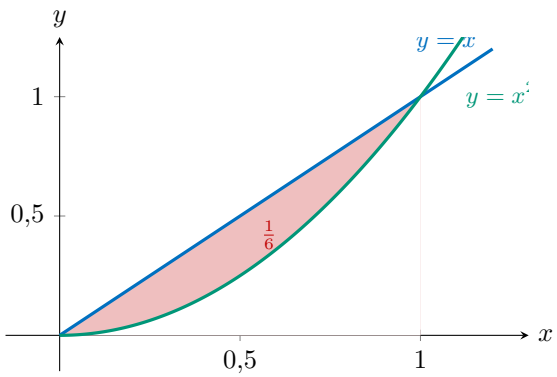
L'ordre des bornes est également essentiel : ces propriétés supposent $a \leqslant b$. Si l'on échangeait les bornes, les deux inégalités changeraient de sens.

Exemple : La comparaison permet d'encadrer une intégrale sans la calculer. Pour tout $x \in [0\,;1]$, on a $x^2 \leqslant x$, donc :

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2}$$

Plus intéressant, l'aire comprise *entre* les deux courbes vaut la différence :

$$\int_0^1 \left(x - x^2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

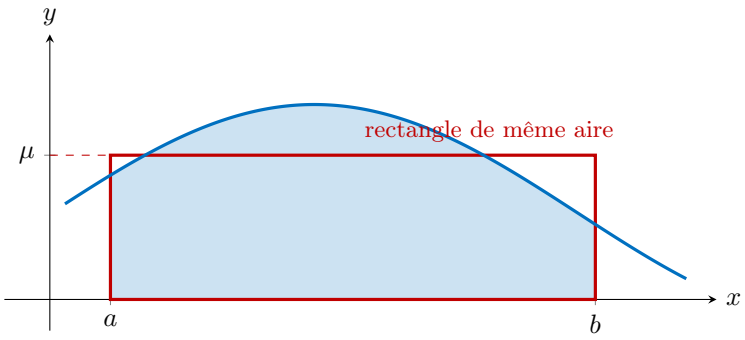


6.4.3 Valeur moyenne

Définition : Soit f continue sur $[a\,;b]$ avec $a < b$. On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a\,;b]$ le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque : Géométriquement, μ est la hauteur du rectangle de base $[a\,;b]$ ayant la *même aire* que le domaine sous la courbe : c'est le niveau auquel il faudrait « araser » la courbe pour obtenir la même quantité.



Exemple : Calculons la valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur $[0\,;3]$:

$$\mu = \frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{3}\times 9 = 3$$

6.5 Intégration par parties

Théorème 4 : Intégration par parties :
Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a\,;b]$, de dérivées continues. Alors :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

∘ Démonstration : La dérivée d'un produit s'écrit :

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \text{donc} \qquad uv' = (uv)' - u'v$$

Toutes ces fonctions étant continues, on peut intégrer cette égalité entre a et b, et utiliser la linéarité :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Or uv est une primitive de $(uv)'$, donc la première intégrale vaut $\big[u(x)v(x)\big]_a^b$, d'où le résultat. □

♡ **Méthode :** Cette formule remplace le calcul d'une intégrale par celui d'une autre, que l'on espère plus simple. Tout repose donc sur le choix de u et de v' :

1. On choisit pour u le facteur qui se simplifie en dérivant — typiquement un polynôme, ou ln.

2. On choisit pour v' le facteur dont on sait trouver une primitive — typiquement une exponentielle.

3. On dresse un petit tableau des quatre fonctions u, u', v, v' avant d'appliquer la formule.

Exemple : Calculons $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Le facteur x se simplifie en dérivant, l'exponentielle s'intègre sans peine :

$u(x) = x$	$v'(x) = \mathrm{e}^x$
$u'(x) = 1$	$v(x) = \mathrm{e}^x$

La formule donne alors :

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[x\,\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^1 = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1$$

Exemple : Calculons $\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$. Ici le produit n'est pas visible : on écrit $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$, et l'on pose $u = \ln$, dont la dérivée est simple, et $v' = 1$:

$u(x) = \ln(x)$	$v'(x) = 1$
$u'(x) = \dfrac{1}{x}$	$v(x) = x$

d'où :

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln(x)\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \times x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \Big[x\Big]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1$$

Remarque : Ce dernier exemple est à retenir : c'est ainsi que l'on obtient une primitive du logarithme, à savoir $x \mapsto x\ln(x) - x$, qui ne figure dans aucun tableau. L'intégration par parties permet donc parfois de découvrir des primitives que l'on ne sait pas deviner.

Un mauvais choix de u et v' conduit en revanche à une intégrale plus compliquée que celle de départ : si le calcul se complique, c'est souvent qu'il faut échanger les deux rôles.