Chapitre 7

Dénombrement

7.1 Introduction historique

> *La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence.*
>
> Pierre-Simon de Laplace - *Essai philosophique sur les probabilités* (1814)

Compter des objets que l'on peut aligner devant soi ne pose aucune difficulté. Mais comment compter les mains possibles à un jeu de cartes, les codes d'un cadenas, ou les trajets d'un livreur ? Ces collections sont bien trop vastes pour être énumérées, et pourtant leur nombre s'obtient souvent en quelques lignes. Tel est l'objet du **dénombrement** : compter sans énumérer.

7.1.1 Compter sans énumérer

Le besoin est ancien. Vers le III^{e} siècle av. J.-C., le grammairien indien **Pingala** dénombre les rythmes poétiques formés de syllabes longues et brèves, et fait apparaître à cette occasion les premiers coefficients binomiaux. Au VIII^{e} siècle, le linguiste arabe **al-Khalil** énumère les mots possibles d'une langue à partir de son alphabet. En Chine, le triangle des coefficients est connu dès le XI^{e} siècle, bien avant Pascal.

Ce qui manque à tous ces travaux, c'est l'unité : chaque problème reçoit sa solution propre, sans principe commun. Il faudra attendre le calcul des probabilités pour que le dénombrement devienne une discipline.

7.1.2 De l'art de conjecturer

C'est en effet la correspondance de 1654 entre **Pascal** et **Fermat**, déjà rencontrée au chapitre 2, qui donne l'impulsion décisive : évaluer une probabilité en situation d'équiprobabilité, c'est compter des cas favorables et des cas possibles. Le dénombrement devient alors un outil indispensable.

Jacques Bernoulli en fait la synthèse dans son *Ars conjectandi*, publié en 1713 : la deuxième partie de l'ouvrage, entièrement consacrée aux permutations et aux combinaisons, fonde ce que l'on appelle aujourd'hui l'**analyse combinatoire**. Les quelques principes de ce chapitre y sont déjà tous présents, et ce sont eux qui permettent aujourd'hui de compter les configurations d'une molécule, les clés d'un chiffrement ou les états d'un réseau.



7.2 Principes de base

7.2.1 Cardinal d'un ensemble fini

Définition : Soit E un ensemble **fini**. On appelle **cardinal** de E, noté $\text{Card}(E)$, le nombre d'éléments qu'il contient.

Un ensemble est dit **fini** lorsqu'il possède un nombre entier d'éléments. On note $\varnothing$ l'**ensemble vide**, de cardinal 0.

Exemple : Si $E = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ est l'ensemble des faces d'un dé, alors $\text{Card}(E) = 6$.

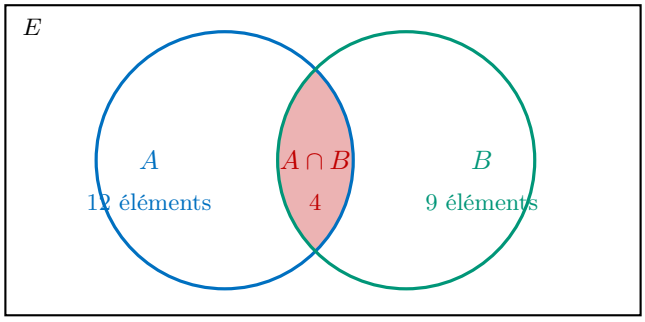
Si A désigne l'ensemble des lettres de l'alphabet français, $\text{Card}(A) = 26$.

Proposition 1 (principe additif) : Soient A et B deux ensembles finis. Alors :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

En particulier, si A et B sont **disjoints**, c'est-à-dire si $A \cap B = \varnothing$, alors $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.

∘ Démonstration : En additionnant $\text{Card}(A)$ et $\text{Card}(B)$, chaque élément situé dans les deux ensembles à la fois est compté *deux* fois : une fois dans A, une fois dans B. Il faut donc retrancher une fois le nombre de ces éléments, qui est exactement $\text{Card}(A \cap B)$. □



$$\text{Card}(A \cup B) = 16 + 13 - 4 = 25$$

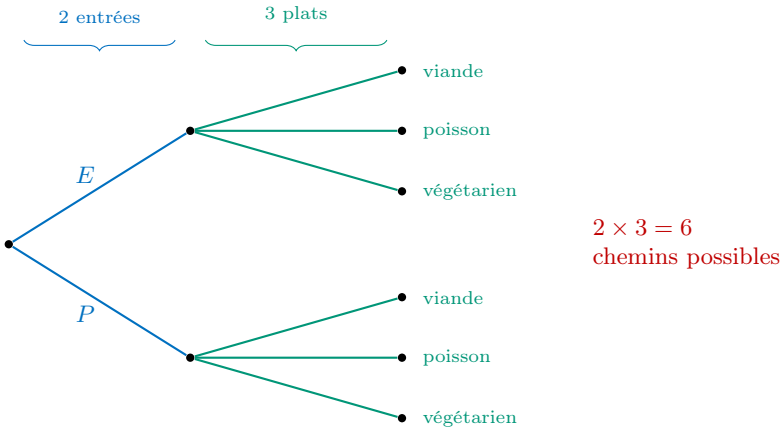
Sur cette figure, A compte 16 éléments et B en compte 13, dont 4 leur sont communs. Additionner 16 et 13 compterait donc deux fois ces quatre éléments : la réunion n'en contient que 25.

7.2.2 Le principe multiplicatif

Théorème 1 : Principe multiplicatif :
Si une situation comporte p étapes successives, offrant respectivement n_1, n_2, …, n_p choix possibles, alors le nombre total de résultats est :

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$$

Remarque : C'est le principe le plus utilisé de tout le chapitre, et il se visualise sur un **arbre** : chaque étape multiplie le nombre de branches. Le nombre total de résultats est le nombre de *chemins* complets de cet arbre.



Exemple : Un restaurant propose 2 entrées, 3 plats et 4 desserts. Le nombre de menus complets possibles est :

$$2 \times 3 \times 4 = 24$$

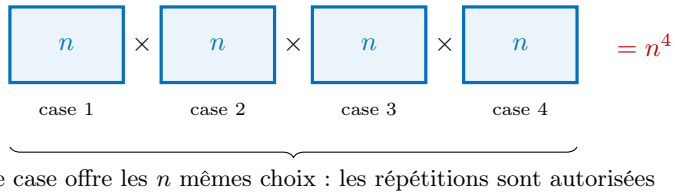
7.2.3 Listes et p-uplets

Définition : Soit E un ensemble fini de cardinal n, et p un entier naturel non nul. On appelle **p-uplet** (ou **p-liste**) de E toute suite ordonnée de p éléments de E, chacun pouvant être répété.

Proposition 2 : Le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments est :

$$n^p$$

∘ Démonstration : Construire un p-uplet revient à remplir p cases successives, et chacune peut recevoir n'importe lequel des n éléments, indépendamment des autres. Le principe multiplicatif donne donc $n \times n \times \cdots \times n = n^p$. □



Exemple : Un code d'accès est formé de 4 chiffres, chacun pouvant être répété. Il s'agit donc d'un 4-uplet de l'ensemble $\{0\,;1\,;\ldots\,;9\}$, qui compte 10 éléments. Le nombre de codes possibles est :

$$10^4 = 10\,000$$

7.3 Arrangements et combinaisons

7.3.1 Permutations

Définition : Soit E un ensemble fini de cardinal n. On appelle **permutation** de E tout classement ordonné de *tous* ses éléments.

Proposition 3 : Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

nombre appelé **factorielle de n**. Par convention, $0! = 1$.

◦ Démonstration : Pour la première place, on dispose de n éléments. Cet élément étant utilisé, il n'en reste que $n-1$ pour la deuxième place, puis $n-2$ pour la troisième, et ainsi de suite jusqu'à la dernière place, où un seul élément reste disponible. Le principe multiplicatif donne :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = n!$$

□

Exemple : De combien de façons peut-on ranger 5 livres différents sur une étagère ?

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

7.3.2 Arrangements

Définition : Soient n et p deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. On appelle **arrangement** de p éléments d'un ensemble à n éléments toute suite **ordonnée** de p éléments **distincts** de cet ensemble.

Proposition 4 : Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

◦ Démonstration : Le raisonnement est celui des permutations, mais interrompu après p places : il y a n choix pour la première, $n-1$ pour la deuxième, et ainsi de suite jusqu'à la p-ième, pour laquelle il reste $n-p+1$ possibilités. Ce produit de p facteurs consécutifs s'écrit aussi comme un quotient de factorielles, les facteurs de 1 à $n-p$ se simplifiant. □

$$\underbrace{\boxed{n} \times \boxed{n-1} \times \boxed{n-2} \quad \cdots \quad \boxed{n-p+1}}_{p \text{ cases, et un choix de moins à chaque étape : pas de répétition possible}}$$

Exemple : Dans une course de 18 chevaux, combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre ? Il s'agit de choisir 3 chevaux distincts, l'ordre comptant :

$$A_{18}^3 = 18 \times 17 \times 16 = 4896$$

7.3.3 Combinaisons

Définition : Soient n et p deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. On appelle **combinaison** de p éléments d'un ensemble à n éléments toute partie de p éléments **distincts**, **sans tenir compte de l'ordre**.

Leur nombre est noté $\binom{n}{p}$, et se lit « p **parmi** n ».

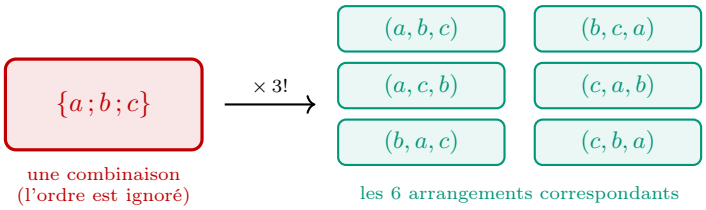
Théorème 2 : Nombre de combinaisons :
Pour tous entiers n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$:

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

◦ Démonstration : Comptons les arrangements de deux façons. Se donner un arrangement de p éléments, c'est d'abord choisir *quels* éléments retenir, ce qui donne $\binom{n}{p}$ possibilités, puis choisir dans quel *ordre* les ranger, ce qui donne $p!$ possibilités. Le principe multiplicatif donne donc :

$$A_n^p = \binom{n}{p} \times p!$$

Il ne reste qu'à diviser par $p!$, puis à remplacer A_n^p par son expression. □



Une même combinaison engendre donc $3! = 6$ arrangements différents : c'est exactement le facteur par lequel il faut diviser pour passer des uns à l'autre.

Remarque : Ces nombres $\binom{n}{p}$ sont les **coefficients binomiaux** rencontrés au chapitre 2 à propos de la loi binomiale. Le lien est direct : dans un schéma de Bernoulli, choisir les p épreuves qui seront des succès, c'est exactement choisir une partie de p éléments parmi n.

Proposition 5 : Pour tous entiers n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{1} = n \quad ; \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \quad \text{(relation de Pascal)}$$

Exemple : Un comité de 3 personnes doit être formé parmi 30 candidats. L'ordre n'ayant aucune importance, il s'agit d'une combinaison :

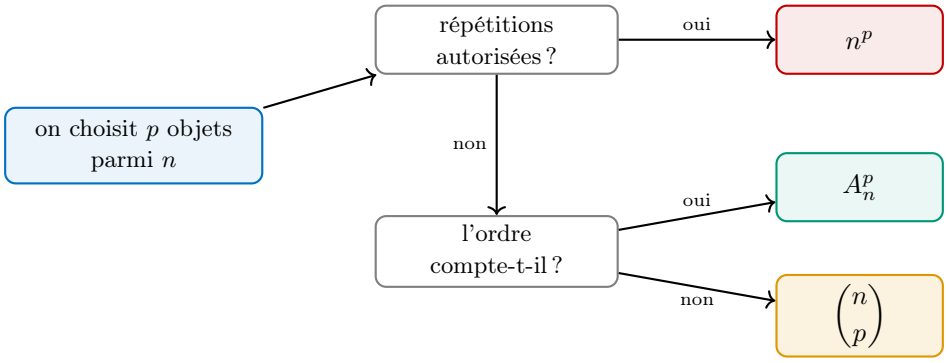
$$\binom{30}{3} = \frac{30 \times 29 \times 28}{3 \times 2 \times 1} = 4060$$

Au poker, le nombre de mains de 5 cartes dans un jeu de 32 vaut de même $\binom{32}{5} = 201\,376$.

7.3.4 Récapitulatif

Toute la difficulté d'un exercice de dénombrement consiste à identifier la situation. Deux questions suffisent : les répétitions sont-elles autorisées, et l'ordre compte-t-il ?

	L'ordre compte	**L'ordre ne compte pas**
Avec répétition	p-uplets : n^p	(hors programme)
Sans répétition	arrangements : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	combinaisons : $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$



Exemple : Reprenons les trois situations de ce chapitre pour illustrer l'arbre de décision :

- **Un code à** 4 **chiffres** : les répétitions sont autorisées et l'ordre compte, donc 10^4 ;
- **Un tiercé dans l'ordre** : un cheval ne peut occuper deux places, et l'ordre compte, donc A_{18}^3 ;
- **Un comité de** 3 **personnes** : une personne n'est pas choisie deux fois, et l'ordre est indifférent, donc $\binom{30}{3}$.

Remarque : Un réflexe permet de trancher rapidement entre arrangement et combinaison : se demander si *échanger deux objets change le résultat.* Deux coureurs qui échangent leur place changent le podium, donc l'ordre compte ; deux membres d'un comité qui échangent leur nom ne changent rien, donc l'ordre est indifférent.