Chapitre 8

Équations différentielles

8.1 Introduction historique

> *Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire ; et vice versa.*
> « Une équation contenant des quantités fluentes étant donnée, trouver les fluxions, et réciproquement. »
>
> Isaac Newton - Lettre du 24 octobre 1676, adressée à Leibniz

Toutes les équations rencontrées jusqu'ici avaient pour inconnue un *nombre* : résoudre $x^2-3x+2=0$, c'est trouver des réels. Ce chapitre introduit un type d'équation entièrement nouveau, dont l'inconnue est une **fonction**, et dans laquelle intervient sa dérivée. Ce déplacement peut sembler abstrait ; il est en réalité la conséquence directe d'une observation physique : les lois de la nature ne décrivent presque jamais l'état d'un système, mais la façon dont il *varie*.

8.1.1 Le langage du mouvement

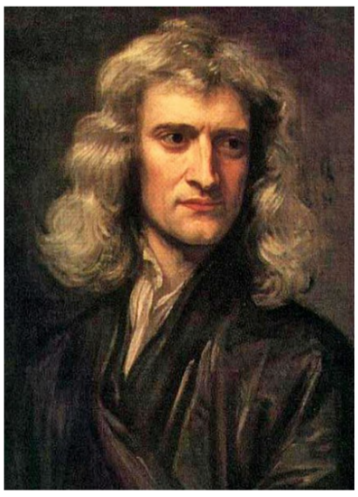
Lorsque **Newton** énonce en 1687 que l'accélération d'un corps est proportionnelle à la force qui s'exerce sur lui, il n'écrit pas la position du corps : il écrit une relation entre cette position et ses dérivées. De même, la vitesse de refroidissement d'un objet dépend de sa température, et la vitesse de désintégration d'un échantillon radioactif dépend de la quantité restante. Dans les trois cas, la grandeur cherchée n'est connue qu'à travers son *taux de variation*.

Le terme lui-même est dû à **Leibniz**, qui parle d'*aequatio differentialis* dès 1676. Les frères **Bernoulli** puis **Euler** en font au XVIII^{e} siècle une théorie complète, qui devient rapidement l'outil de base de toute la physique.

8.1.2 Résoudre, ou décrire

Une difficulté apparaît toutefois très tôt : la plupart des équations différentielles n'admettent aucune solution exprimable à l'aide des fonctions usuelles. À la fin du XIX^{e} siècle, **Henri Poincaré** propose alors un renversement radical : puisqu'on ne sait pas les résoudre, étudions le *comportement* de leurs solutions sans les calculer. Cette idée fonde la théorie des systèmes dynamiques, et par elle l'étude du chaos.

Nous nous limiterons dans ce chapitre aux deux cas les plus simples, ceux que l'on sait résoudre entièrement, et qui suffisent déjà à décrire un nombre considérable de phénomènes.




8.2 Notion d'équation différentielle

8.2.1 Définitions

Définition : On appelle **équation différentielle** toute équation dont l'inconnue est une **fonction**, et dans laquelle figure au moins une des dérivées de cette fonction.

Une **solution** sur un intervalle I est une fonction f, dérivable sur I, qui vérifie l'égalité pour tout x de I. **Résoudre** l'équation, c'est en déterminer *toutes* les solutions.

Remarque : On note traditionnellement y la fonction inconnue et y' sa dérivée, sans écrire la variable : l'équation $y' = 3y$ signifie donc « trouver toutes les fonctions dérivables f telles que $f'(x) = 3f(x)$ pour tout réel x ».

Exemple : Vérifions que la fonction $f : x \mapsto 5\mathrm{e}^{2x}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = 2y$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 5 \times 2\mathrm{e}^{2x} = 10\mathrm{e}^{2x}$. Par ailleurs $2f(x) = 10\mathrm{e}^{2x}$. Les deux expressions coïncident pour tout réel x : f est donc bien une solution.

La fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$ n'en est pas une, puisque $g'(x) = 3\mathrm{e}^{3x}$ tandis que $2g(x) = 2\mathrm{e}^{3x}$.

Remarque : Le chapitre 6 traitait déjà, sans le dire, d'une équation différentielle : chercher les primitives de f, c'est résoudre $y' = f$. Le théorème 1 de ce chapitre affirmait alors que les solutions forment une famille de fonctions différant d'une constante. Nous allons retrouver ce phénomène : une équation différentielle admet en général une **infinité** de solutions.

8.2.2 Courbes intégrales et condition initiale

Définition : Les courbes représentatives des solutions d'une équation différentielle sont appelées ses **courbes intégrales**.

Imposer de plus qu'une solution vérifie une égalité du type $y(x_0) = y_0$ s'appelle donner une **condition initiale**. Cela revient à ne retenir, parmi toutes les courbes intégrales, que celle qui passe par le point de coordonnées $(x_0\,;y_0)$.

Remarque : La condition initiale porte bien son nom en physique, où la variable est le temps : elle décrit l'état du système à l'instant où l'on commence à l'observer. C'est elle qui distingue, parmi toutes les évolutions possibles, celle que l'on observe effectivement.

8.3 L'équation $y' = ay$

Théorème 1 : Solutions de $y' = ay$:
Soit a un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont exactement les fonctions :

$$f : x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{ax} \qquad \text{où } C \text{ est une constante réelle}$$

∘ Démonstration : **Ces fonctions sont solutions :** si $f(x) = C\mathrm{e}^{ax}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = aC\mathrm{e}^{ax} = af(x)$.

Il n'y en a pas d'autres : soit f une solution quelconque, et posons :

$$g(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$$

La fonction g est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et :

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)\,\mathrm{e}^{-ax} + f(x) \times (-a)\mathrm{e}^{-ax} \\ &= \big(f'(x) - af(x)\big)\mathrm{e}^{-ax} \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque f vérifie $f' = af$. La dérivée de g étant nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, la fonction g y est *constante* : il existe un réel C tel que $g(x) = C$ pour tout x. En multipliant l'égalité $f(x)\mathrm{e}^{-ax} = C$ par e^{ax}, on obtient $f(x) = C\mathrm{e}^{ax}$. □

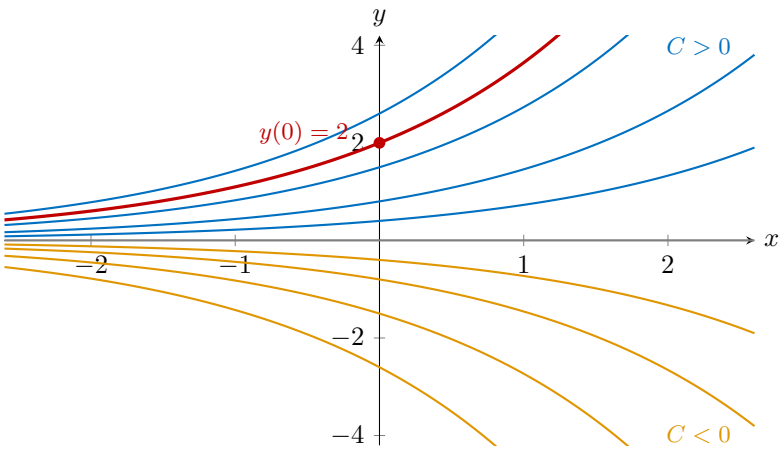
Remarque : L'astuce de la démonstration mérite d'être retenue : on ne cherche pas f directement, on la multiplie par e^{-ax} de façon à fabriquer une fonction de dérivée nulle. C'est le même procédé qui servira pour l'équation de la section suivante.

Théorème 2 : Condition initiale :
Soient a, x_0 et y_0 trois réels. L'équation $y' = ay$ admet une *unique* solution vérifiant $y(x_0) = y_0$.

∘ Démonstration : Les solutions sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$. La condition $y(x_0) = y_0$ s'écrit $C\mathrm{e}^{ax_0} = y_0$, soit :

$$C = \frac{y_0}{\mathrm{e}^{ax_0}} = y_0\,\mathrm{e}^{-ax_0}$$

La constante C est donc déterminée de façon unique, et la solution avec elle. □



Chaque valeur de C fournit une courbe intégrale, et ces courbes ne se coupent jamais : par chaque point du plan il en passe exactement une. C'est la traduction géométrique du théorème 2 — en rouge, celle qui répond à la condition initiale $y(0) = 2$. Le cas $C = 0$ donne la fonction nulle, seule solution constante.

Exemple : Résolvons $y' = -0{,}5\,y$ avec la condition initiale $y(0) = 3$.

D'après le théorème 1, les solutions sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}5x}$. La condition initiale donne :

$$C\mathrm{e}^{0} = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad C = 3$$

La solution cherchée est donc $f(x) = 3\mathrm{e}^{-0{,}5x}$. Comme $-0{,}5 < 0$, cette fonction est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$.

Remarque : Le signe de a gouverne entièrement le comportement des solutions non nulles :

- si $a > 0$, elles croissent en valeur absolue et divergent vers $\pm\infty$: c'est la **croissance exponentielle** ;
- si $a < 0$, elles tendent vers 0 : c'est la **décroissance exponentielle** ;
- si $a = 0$, l'équation devient $y' = 0$ et les solutions sont les fonctions constantes.

8.4 L'équation $y' = ay + b$

Théorème 3 : Solutions de $y' = ay + b$:
Soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay + b$ sont exactement les fonctions :

$$f : x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a} \qquad \text{où } C \text{ est une constante réelle}$$

De plus, pour toute condition initiale $y(x_0) = y_0$, il existe une unique solution la vérifiant.

◦ Démonstration : Cherchons d'abord une solution **particulière** constante. Si f est constante égale à k, alors $f' = 0$, et l'équation devient :

$$0 = ak + b \quad \Longleftrightarrow \quad k = -\frac{b}{a}$$

ce qui est licite puisque $a \neq 0$. La fonction constante $\varphi : x \mapsto -\frac{b}{a}$ est donc une solution.

Soit maintenant f une solution quelconque, et posons $g = f - \varphi$. Alors g est dérivable et :

$$g'(x) = f'(x) - 0 = af(x) + b = a\left(g(x) - \frac{b}{a}\right) + b = a\,g(x) - b + b = a\,g(x)$$

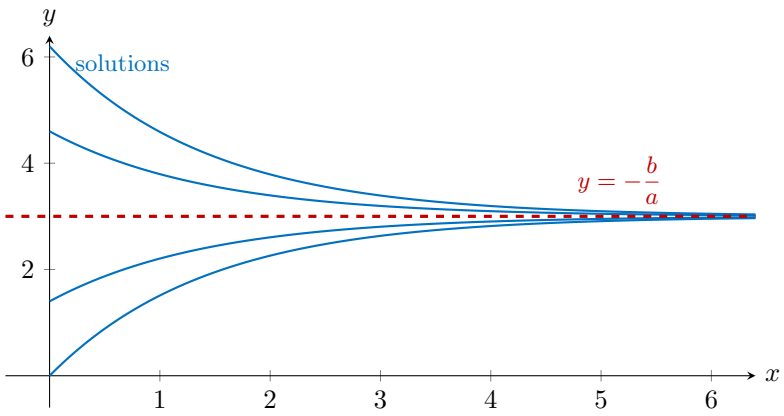
La fonction g est donc solution de l'équation $y' = ay$ étudiée en section 8.3 : il existe un réel C tel que $g(x) = C\mathrm{e}^{ax}$, d'où :

$$f(x) = g(x) + \varphi(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$$

Réciproquement, toute fonction de cette forme est solution, comme on le vérifie par dérivation. Le raisonnement sur la condition initiale est identique à celui du théorème 2. □

Remarque : La structure de cette démonstration est celle de toute la théorie : **une solution particulière**, à laquelle on ajoute **toutes les solutions de l'équation sans second membre**. Retenez la méthode plutôt que la formule, car c'est elle qui se généralise.

Notez enfin que la constante $-\frac{b}{a}$ est la valeur d'**équilibre** du système : si l'on part exactement de cette valeur, rien ne bouge, puisque $y' = 0$.



Ici $a < 0$: toutes les courbes intégrales convergent vers la droite d'équation $y = -\frac{b}{a}$, qui en est asymptote horizontale. Le système rejoint donc son équilibre quelle que soit sa valeur de départ, par au-dessus ou par en dessous.

♡ **Méthode :** Pour résoudre une équation différentielle avec condition initiale :

1. On identifie a et b en ramenant l'équation à la forme $y' = ay + b$.
2. On écrit la forme générale des solutions donnée par le théorème, avec la constante C.
3. On traduit la condition initiale, ce qui donne une équation d'inconnue C.
4. On conclut en écrivant l'unique solution obtenue.

Exemple : Résolvons $y' = 2y - 6$ avec $y(0) = 1$.

Ici $a = 2$ et $b = -6$, donc $-\frac{b}{a} = 3$. Les solutions sont les fonctions :

$$f(x) = C\mathrm{e}^{2x} + 3$$

La condition initiale donne $C + 3 = 1$, soit $C = -2$. La solution cherchée est donc :

$$f(x) = -2\mathrm{e}^{2x} + 3$$

8.5 Modélisation

8.5.1 Désintégration radioactive

Un échantillon radioactif se désintègre d'autant plus vite qu'il contient encore d'atomes. En notant $N(t)$ leur nombre à l'instant t, cette proportionnalité s'écrit :

$$N'(t) = -\lambda\, N(t)$$

où $\lambda > 0$ est la **constante radioactive** du noyau considéré. C'est exactement l'équation de la section 8.3, dont les solutions sont :

$$N(t) = N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

en notant N_0 le nombre d'atomes à l'instant initial.

Proposition 1 (demi-vie) : On appelle **demi-vie** le temps T au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés. Elle vaut :

$$T = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

∘ Démonstration : Il s'agit de résoudre $N(T) = \dfrac{N_0}{2}$, soit :

$$N_0 \mathrm{e}^{-\lambda T} = \frac{N_0}{2} \iff \mathrm{e}^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$$

En appliquant le logarithme népérien, qui est strictement croissant :

$$-\lambda T = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \iff T = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

□

Remarque : Ce résultat est remarquable : la demi-vie ne dépend *pas* de la quantité initiale. Qu'il reste un milliard d'atomes ou mille, il en disparaîtra la moitié dans le même temps. C'est ce qui permet la datation au carbone 14, dont la demi-vie vaut 5730 ans, soit $\lambda \approx 1{,}21 \times 10^{-4}$ an^{-1}.

8.5.2 Loi de refroidissement de Newton

Un corps chaud placé dans une pièce se refroidit d'autant plus vite que l'écart de température avec le milieu est grand. En notant $\theta(t)$ sa température et θ_{ext} celle de la pièce :

$$\theta'(t) = -k\big(\theta(t) - \theta_{\text{ext}}\big) \qquad \text{soit} \qquad \theta' = -k\,\theta + k\,\theta_{\text{ext}}$$

C'est l'équation de la section 8.4, avec $a = -k$ et $b = k\theta_{\text{ext}}$, donc $-\dfrac{b}{a} = \theta_{\text{ext}}$.

Exemple : Un café à 85 °C est posé dans une pièce à 20 °C, avec $k = 0{,}05$ min^{-1}.

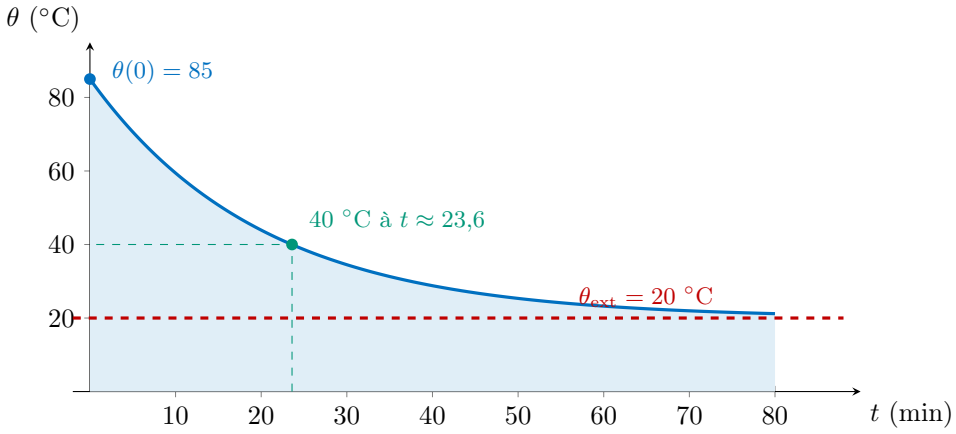
D'après le théorème 3, $\theta(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}05t} + 20$. La condition initiale $\theta(0) = 85$ donne $C + 20 = 85$, soit $C = 65$, d'où :

$$\theta(t) = 20 + 65\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}$$

Au bout de dix minutes, la température vaut $\theta(10) = 20 + 65\mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 59{,}4$ °C.

Pour savoir quand le café atteint 40 °C, on résout :

$$20 + 65\mathrm{e}^{-0{,}05t} = 40 \iff \mathrm{e}^{-0{,}05t} = \frac{20}{65} \iff t = \frac{\ln\left(\frac{65}{20}\right)}{0{,}05} \approx 23{,}6 \text{ minutes}$$



Remarque : La courbe illustre bien le rôle de la valeur d'équilibre : le refroidissement est d'abord rapide, puis de plus en plus lent à mesure que l'écart avec la température ambiante diminue. Mathématiquement, le café n'atteint jamais exactement 20 °C — la droite est une asymptote — mais l'écart devient rapidement indétectable.